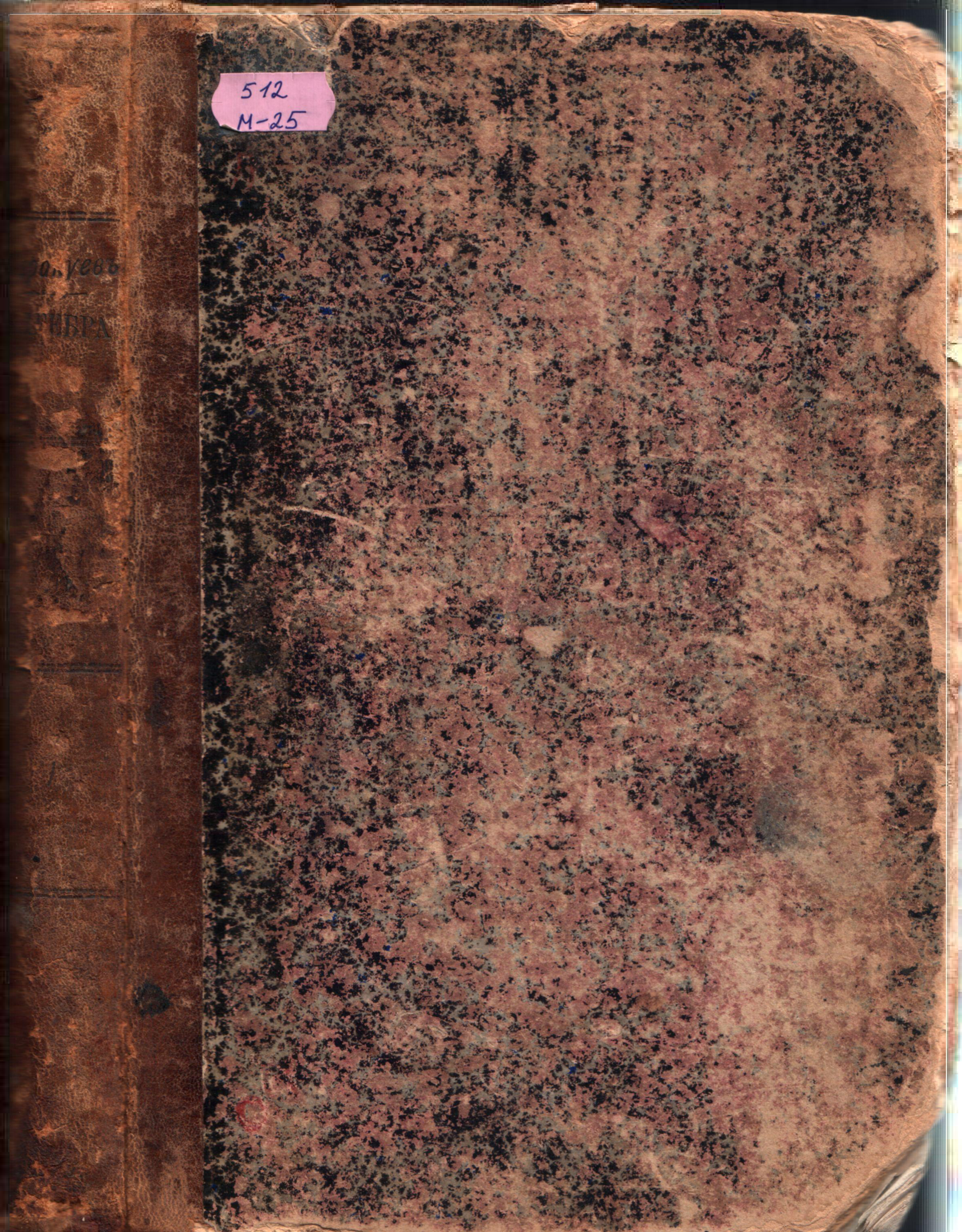
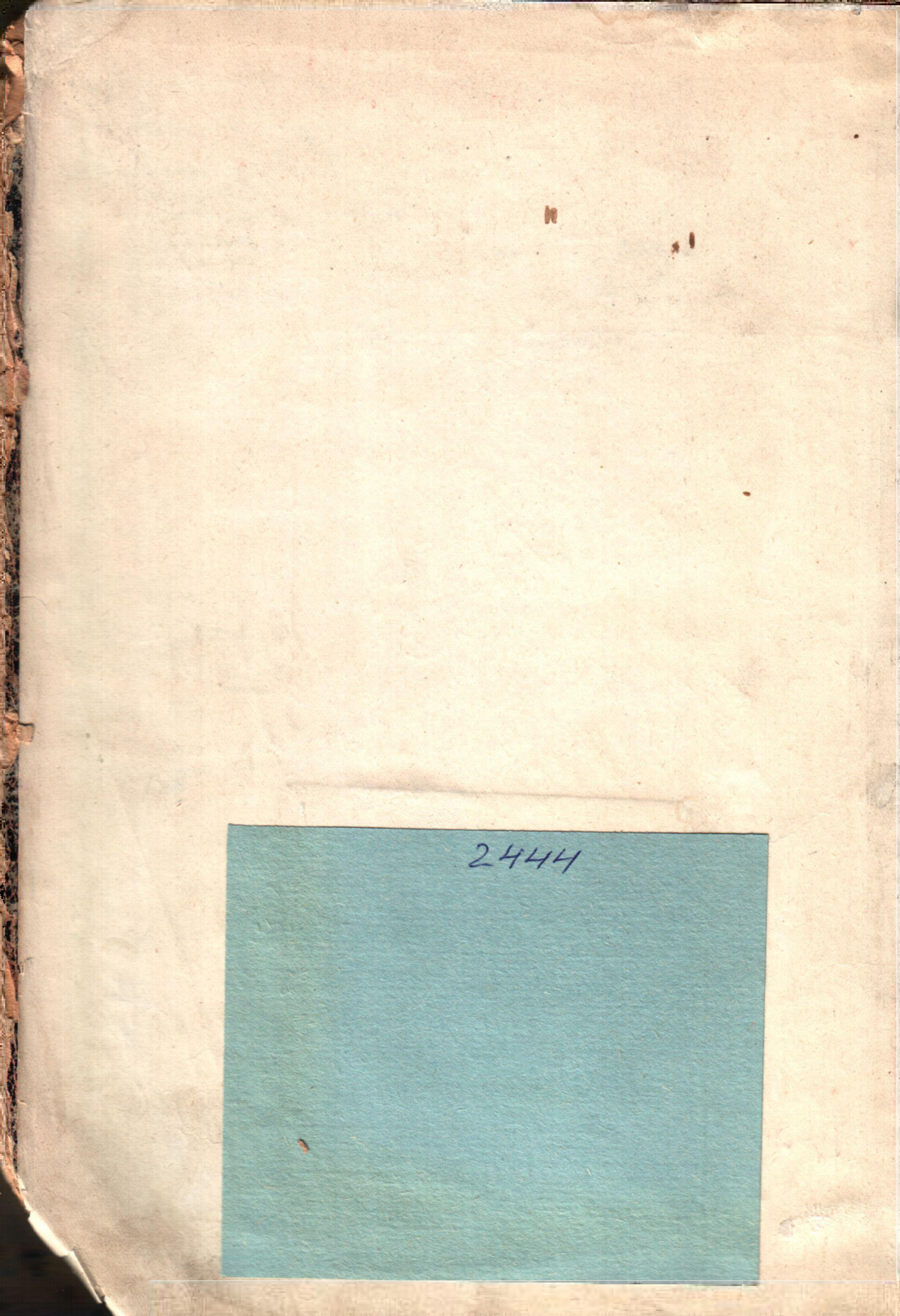


512
М-25


2444

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА

КУРСЪ СИСТЕМАТИЧЕСКІЙ

ВЪ 2-ХЪ ЧАСТЯХЪ

Н. Н. Маракуева,

преподавателя математики.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Появленіе предлагаемаго курса алгебры вызвано, съ одной стороны, желаніемъ дать руководство, стоящее на уровнѣ современныхъ воззрѣній на количество, опирающихся на изслѣдованія Гамильтона, съ другой стороны,—желаніемъ пополнить пробѣлы общепринятыхъ у насъ курсовъ (Давидова, Сомова и др.), не отвѣчающихъ современному состоянію преподаванія алгебры, какъ оно поставлено во Франціи, которая, изъ всѣхъ странъ Запада, является единственнымъ образцомъ, достойнымъ подражанія въ занимающемъ насъ дѣлѣ.

Особенности нашего курса виднѣе будутъ изъ нижеслѣдующаго перечня ихъ.

Въ началѣ курса (глава II) дается отчетливое изложеніе теоріи отрицательныхъ количествъ указаніемъ *направленія* величины, какъ элемента, отличающаго количество алгебраическое отъ ариѳметическаго.

Выводу правилъ для алгебраическихъ дѣйствій предшествуетъ предварительное изученіе основныхъ свойствъ суммы и разности, а затѣмъ и произведенія. Далѣе эти законы распространены на несоизмѣримыя числа, и наконецъ на комплексы.

Статья о разложеніи многочленовъ на множители пополнена новымъ, по сравненію съ другими курсами, *способомъ двучленныхъ дѣлителей.*

Дано указаніе объ употребленіи двойнаго знака при квадратномъ корнѣ, къ сожалѣнію, обыкновенно опускаемое составителями учебниковъ.

Данъ строгій и ясный выводъ правилъ извлеченія кв. и куб. корней изъ чиселъ: обычное изложеніе этой статьи, по несовершенству предлагаемыхъ пріемовъ объясненія, обыкновенно затрудняетъ учащихся.

Введена статья о предѣлахъ, обыкновенно неизлагаемая въ существующихъ курсахъ.

Статьѣ объ уравненіяхъ предшествуетъ какъ введеніе глава, посвященная изученію особыхъ формъ алгебраическихъ выраженій; ихъ изученіе, весьма важное для теоріи уравненій, обыкновенно опускается въ существующихъ у насъ курсахъ.

Подробно уяснены *начала,* на которыхъ основывается рѣшеніе уравненій. Этотъ пунктъ, обыкновенно, излагается поверхностно, а теорема объ умно-

женіи уравненія на множитель съ неизвѣстнымъ даже обыкновенно излагается неправильно. Неправильное выраженіе этой теоремы, кажется, впервые появилось въ алгебрѣ Давидова, а оттуда перешло и въ другія руководства, между прочимъ даже и въ алгебру Шапошникова—лучшій изъ существующихъ у насъ краткихъ курсовъ.

Съ большею полнотою, нежели обыкновенно принято, изложена у насъ и статья о неравенствахъ: за общими началами, относящимися къ одному и къ совмѣстнымъ неравенствамъ, указаны методы провѣрки задаваемыхъ неравенствъ, затѣмъ кромѣ рѣшенія неравенствъ первой степени, указано и рѣшеніе неравенствъ высшихъ степеней и ирраціональныхъ. Особенное вниманіе на эту статью обращено въ виду того, что она находится въ тѣсной связи съ *изслѣдованіемъ* вопросовъ.

Тщательно обработаны статьи, относящіяся къ *изслѣдованію* вопросовъ, приводящихъ къ ур—мъ первой степени и квадратнымъ. На изслѣдованіе ур—ній первой ст. приведено 12 примѣрныхъ подробно разобранныхъ задачъ. Изслѣдованію вопросовъ 2-й ст. предшествуетъ подготовительное изученіе измѣненій нѣкоторыхъ простѣйшихъ функцій (квадв. и бикв. тринома и нѣк. др.); самое же изслѣдованіе пояснено тщательнымъ разборомъ 23-хъ образцовыхъ задачъ, гдѣ и развиты надлежащія методическія указанія. Методъ изслѣдованія систематически проведенъ новый, основанный на свойствахъ квадратнаго тринома. Статья эта, даже въ курсахъ приложенія алгебры къ геометріи, излагается, обыкновенно, крайне неполно и нашъ курсъ *въ первый разъ въ русской литературѣ* даетъ обстоятельныя по этому предмету указанія. Самая статья о квадратныхъ ур—ніяхъ изложена съ большою полнотою, сопровождаясь множествомъ различнаго рода приложеній.

Въ статьѣ о maxima и minima функцій приведены всевозможные элементарные пріемы опредѣленія максимальныхъ и минимальныхъ значеній функцій, съ графическимъ поясненіемъ и также съ большимъ числомъ примѣрныхъ задачъ.

Анализъ соединеній, кромѣ обычнаго матеріала, содержитъ и статью о соединеніяхъ съ повтореніями.

Въ элементарной теоріи рядовъ, въ видѣ приложенія теоріи, изложены элементарные методы Жоффруа для разложенія π въ безконечные ряды.

Что касается разложенія функцій (бинома, показательной и логариѳмической), въ безконечные ряды, то пріемы даны совершенно строгіе, т. е. основанные не на способѣ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, примѣненія котораго въ данномъ случаѣ слѣдуетъ избѣгать. Тамъ, гдѣ этотъ методъ умѣстенъ, примѣненіе его разъяснено на задачахъ, въ различныхъ отдѣлахъ курса.

Теоріи логариѳмовъ предшествуетъ предварительное изслѣдованіе свойствъ показательной функціи: теорія логариѳмовъ является непосредственнымъ королларіемъ этого изслѣдованія.

Наконецъ, теорія непрерывныхъ дробей пополнена изученіемъ *періодическихъ* дробей.

Изслѣдованія измѣненій функцій сопровождаются графическимъ представленіемъ хода измѣненій.

Изложеніе сопровождается историческими примѣчаніями.

Доказательства выбраны безукоризненно—строгія.

Отдѣльныя главы сопровождаются богатымъ подборомъ примѣровъ и задачъ, большею частію не встрѣчающихся въ нашихъ учебникахъ.

Что касается изложенія, то въ первыхъ главахъ доказательства изложены съ надлежащею полнотою, въ виду того, что книга назначается не для однихъ учениковъ, занимающихся подъ руководствомъ учителя, но и для самостоятельнаго чтенія. Затѣмъ, постепенно, изложеніе принимаетъ сжатый характеръ.

Отвѣты на задачи не приложены, съ цѣлію развитія въ читателяхъ большей самостоятельности и надлежащаго навыка въ провѣркѣ получаемыхъ результатовъ.

Въ нашемъ курсѣ ничего не говорится о рѣшеніи кубичнаго уравненія въ общемъ видѣ и о разложеніи тригонометрическихъ функцій въ строки: эти статьи войдутъ въ приготовляемый къ печати **„курсъ тригонометріи“**, который будетъ составленъ въ томъ же духѣ, какъ и курсъ алгебры, являясь такимъ образомъ естественнымъ дополненіемъ послѣдняго. Въ курсъ тригонометріи войдетъ и изслѣдованіе вопросовъ съ тригонометрическими величинами, а также и maxima и minima тригонометрическихъ функцій.

При составленіи курса, авторъ пользовался всѣми выдающимися сочиненіями по элементарной алгебрѣ (французскими, нѣмецкими и англійскими), начиная съ Лакруа и кончая курсами восьмидесятыхъ годовъ.

1 Февраля 1888 г.

Н. Маракуевъ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ:

Часть I.

Страница.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
53	19 сверху	$(a+b)^2$	$(a+b)^3$
78	1 снизу	$A^3 - B^3$	$A^3 + B^3$
106	3 снизу	остатокъ x	остатокъ R.
189		На черт. 9: въ пересѣченіи окружности съ діагональю должна быть буква M.	
206	10 сверху	$-2a\sqrt{a}$	$-2a\sqrt{b}$
215	2 снизу	$+3\sqrt{2\sqrt{2-1)}}$	$+3\sqrt{2(\sqrt{2-1})}$
217	Зад. 102 д. б.	$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$	
233	2 сверху	давно бы	дало бы
238	8 сверху	$\frac{\sqrt[m]{B}}{\sqrt[m]{B}}$	$\frac{\sqrt[m]{B}}{\sqrt[m]{A}}$.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ.

ГЛАВА I.

Предварительныя понятія и опредѣленія.

1. Пусть дана задача: найти два числа, которыхъ сумма равняется 138, а разность 24?

Рѣшимъ эту задачу ариѳметическимъ путемъ. Такъ какъ разность искомыхъ чиселъ, по условію, равна 24, то большее число равно меньшему, сложенному съ 24; поэтому сумма двухъ искомыхъ чиселъ состоитъ изъ меньшаго числа, сложеннаго съ меньшимъ и съ 24, или изъ удвоеннаго меньшаго числа, сложеннаго съ 24. Итакъ, мы имѣемъ сумму 138, которой одно слагаемое 24 извѣстно, а другое — удвоенное меньшее число — неизвѣстно; вычтя изъ суммы извѣстное слагаемое, находимъ остатокъ 114, равный удвоенному меньшему числу; раздѣливъ этотъ остатокъ на 2, получаемъ, что меньшее число равно 57. Придавъ къ нему 24, находимъ большее число 81.

Повѣрка покажетъ намъ, что искомыя числа найдены вѣрно.

Наши разсужденія значительно сократятся, если мы неизвѣстныя будемъ обозначать особыми буквами, а дѣйствія особыми знаками, что допускается и въ ариѳметикѣ.

Обозначимъ же меньшее число буквою x; тогда большее, превышая меньшее на 24, изобразится суммою $x+24$; обѣ же части вмѣстѣ равны $x+x+$ $+24$, или короче $2x+24$. Эта сумма, по условію, равна 138, слѣд.

$$2x+24=138,$$

откуда неизвѣстное слагаемое $2x=138-24=114$, а отсюда $x=114:2=57$.

Придавъ 24 къ 57, найдемъ большее число 81.

Отсюда ясно, какимъ образомъ введеніе знаковъ для обозначенія дѣйствій и буквы x для обозначенія неизвѣстнаго сокращаетъ рѣчь и этимъ самымъ ускоряетъ рѣшеніе задачи. Чѣмъ сложнѣе задача, тѣмъ важнѣе введеніе этихъ сокращающихъ рѣчь знаковъ.

2. Окончательные результаты, полученные нами при рѣшеніи задачи (т. е. числа 57 и 81) не носятъ на себѣ слѣда данныхъ чиселъ, потому что при

выполненіи каждаго дѣйствія данныя числа замѣнялись новыми; результаты 57 и 81 не даютъ намъ никакого понятія о томъ, какія дѣйствія надо произвести надъ данными числами для нахожденія неизвѣстныхъ. Для того чтобы судить о томъ, какія дѣйствія и въ какомъ порядкѣ слѣдуетъ произвести надъ данными числами для опредѣленія неизвѣстныхъ, нужно только обозначать дѣйствія, удерживаясь отъ всякихъ вычисленій. Поступая такъ, мы найдемъ, что меньшая часть въ рѣшенной нами задачѣ выразится слѣдующимъ образомъ:

$$x = \frac{138 - 24}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Изъ этого выраженія видно, что для нахожденія меньшаго числа слѣдуетъ изъ данной суммы вычесть данную разность и остатокъ раздѣлить на 2. Это правило будетъ служить для рѣшенія всѣхъ задачъ одного рода съ данной, т. е. отличающихся отъ нея не содержаніемъ, а только иною величиною данныхъ чиселъ; это потому — что какимъ образомъ числа 138 и 24 входятъ въ составъ выраженія (1), такимъ же точно образомъ будутъ входить и всякія другія числа, взятыя вмѣсто нихъ.

Такимъ образомъ выраженія, подобныя (1), служатъ *общими рѣшеніями*, или выражаютъ общія правила для рѣшенія всѣхъ однородныхъ задачъ; ихъ называютъ также *ариѳметическими формулами.*

Однако, для того чтобы ариѳметическая формула ясно и отчетливо говорила уму о тѣхъ дѣйствіяхъ, которыя слѣдуетъ производить надъ данными числами для опредѣленія неизвѣстныхъ, необходимо соблюденіе слѣдующихъ условій:

1) чтобы данныя величины были выражены небольшими числами; ибо иначе формула будетъ не достаточно *проста*;

2) чтобы числа эти были разнообразны, ибо иначе формула будетъ лишена *ясности*;

3) вслѣдствіе выполненія нѣкоторыхъ дѣйствій, котораго избѣжать нельзя, могутъ войти числа одинаковыя съ данными, а это влечетъ за собою опять недостаточную ясность формулы. Примѣромъ можетъ служить слѣдующая задача:

сумма трехъ чиселъ равна 238; второе число больше перваго на 4 единицы, а третье равно суммѣ двухъ первыхъ; найти первое число?

Пусть первое число $= x$; тогда второе будетъ $= x + 4$, а третье $x + x + 4$ или $2x + 4$, сумма же всѣхъ трехъ чиселъ будетъ $x + x + 4 + 2x + 4$ или $4x + 4 \times 2$. По условію $4x + 4 \times 2 = 238$, откуда $4x = 238 - 4 \times 2$, слѣд.

$$x = \frac{238 - 4 \times 2}{4}$$

Соединеніе вмѣстѣ всѣхъ x-овъ ввело число 4—одинаковое съ даннымъ, и хотя по происхожденію этого числа его не трудно отличить отъ даннаго, все же формула потеряла полную ясность.

Неудобства, подобныя этому, очевидно, будутъ возрастать вмѣстѣ съ усложненіемъ задачъ. Въ виду устраненія такихъ неудобствъ условились не только искомыя, но и данныя числа обозначать буквами. Рѣшимъ нашу задачу, обозначая и данныя и искомыя числа буквами.

Сумма двухъ чиселъ равна s, а разность d; найти эти числа?

Пусть меньшее число $= x$; тогда большее будетъ $x + d$; по условію, $x + x + d = s$, или $2x + d = s$, откуда $2x = s - d$, и слѣд.

$$x = \frac{s-d}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Формула (2) опредѣляетъ меньшее число. Большее число будетъ $\frac{s-d}{2} + d$, или $\frac{s-d+2d}{2}$, или наконецъ:

$$\frac{s+d}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Изъ формулъ (2) и (3) ясно вытекаетъ правило: для нахожденія большаго числа нужно къ данной суммѣ придать данную разность и результатъ раздѣлить на 2; а для нахожденія меньшаго числа слѣдуетъ изъ данной суммы вычесть данную разность и остатокъ раздѣлить на 2.

Выраженія, подобныя (2) и (3), указывающія порядокъ дѣйствій, которыя нужно совершить надъ данными числами для нахожденія неизвѣстныхъ, служатъ для рѣшенія всѣхъ задачъ, однородныхъ съ данною: для этого надо только вмѣсто буквъ подставить числа и и выполнить указанныя дѣйствія. Такъ, если данная сумма $= 500$, а разность 200, то, подставивъ 500 вмѣсто s и 200 вмѣсто d, найдемъ, что:

большая часть $= \frac{500+200}{2} = \frac{700}{2} = 350$

а меньшая часть $= \frac{500-200}{2} = \frac{300}{2} = 150.$

Преимущества буквенныхъ формулъ передъ числовыми, какъ видно изъ вышеизложеннаго, заключаются въ слѣдующемъ:

1) Подъ буквами можно разумѣть какія угодно числа, поэтому рѣшеніе выраженное буквенною формулою, пригодно для всѣхъ однородныхъ задачъ: буквенная формула даетъ рѣшеніе цѣлаго класса задачъ.

2) Алгебрическая формула даетъ наиболѣе ясное рѣшеніе задачи, ибо въ ней наиболѣе ясно изображаются порядокъ и послѣдовательность дѣйствій, которыя надо совершить надъ данными для нахожденія искомыхъ; между тѣмъ какъ въ ариѳметической формулѣ эта ясность, какъ мы видѣли, иногда теряется.

3) Результатъ, представленный алгебрическою формулою, выражается обыкновенно коротко.

4) При помощи алгебрической формулы легче запомнить самое правило.

Наука, занимающаяся обобщеніемъ вопросовъ о числахъ и способовъ ихъ рѣшенія, называется алгеброю.

3. Знаки, употребляемые въ алгебрѣ, частію тѣже самые, что и въ ариѳметикѣ, частію другіе. Ихъ можно раздѣлить на три группы: 1) знаки, употребляемые для изображенія чиселъ; 2) для изображенія дѣйствій надъ числами; и 3) для изображенія соотношеній между числами.

1. **Знаки для изображенія чиселъ.** Числа изображаются въ алгебрѣ не цифрами, какъ въ ариѳметикѣ, а *буквами*; это обозначеніе было введено французскимъ математикомъ второй половины XVI вѣка *Вьетомъ* (1540—1603). Вьетъ

употреблялъ большія литеры; малыя буквы введены англійскимъ математикомъ Томасомъ *Гарріотомъ*.

Для обозначенія извѣстныхъ чиселъ употребляются первыя буквы латинской азбуки: a, b, c, d, e, f, ... ; для обозначенія неизвѣстныхъ — послѣднія буквы: t, u, v, x, y, z, ...

Иногда при буквахъ ставятъ значки или указатели (индексы), когда хотятъ сохранить въ обозначеніи аналогію, существующую между изображаемыми количествами.

Такимъ образомъ пишутъ: a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, ...; или: a_1, a_2, a_3, a_4, ... Съ тою же цѣлью употребляютъ еще буквы греческаго алфавита, соотвѣтствующія латинскимъ: α, β, γ δ, ε, ...

Числа, изображенныя буквами, называются *общими числами*, потому-что подъ каждою буквою разумѣютъ не одно какое-либо число, но какія угодно числа.

2. Знаки для изображенія дѣйствій.

Сложеніе обозначается знакомъ $+$ (плюсъ); такъ $a+b$ означаетъ сумму количествъ a и b.

Вычитаніе обозначается знакокъ — (минусъ); такъ $a-b$ означаетъ разность между a и b.

Знаки $+$ и — введены во всеобщее употребленіе нѣмецкими математиками XV столѣтія. Полагаютъ, что первый началъ ихъ употреблять *Пурбахъ* (1423—1461). Въ «Алгебрѣ» *Рудольфа*, напечатанной въ 1525 г. и въ «Arithmetica integra» *Стифеля*, напечатанной въ 1544 г., примѣнены уже эти знаки.

Умноженіе обозначается знакомъ $\times$, или . (точкою), или же между сомножителями не ставится никакого знака; такимъ образомъ $a \times b$, $a \, . \, b$, и ab одинаково означаютъ произведеніе a на b.

Нужно замѣтить, что знакъ умноженія нельзя опускать, когда числа изображены цифрами; произведеніе 4 на 7 нельзя представить въ видѣ 47, такъ какъ 47, по принятому способу изображенія чиселъ, означаетъ не произведеніе 4 на 7, а число сорокъ семь.

Опущеніе всякаго знака умноженія между различными факторами произведенія впервые встрѣчается у Стифеля (Arithmetica 1544); знакъ $\times$ (косой крестъ) введенъ *Ухтредомъ* (Oughtred) въ сочиненіи (Clavis mathem. 1631); знакъ . (точка) введенъ *Лейбницемъ* во второй половинѣ XVII столѣтія.

Дѣленіе обозначаетстя или двоеточіемъ, или чертою; такъ $a : b$ и $\frac{a}{b}$ одинаково означаютъ частное отъ раздѣленія a на b.

Полагаютъ, что знакъ: введенъ во всеобщее употребленіе Лейбницемъ; знакъ — (черта) встрѣчается уже въ сочиненіи *Фибоначчи* Пизанскаго (1202 г.)

3. Знаки соотношеній. Для изображенія равенства двухъ количествъ употребляется знакъ $=$; такъ, выраженіе

$$A = B$$

означаетъ: A равно B.

Знакъ равенства ($=$) введенъ англійскимъ математикомъ *Рекордомъ*, который въ первый разъ употребилъ его въ своемъ сочиненіи «Брусокъ для ума»

(The Whetstone of Wit), изданномъ въ 1557 г. Во всеобщее употребленіе знакъ этотъ вошолъ сто лѣтъ спустя.

Слово *больше* изображается знакомъ $>$; слово *меньше* знакомъ $<$. Такъ $a > b$ означаетъ: a больше b; $a < b$ означаетъ: a меньше b.

Когда хотятъ выразить, что два количества неравны, не указывая, которое изъ нихъ больше, ихъ отдѣляютъ знакомъ $\lessgtr$; такъ $a \lessgtr b$ означаетъ, что a неравно b.

Чтобы выразить, что *a не меньше b*, пишутъ $a \geqslant b$.

Такимъ же образомъ $a \leqslant b$ означаетъ, что *a не больше b*.

Знаки $>$ и $<$ введены англійскимъ математикомъ Гарріотомъ въ 1623 г.

Коэффиціентъ. — Если какое нибудь произведеніе, наприм. ab, требуется повторить слагаемымъ нѣсколько разъ, напр. пять, то сумма будетъ $= ab + ab + ab + ab + ab$. Очевидно, что такій способъ изображенія суммы неудобенъ, когда число слагаемыхъ велико: письменное изображеніе суммы заняло бы въ этомъ случаѣ много времени и мѣста. Въ видахъ устраненія такого неудобства ввели сокращенное обозначеніе суммы равныхъ слагаемыхъ, условившись слагаемое писать одинъ разъ, а передъ нимъ ставить число, показывающее, сколько разъ взятое выраженіе повторяется слагаемымъ. Такимъ образомъ наша сумма сокращенно выразится въ видѣ $5ab$.

Число 5, показывающее, сколько разъ слѣдующее за нимъ выраженіе повторяется слагаемымъ, называется *коэффиціентомъ* или *предстоящимъ*. Коэффиціенту можно дать и другое опредѣленіе. Въ самомъ дѣлѣ, повтрить ab пять разъ слагаемымъ, — это все равно, что ab умножить на 5; слѣд. *коэффиціентъ есть числовой множитель, стоящій передъ буквеннымъ выраженіемъ*.

Такъ, въ выраженіяхъ $7ab$, $\frac{2}{3}mn$, множители 7 и $\frac{2}{3}$ суть коэффиціенты. Иногда и буквенные производители разсматриваются какъ коэффиціенты по отношнню къ слѣдующимъ за ними произведеніямъ; такъ въ выраженіи abc можно a считать коэффиціентомъ произведенія bc. Если произведеніе состоитъ изъ одяихъ буквенныхъ сомножителей, то коэффиціентъ его есть 1; напр. коэффиціентъ произведенія abc есть 1, такъ-какъ это произведеніе можно написать въ видѣ $1.\,abc$.

Степень. — *Степенью называется произведеніе равныхъ множителей.*

Если число берется множителемъ два раза, то произведеніе называется *второю степенью* или *квадратомъ* этого числа; такъ 5×5 или 25 есть квадратъ пяти. Когда число берется множителемъ три раза, то произведеніе называется *третьею степенью* или *кубомъ* этого числа; такъ 5.5.5 или 125 есть кубъ пяти. Произведеніе четырехъ равныхъ множителей наз. *четвертою степенью;* напр. $a.a.a.a$ есть четвертая степень числа a. — Очевидно, что если число равныхъ множителей велико, то письменное изображеніе степени займетъ много времени и мѣста. Для устраненія этого неудобства введено слѣдующее сокращенное изображеніе степени: перемножаемое само на себя количество пишутъ одинъ разъ, а надъ нимъ справа ставятъ число, показывающее, сколько разъ это количество берется множителемъ. Согласно этому условію, квадратъ количества a, т. е. произведеніе $a.a$ сокращенно пишется въ видѣ: a^2; кубъ a, т. е. произведеніе $a.a.a$ сокращенно изображается въ видѣ: a^3; четвертая сте-

пень a, т. е. $a.a.a.a$ — въ видѣ a^4 и т. д. — Каждый изъ равныхъ множителей называется *основаніемъ* степени; такъ въ формулѣ a^4 основаніе есть a. — Числа 2, 3, 4 и т. д., стоящія надъ основаніемъ, называются *показателями* степени. Итакъ, *показатель степени есть число, которое ставится надъ буквою и означаетъ, сколько разъ эта буква берется множителемъ.*

Показатель 1 не пишется, а подразумѣвается; такъ, вмѣсто b^1 пишутъ b.

На основаніи сказаннаго, произведеніе $aaaabbbccd$ сокращенно пишутъ въ видѣ $a^4b^3c^2d$. Обратно, a^2b^5 есть сокращенно написанное произведеніе $aabbbbb$.

Дѣйствіе нахожденія степени даннаго числа называется возвышеніемъ въ степень. Такъ; возвысивъ 7 въ кубъ, т. е. взявъ 7 множителемъ три раза, получимъ 343. Возвысивъ $\frac{1}{2}$ въ четвертую степень, т. взявъ $\frac{1}{2}$ множителемъ четыре раза, найдемъ $\frac{1}{16}$ и т. д.

Полезно знать на память квадраты и кубы по крайнѣй мѣрѣ первыхъ десяти чиселъ, которые мы и помѣщаемъ въ слѣдующей таблицѣ:

Числа:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8.	9,	10.
Квадраты:	1,	4,	9,	16,	25;	36,	49,	64,	81,	100.
Кубы:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Корень. — Корнемъ второй степени или квадратнымъ изъ даннаго числа называется такое число, квадратъ котораго равенъ данному числу. Такъ, квадратный корень изъ 9 равенъ 3, потому-что квадратъ трехъ даетъ 9.

Кубичнымъ корнемъ изъ даннаго числа называется такое число, котораго кубъ равенъ данному числу. Напр., кубичный корень изъ 64 равенъ 4, потому-что кубъ четырехъ равенъ 64.

Корнемъ четвертаго порядка изъ даннаго числа называется такое, четвертая степень котораго равна данному числу. Такъ, корень четвертаго порядка изъ 16 равенъ 2, ибо $2^4 = 16$.

Вообще, корнемъ, n-го порядка изъ даннаго числа наз. такое число, котораго n-ая степень равна данному числу. Такимъ образомъ корень n-го порядка изъ a^n есть a.

Для обозначенія корня употребляютъ знакъ $\sqrt{\ }$, подъ которымъ ставятъ данное число, называемое поэтому *подкореннымъ числомъ*. Въ отверстіе этого знака ставятъ число, которое показываетъ, въ какую степень должно возвысить корень для полученія даннаго числа; его называютъ *показателемъ* корня.

Такъ, чтобы обозначить письменно, что корень четвертаго порядка изъ 16 равенъ 2, пишутъ: $\sqrt[4]{16} = 2$; здѣсь 2 есть самый корень, 16 — подкоренное число, 4 — показатель корня.

Если показатель корня равенъ 2, то его не пишутъ, а подразумѣваютъ. Такъ, для обозначенія, что квадратный корень изъ $\frac{1}{4}$ равенъ $\frac{1}{2}$, пишутъ: $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Коренной знакъ ($\sqrt{\ }$) называютъ также *радикаломъ. Дѣйствіе нахожденія корня называется извлеченіемъ корня.*

Первые слѣды употребленія показателей находятся у Лароша (Arismetique et Geometrie, 1520); онъ употребляетъ показатели 1, 2, 3. — Знакъ $\sqrt{}$ находимъ впервые у Христіана Рудольфа (1524).—Окончательно же эти знаки введены *Декартомъ*. — Знакъ $\sqrt{}$ есть ничто иное какъ искаженная буква *r* (начальная буква слова radix — корень).

Скобки. — Для обозначенія дѣйствій употребляютъ еще особыя знаки, называемые *скобками*. Имъ даютъ видъ: ( ), или [ ], или { }. Скобки перваго вида называютъ *простыми*, втораго — *квадратными*, третьяго — *фигурными*.

Такъ, для обозначенія, что разность $a - b$ нужно умножить на c, пишутъ:

$$(a - b) \,.\, c$$

Если это выраженіе написать безъ скобокъ, т. е. въ видѣ

$$a - b \,.\, c$$

то смыслъ его былъ бы иной, именно: оно выражало-бы требованіе — вычесть изъ a произведеніе b на c, между тѣмъ какъ требуется разность $a - b$ умножить на c.

Если бы требовалось сумму $a + b$ возвысить въ кубъ и результатъ умножить на разность $c - d$, то слѣдуетъ сказанныя дѣйствія обозначить такъ:

$$(a + b).^3(c - d).$$

Если опустить скобки, т. е. написать

$$a + b.^3c - d,$$

то смыслъ новаго выраженія не былъ бы согласенъ съ требованіемъ, потому что послѣднее выраженіе означало-бы слѣдующее требованіе: къ a придать произведеніе куба b на c и изъ полученной суммы вычесть d.

Скобокъ не ставятъ всякій разъ, когда и безъ нихъ обозначеніе дѣйствій не представляетъ недоразумѣній, или когда для обозначенія дѣйствій вводится особый знакъ, устраняющій необходимость скобокъ. Напр., еслибы требовалось выраженіе $a^2 + (a - b)c$ раздѣлить на $m^2 - n^2$, то обозначая дѣленіе знакомъ двоеточія, необходимо и дѣлимое и дѣлитель заключить въ скобки, написавъ:

$$[a^2 + (a - b)\, c]:(m^2 - n^2).$$

Но если вмѣсто двоеточія знакомъ дѣленія взять черту, проведя ее подъ всѣмъ дѣлимымъ, то она устранитъ необходимость заключенія дѣлимаго и дѣлителя въ скобки; частное изобразится въ такомъ случаѣ въ видѣ

$$\frac{a^2 + (a - b)\, c}{m^2 - n^2}.$$

Точно также для обозначенія, что изъ выраженія $a + b - c$ надо извлечь кубичный корень, слѣдуетъ данное выраженіе заключить въ скобки, написавши:

$$\sqrt[3]{}(a + b - c).$$

Но если протянемъ горизонтальную черту радикала надъ всѣмъ даннымъ выраженіемъ, то послѣдняя устранитъ необходимость заключенія выраженія $a + b - c$ въ скобки; дѣйствіе изобразится слѣд. обр.:

$$\sqrt[3]{a + b - c}.$$

Употребленіе скобокъ въ первый разъ встрѣчается въ сочиненіи Альберта Жирара: «Invention nouvelle dans l'algebre etc.», изданномъ въ Амстердамѣ въ 1629 г.

4. Классификація алгебраическихъ формулъ. — *Алгебраическимъ выраженіемъ* или *формулою* называютъ совокупность буквъ, чиселъ и знаковъ, указывающую рядъ дѣйствій надъ числами, которыя подразумѣваются подъ данными буквами. Такимъ образомъ:

$$\frac{s+d}{2},\qquad \frac{8a^2-4ab+3b^2}{a^3-b^3},\qquad \frac{18a^4(\sqrt[3]{b}+\sqrt{c})}{b^2(\sqrt{a}-\sqrt[3]{c})}$$

суть алгебраическія выраженія или формулы.

Всякое алгебраическое выраженіе, не содержащее радикаловъ, называется *раціональнымъ*; оно называется *ирраціональнымъ*, если содержитъ радикалы. Первыя два изъ вышеприведенныхъ выраженій раціональныя, третье — ирраціональное.

Раціональныя выраженія раздѣляются на *цѣлыя* и *дробныя*; цѣлымъ называютъ раціональное выраженіе, не содержащее буквенныхъ дѣлителей; дробнымъ, — выроженіе, содержащее буквенныхъ дѣлителей. Такъ, выраженія

$$4a^2b+7ab^2,\qquad \frac{3}{7}a^4b^2,\qquad 19a^4-\frac{2}{3}a^3b+\frac{5}{8}b^4$$

суть алгебраическія цѣлыя, хотя второе и третье и содержатъ числовыхъ дѣлителей; выраженія же

$$\frac{a+b}{a-b},\qquad \frac{8a^2-4ab+3b^2}{a^3-b^3}$$

алгебрически дробныя, такъ-какъ имѣютъ буквенныхъ дѣлителей.

Одночленомъ называютъ такое выраженіе, въ которомъ буквы не соединены знаками $+$ и $-$. Такъ, выраженія

$$7a^3b^2c,\qquad \frac{7a^3b^2}{4c^2},\qquad \frac{3a^4\sqrt[3]{b}}{c}$$

суть одночлены.

Многочленомъ наз. выраженіе, состоящее изъ нѣсколькихъ одночленовъ, отдѣленныхъ одинъ отъ другаго знаками $+$ или $-$.

Такъ, выраженія

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,\qquad \frac{3a^4\sqrt[3]{b}}{c}-\frac{7a^3b^2}{4c^2}+\frac{5a^4b^3c}{3}-1.$$

суть многочлены.

Одночлены, составляющіе многочленъ, называются его *членами*. Знакъ, предшествующій одночлену, считается составною частью члена; такъ члены перваго одночлена суть

$$+3a^3,\quad -3a^2b,\quad +3ab^2,\quad -b^3.$$

Если передъ первымъ членомъ не поставлено знака, то нужно подразумѣвать $+$.

Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, напр. a^2-b^2, наз. *биномомъ* или *двучленомъ*; состоящій изъ трехъ членовъ, какъ $a^2-2ab+b^2$ — *триномомъ* или *трехчленомъ*; если же число членовъ больше, то многочлену не даютъ особаго названія.

Измѣреніе. — Число буквенныхъ множителей цѣлаго одночлена называется его *измѣреніемъ*; такъ, одночленъ $4a^3b^2c$ будетъ *шести измѣреній*, потому-что, представивъ его въ видѣ 4 $aaabbc$, видимъ, что онъ содержитъ шесть буквенныхъ множителей. Сложивъ показателей, получимъ $3+2+1$ или 6; сл. для опредѣленія измѣреннія цѣлаго одночлена нужно взять сумму показателей его буквъ.

Цѣлый многочленъ, состоящій изъ членовъ одинаковаго измѣренія, называется *однороднымъ*; измѣреніе каждаго члена такого многочлена называется также измѣреніемъ самого многочлена. Напр. выраженіе $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ есть однородный многочленъ третьяго измѣренія или трехъ измѣреній. Многочленъ, котораго члены неодинаковаго измѣренія, наз. *разнороднымъ*; напр. многочленъ $a^4-3a^2+ab^3+c$ — разнородный.

Степенью многочлена относительно одной какой-либо буквы называется высшій показатель этой буквы въ многочленѣ. Такъ

$$8ax^3-2a^2x^2+7a^3x+a^4$$

есть многочленъ третьей степени относительно буквы x.

5. Числовая величина формулы. — Числовою величиною формулы называется то число, которое получится, если буквы замѣнимъ числами и выполнимъ указанныя знаками дѣйствія.

Такъ, если требуется вычислить числовую величину выраженія

$$\frac{2a^2+\sqrt{a^2+b^2}}{3c}$$

при $a=4$, $b=3$ и $c=1$, то, подставивъ вмѣсто буквъ данныя числа, найдемъ

$$\frac{2\times 4^2+\sqrt{4^2+3^2}}{3\times 1}=\frac{2\times 16+\sqrt{16+9}}{3}=\frac{32+\sqrt{25}}{3}=\frac{32+5}{2}=\frac{37}{3}=12\frac{1}{3}.$$

$12\frac{1}{3}$ и есть числовая величина данной формулы.

6. Задачи.

1. Пароходъ въ стоячей водѣ и въ тихую погоду проходитъ d сажень въ минуту; теченіе рѣки сообщаетъ ему скорость s сажень въ минуту, а вѣтеръ — скорость w саж. въ то же самое время. Какое разстояніе пройдетъ пароходъ въ минуту: a) по теченію рѣки и по вѣтру; b) по теченію рѣки, но противъ вѣтра; c) противъ теченія, но по вѣтру, и d) противъ теченія и противъ вѣтра?

Для числоваго приложенія взять: $d=491$; $s=71$; $w=100$.

2. Нѣкто начинаетъ играть, имѣя a руб. Онъ выигрываетъ b партій и въ каждую по c руб.; но затѣмъ проигрываетъ d партій, и въ каждую по f руб. Сколько онъ имѣлъ въ концѣ игры?

3. Найти прибыль, приносимую въ t дней капиталомъ c, отданнымъ по $p\%$ годовыхъ? Коммерческій годъ принимается въ 360 дней.

Для числоваго выраженія взять: $c=2348$ р.; $t=56$; $p=5\%$.

4. Два поѣзда вышли въ одно время изъ Москвы и Петербурга навстрѣчу другъ другу. Поѣздъ, идущій изъ Москвы, дѣлаетъ a верстъ въ часъ, а поѣздъ, идущій

изъ Петербурга, b верстъ. На какомъ разстоянiи отъ Петербурга оба поѣзда встрѣтятся, если между Москвою и Петербургомъ c верстъ?

Для численнаго приложенія взять: $a = 24$; $b = 36$; $c = 600$.

5. Нѣкто долженъ проѣхать путь въ a верстъ; отъѣхавъ b верстъ отъ начала пути, онъ окончилъ остальной путь, дѣлая каждый день по c верстъ. Во сколько дней окончилъ онъ остальной путь?

Для численнаго приложенія взять: $a = 1000$; $b = 150$; $c = 50$.

6. Смѣшано a фунтовъ табаку по b руб. за фунтъ съ c фунтами по d руб. за фунтъ. Почемъ нужно продавать фунтъ смѣси, чтобы на всемъ получить прибыли f рублей?

Для численнаго приложенія взять: $a = 10$; $b = 4, 5$; $c = 12$; $d = 3$; $f = 5$.

7. Купецъ имѣлъ a аршинъ сукна и продалъ его за b руб. Сколько онъ получилъ прибыли, если ему самому каждые c аршинъ стоили d рублей?

8. Написать общія формулы всякаго четнаго и всякаго не четнаго числа.

9. Написать число, состоящее изъ a сотенъ, b десятковъ и c единицъ.

10. Написать вычитаемое, если уменьшаемое есть a, а разность d.

11. Періодическія дроби $a,bbb....$ и $a,bcccc....$, гдѣ a, b и c цѣлыя однозначныя числа, обратить въ обыкновенныя.

12. Дѣлимое a, дѣлитель d, частное q, остатокъ r.

Выразить каждое изъ этихъ четырехъ чиселъ посредствомъ трехъ остальныхъ.

Упростить слѣдующія выраженія:

13. $aa + ab + ab + bb$.

14. $aaa + aab + aab + aab + abb + abb + abb + bbb$.

15. $a^3 + a^3 + a + \frac{ab}{5} + \frac{ab}{5} + \frac{ab}{5}$.

16. $\frac{mmmpp + mmmpp + mmmpp}{qq + qq + qq + qq}$.

Написать безъ коэффиціентовъ выраженія

17. $5abc$; $4ab + 3cd - 5pq$.

Написать безъ коэффиціентовъ и показателей:

18. $3a^2b$; $5b^3c^2$; $6a^3b^2c$; $3x^2y^2 + 2x^2$; $4m^2y - 3my^2$.

19. Найти числовыя величины степеней:

$$10^3;\ 2^5;\ 0{,}01^2;\ 0{,}03^2;\ \left(\frac{3}{7}\right)^3;\ 0{,}2^3;\ \left(\frac{1}{2}\right)^4;\ \left(\frac{3}{4}\right)^5;\ 10^{10}.$$

Найти числовыя величины корней:

20. $\sqrt{144}$; $\sqrt{\frac{9}{16}}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt[3]{0{,}125}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[3]{a^3}$; $\sqrt[5]{a^5}$; $\sqrt[n]{a^n}$.

21. Указать смыслъ выраженій:

$$a - b(c - d);\ (m^2 - n^2)(m^2 + n^2);\ a + 3b^3(c + d);\ 3a^5;\ (3a)^5;$$
$$a(b^2 + cd) - l^2(l - f);\ \sqrt{a^2 - b^2};\ a - 2b\sqrt{c - d};\ m - \{n - [p - (r + s)]\};$$
$$x - [(y + z) : t].$$

22. Написать:

Произведеніе разности чиселъ a и b на сумму ихъ квадратовъ.

Произведеніе куба суммы чиселъ a и b на разность ихъ квадратовъ.

Частное отъ раздѣленія разности кубовъ чиселъ p и q на квадратъ ихъ суммы.

Утроенный квадратъ разности чиселъ a и b.

Квадратъ утроенной разности квадратовъ чиселъ a и b.

Разность кубовъ суммъ $a+b$ и $c+d$.

Утроенный корень пятаго порядка изъ произведенія суммы чиселъ x и y на кубъ ихъ разности.

Кубичный корень изъ частнаго отъ раздѣленія разности кубовъ чиселъ p и q на квадратъ ихъ суммы.

23. Найти числовую величину слѣдующихъ выраженій при $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$ и $e=5$.

1) $\frac{b^2c^2}{4a}+\frac{de}{b^2}-\frac{32}{b^4}$.

2) $\frac{8a^2+3b^2}{a^2+b^2}+\frac{4c^2+6b^2}{c^2-b^2}-\frac{c^2+d^2}{c^2}$.

3) $\frac{28}{a^2+b^2+c^2}+\frac{12}{d^2-c^2-b^2}+\frac{4}{a^2+e^2-c^2-d^2}$.

4) $\frac{e^c+b^a}{c^b+b^c}$; 5) $\frac{b^c+d^c}{b^2+d^2-bd}$.

Найти числовую величину:

6) $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2-c^2+2bc}$ при $a=4$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$.

7) $a\sqrt{x^2-3a}+x\sqrt{x^2+3a}$ при $x=5$, $a=8$.

8) $\frac{a^2}{b^2}-\sqrt{\frac{1+a}{1-b}+\frac{1+a}{1-b}}$ при $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{5}$.

9) $(b-x)(\sqrt{a}+b)+\sqrt{(a-b)(x+y)}$ и

$(a-y)[\sqrt{2bx}+x^2]+\sqrt{(a-x)(b+y)}$ при $a=16$, $b=10$, $x=5$, $y=1$.

10) $\sqrt[3]{(a+b)^2 . y}+\sqrt[3]{(a+x)(y-2a)}+\sqrt[3]{(y-b)^2 . a}$ при $a=2$, $b=3$, $x=6$ и $y=5$.

ГЛАВА II.

Положительныя и отрицательныя количества.

7. Изображеніе количествъ буквами вмѣсто цифръ не составляетъ еще существеннаго отличія алгебры отъ ариѳметики: и ариѳметика, при доказательствѣ теоремъ и при рѣшеніи задачъ, также пользуется для изображенія чиселъ буквами, хотя въ ней употребленіе буквъ и не такъ систематично какъ въ алгебрѣ. Существенная разница между этими науками состоитъ въ томъ, что въ разсмотрѣніе величинъ алгебра вводитъ *идею о направленіи*, совершенно чуждую ариѳметикѣ.

Все, что можетъ увеличиваться или уменьшаться и быть измѣряемо, называется *математическою величиною.* Такъ — вѣсъ, объемъ, время, температура, скорость, сила и т. п. суть величины.

Измѣрить величину значитъ сравнить ее съ другою однородною съ нею величиною, называемою при этомъ *единицею мѣры*; точнѣе говоря, это значитъ — найти кратное отношеніе измѣряемой величины къ единицѣ мѣры. Такъ, измѣряя вѣсъ тѣла, мы узнаемъ, *сколько разъ въ немъ* содержится единица вѣса (пудъ, фунтъ и т. п.) или какая нибудь доля ея. Поэтому результатомъ измѣренія всегда является *число отвлеченное.* Цѣлое или дробное отвлеченное число, измѣряющее данную величину, называется *абсолютнымъ числомъ*; вмѣстѣ съ названіемъ единицы мѣры оно даетъ намъ точное понятіе о разсматриваемой величинѣ.

Есть величины, для полнаго опредѣленія которыхъ достаточно знать ихъ отношеніе къ единицѣ мѣры и значеніе самой единицы; таковы — площадь, объемъ, вѣсъ, капиталъ и т. п. Ихъ называютъ абсолютными величинами. Часть математики, изучающая свойства абсолютныхъ чиселъ и дѣйствія надъ ними, называется *ариѳметикою.*

Но есть такія величины, для полнаго опредѣленія которыхъ недостаточно знать ихъ отношеніе къ единицѣ мѣры и значеніе самой единицы. Такъ, если мы скажемъ, что точка A, находившаяся въ началѣ въ нѣкоторомъ мѣстѣ на прямой MN, удалилась изъ своего прежняго положенія на 3 дюйма, то этимъ новое положеніе точки еще не будетъ вполнѣ опредѣлено; надо еще указать — въ какую сторону относительно своего первоначальнаго положенія удалилась точка, — вправо или влѣво. Еще примѣръ. Если мы скажемъ, что часы измѣнили свой ходъ въ теченіи сутокъ на 2 минуты, то этимъ мы не даемъ вполнѣ яснаго понятія о величинѣ измѣненія; въ самомъ дѣлѣ, мы должны указать еще направленіе измѣненія, т. е. сказать, что часы ускорили или замедлили свой ходъ на 2 минуты. Третій примѣръ. Если мы скажемъ, что температура воздуха измѣнилась на 10 градусовъ, то этимъ мы не опредѣлимъ еще вполнѣ это измѣненіе; для полнаго опредѣленія измѣненія температуры надо указать — повысилась она на 10 градусовъ или понизилась, т. е. опять надо указать направленіе измѣненія.

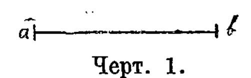
Большинство величинъ, существующихъ въ природѣ, имѣютъ два противоположныя направленія, и потому называются *противоположными величинами*; таковы — *время*, которое можно считать въ направленіи будущаго и прошедшаго относительно даннаго момента; *пространство*, проходимое прямолинейно движущимся тѣломъ; *ускореніе* и *замедленіе* движенія; *температура*, потому что она можетъ быть выше нуля и ниже нуля; *прибыль* и *убытокъ*, ибо они измѣняютъ капиталъ въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ; наконецъ *линіи*, наносимыя на неограниченной прямой отъ нѣкоторой постоянной точки, называемой началомъ.

Такого рода величины, взятыя въ одномъ направленіи, называются *положительными*, а въ противоположномъ — *отрицательными.* Отъ насъ зависитъ, въ какомъ направленіи считать противоположныя величины положительными, и въ какомъ — отрицательными; но, во избѣжаніе недоразумѣній на этотъ счетъ, условились считать положительными: 1) разстояніе вправо отъ

начала, 2) время будущее, 3) ускореніе, 4) прибыль, 5) капиталъ, 6) температуру высшую нуля. Противоположныя этимъ величины, т. е. разстояніе влѣво отъ начала, время прошедшее, замедленіе, убытокъ, долгъ, температуру ниже нуля — будемъ принимать отрицательными.

Существуютъ два способа изображенія противоположныхъ величинъ — *графическій* и *алгебраическій*.

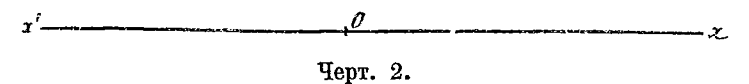
1. Условимся каждую единицу разсматриваемой величины изображать прямой линіей опредѣленной длины, нпр. линіей ab (черт. 1); отложивъ линію ab



Черт. 1.

на неограниченной прямой столько разъ, сколько въ разсматриваемой величинѣ находится единицъ, мы и получимъ графическое изображеніе абсолютнаго значенія этой величины.

Для изображенія противоположныхъ величинъ, какого бы рода они не были, условимся представлять ихъ прямыми, наносимыми на неограниченной



Черт. 2.

прямой (называемой *осью*) xx', начиная отъ нѣкоторой точки 0 (ее называютъ *началомъ*); причемъ положительныя величины будемъ наносить по направленію $0x$, а отрицательныя по $0x'$, ибо линіи $0x$ и $0x'$ сами суть величины противоположныя (черт. 2).

И такъ, абсолютныя значенія противоположныхъ величинъ можно представлять *длинами* извѣстныхъ линій, а направленія — *положеніемъ* этихъ линій относительно начала.

При такомъ представленіи противоположныхъ величинъ каждая изъ нихъ имѣетъ опредѣленное *начало* и *конецъ*.

Примѣчаніе. Графическимъ представленіемъ противоположныхъ величинъ пользуются при доказательствахъ тамъ, гдѣ чисто-алгебраическіе методы трудно примѣнимы. Къ преимуществамъ графическихъ методовъ принадлежитъ ихъ наглядность, позволяющая легко усвоять истины весьма отвлеченнаго характера. Ниже мы воспользуемся этимъ методомъ при доказательствѣ теоремъ, относящихся къ свойствамъ суммы.

2. Другой способъ изображенія противоположныхъ величинъ состоитъ въ слѣдующемъ. Абсолютное значеніе величины изображается или цифрою или буквою, направленіе же знаками: $+$ и $-$, причемъ положительныя величины означаютъ знакомъ $+$, а отрицательныя знакомъ $-$. Такимъ образомъ, вмѣсто того чтобы говорить: «пять футовъ вправо», говорятъ: «плюсъ пять футовъ», (письменно: $+5$ фут.); вмѣсто: «семь лѣтъ тому назадъ» говорятъ: «минусъ семь лѣтъ» (письменно: -7 лѣтъ), и т. п.

Здѣсь самъ собою возникаетъ вопросъ: почему для обозначенія направленія величинъ взяты знаки: $+$ и $-$, т. е. знаки дѣйствій сложенія и вычитанія? Въ отвѣтъ на это замѣтимъ, что положительныя величины одного рода слѣдуетъ разсматривать какъ слагаемыя между собою; дѣйствительно, имѣя какую

нибудь прибыль, мы всякую новую прибыль будемъ прикладывать къ прежней, такъ какъ она служитъ къ увеличенію уже имѣющейся прибыли; если точка, находящаяся на прямой, перемѣщена вправо, то всякое новое перемѣщеніе вправо будетъ прикладываться къ прежнему, и т. д. Потому-то положительныя величины, какъ слагаемыя между собою, и сопровождаются знакомъ плюсъ. Отрицательныя величины одного рода, по отношенію къ положительнымъ, слѣдуетъ разсматривать какъ вычитаемыя. Дѣйствительно, имѣя капиталъ, мы всякій долгъ будемъ изъ него вычитать, такъ какъ долгъ служитъ къ уменьшенію капитала. Всякій проигрышъ, служа къ уменьшенію капитала, должно разсматривать какъ вычитаемое. Всякое перемѣщеніе точки влѣво, служа къ уменьшенію существующаго перемѣщенія вправо, есть вычитаемое, и т. д. Потому-то отрицательныя величины, какъ вычитаемыя по отношенію къ положительнымъ, и сопровождаютъ знакомъ минусъ.

8. Мы обобщили понятіе объ ариѳметическомъ количествѣ, введя въ это понятіе новый элементъ — *направленіе*, причемъ самое обобщеніе вывели изъ разсматриванія величинъ. Но къ тому же обобщенію можно придти еще другимъ путемъ—изъ разсмотрѣнія дѣйствій надъ числами.

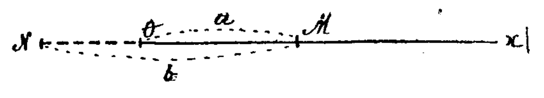
Пусть изъ нѣкотораго числа a требуется вычесть b: разность выразится формулою $a-b$. Здѣсь слѣдуетъ разсмотрѣть три случая:

1) Когда a больше b, то-есть уменьшаемое больше вычитаемаго, то вычитаніе такое всегда возможно. Такъ, если $a=10$ и $b=4$, то численная величина разности $a-b$ равна 6.

2) Если $a=b$, т, е. вычитаемое равно уменьшаемому, то вычитаніе снова возможно, потому-что отъ a всегда можно отнять столько единицъ, сколько ихъ въ немъ находится; но остатокъ вычитанія уже не представляетъ никакого числа: онъ есть нуль, выражающій отсутствіе всякой величины. Однако, уже и въ ариѳметикѣ принято и нуль называть числомъ.

3) Когда $a<b$, т. е. вычитаемое больше уменьшаемаго, то вычитаніе *не всегда возможно*; разсмотримъ, когда оно возможно и когда нѣтъ.

Разсмотримъ сначала величину ариѳметическую, т. е. такую, для которой не существуетъ противоположной. Различныя состоянія такой величины можно представлять графически разстояніями точекъ прямой, неограниченно простирающейся *только въ одну сторону* отъ своей начальной точки, напр. отъ точки 0 вправо (по направленію $0x$).



Черт. 3.

Вычитаніе b изъ a выразится графически нанесеніемъ линіи a вправо отъ точки 0 — въ направленіи возрастающихъ разстояній, а вычитаемой линіи b отъ конца M линіи $OM=a$ въ направленіи, противоположномъ направленію возрастающихъ разстояній т. е. влѣво отъ M (черт. 3). Самое построеніе показываетъ, что вычитаніе возможно до тѣхъ поръ, пока $b=$ или $<a$. Если же b больше a, то построеніе укажетъ *невозможность дѣйствія*, потому-что конецъ N линіи $MN=b$ упадетъ въ этомъ случаѣ влѣво отъ точки 0, такъ

сказать въ пустоту, ибо линія Ox, простираясь только вправо отъ 0, не имѣетъ точекъ влѣво отъ 0.

Пусть $a = 5$, $b = 7$; тогда

$$a - b = 5 - 7;$$

разность $5 - 7$ можно выразить однимъ числомъ; въ самомъ дѣлѣ — вычесть 7 изъ 5 все равно что сперва вычесть 5, а затѣмъ 2, слѣд.

$$5 - 7 = 5 - 5 - 2;$$

но $5 - 5 = 0$, слѣд. $5 - 7 = 0 - 2$; опуская 0, получимъ въ остаткѣ -2. Разность выражается отрицательнымъ числомъ -2; но это отрицательное число въ данномъ случаѣ ничего не представляетъ, не имѣетъ никакого реальнаго значенія.

Но если разсматриваемая прямая простирается не только вправо, но и влѣво отъ точки 0, представляя такимъ образомъ величины, имѣющія два противоположныя направленія, то дѣйствіе вычитанія большаго числа изъ меньшаго, бывшее въ первомъ случаѣ невозможнымъ, теперь становится возможнымъ, ибо линія $x'x$ имѣетъ точки влѣво отъ 0, и разность $a - b = -2$ имѣетъ

Черт. 4.

совершенно реальное значеніе, представляя линію ON, лежащую влѣво отъ начала 0.

Итакъ, при вычитаніи большаго числа изъ меньшаго получается *отрицательное число*; оно не имѣетъ никакого реальнаго значенія въ случаѣ абсолютныхъ величинъ, и напротивъ имѣетъ совершенно реальное значеніе въ случаѣ величинъ противоположныхъ.

Самое правило вычитанія большаго числа изъ меньшаго легко видѣть изъ приведеннаго примѣра

$$5 - 7 = -2,$$

именно: нужно изъ большаго числа вычесть меньшее и передъ остаткомъ поставить знакъ $(-)$.

Въ противоположность отрицательнымъ числамъ, числа, получаемыя при всегда возможномъ вычитаніи меньшаго числа изъ большаго, называется положительными и обозначаются знакомъ $+$.

Такъ, если $a = 5$, $c = 3$, то

$$a - c = 5 - 3 = +2.$$

Легко видѣть на чертежѣ, что значеніе положительнаго числа противоположно значенію отрицательнаго: въ то время какъ отрицательное число $a - b = -2$ означаетъ линію ON, лежащую *влѣво* отъ точки 0, положительное число $a - c = +2$, выражаетъ линію OP, лежащую *вправо* отъ начала.

9. Алгебраическое количество. — Количество, состоящее изъ двухъ элементовъ: 1) изъ численной величины, которая можетъ быть цѣлая или дробная,

и 2) знака (+) или (—), указывающаго направленіе величины, и называется собственно *алгебраическимъ количествомъ*. Такъ

$$+5,\quad -6,\quad +\frac{2}{3},\quad -\frac{5}{4},\quad +a,\quad -a,\quad +3a^2,\quad -5a^2$$

суть количества алгебраическія.

Если въ количествѣ отбросить знакъ, то получится ариѳметическое число, которое называется *абсолютной величиной* или *числовымъ значеніемъ* количества. Такъ, количества $+8$ и $-\frac{1}{2}$ имѣютъ абсолютными величинами 8 и $\frac{1}{2}$.

10. Выгоды, происходящія отъ введенія отрицательныхъ количествъ. — Введеніе отрицательныхъ количествъ въ алгебру имѣетъ чрезвычайно большое значеніе, такъ какъ оно даетъ математическимъ выводамъ ту общность, которая безъ отрицательныхъ величинъ была бы недостижима. Пояснимъ это примѣрами.

Примѣръ I. *Купленъ товаръ за* a *руб., а проданъ за* b *руб.; Какое измѣненіе произошло отъ этого оборота въ капиталѣ?*

Для опредѣленія измѣненія капитала вычтемъ изъ b руб. a руб.; найдемъ

$$b-a.$$

Здѣсь могутъ быть три случая.

1) Если $b>a$, то разность $b-a$ будетъ *положительная* и выразитъ собою *прибыль*, полученную при продажѣ товара, потому что цѣна (b), за которую проданъ товаръ, больше цѣны (a), за которую онъ купленъ.

2) Если $b=a$, то разность $b-a$ равна 0, и означаетъ, что при продажѣ не получено ни прибыли, ни убытка, что очевидно.

3) Если $b<a$, то разность $b-a$ будетъ *отрицательная* и выразитъ *убытокъ*, полученный при продажѣ товара, потому-что цѣна (b), которую купецъ беретъ, продавая товаръ, меньше цѣны (a), которую онъ самъ заплатилъ за товаръ.

И такъ, всѣ частные случаи, которые могутъ встрѣтиться при рѣшеніи данной задачи, можно соединить въ одной формулѣ: $b-a$, которая и выражаетъ собою измѣненіе капитала во всѣхъ случаяхъ, причемъ положительный результатъ означаетъ прибыль, а отрицательный — убытокъ. Правда, мы могли бы избѣжать полученія отрицательныхъ выводовъ, еслибы при $b<a$ стали дѣлать вычисленіе по формулѣ $a-b$; но такое дробленіе задачи и формулы на нѣсколько отдѣльныхъ задачъ и формулъ соотвѣтственно частнымъ значеніямъ буквъ не соотвѣтствовало-бы духу алгебры, стремящейся обобщать какъ самые вопросы, такъ и ихъ рѣшенія.

Примѣръ II. *Нѣкоторое событіе случилось спустя* t *лѣтъ послѣ Р. Х., а другое событіе* n *годами раньше. Когда имѣло мѣсто второе событіе?*

Время втораго событія найдемъ, вычтя n изъ t; слѣд. оно выразится формулою

$$t-n.$$

Здѣсь опять возможны три случая:

1) Если $t > n$, разность $t - n$ положительная; напр., если первое событіе имѣло мѣсто спустя 600 лѣтъ послѣ Р. Х., а второе 400 годами раньше, то подставивъ въ формулу $t - n$ вмѣсто t число 600 и 400 вмѣсто n, найдемъ

$$t - n = 600 - 400 = +200.$$

Очевидно, этотъ положительный результатъ означаетъ, что второе событіе имѣло мѣсто черезъ 200 лѣтъ *послѣ* Р. Х.

2) Если $t = n$, то разность $t - n = 0$. Нулевое рѣшеніе, очевидно, означаетъ, что второе событіе совершилось въ самое Р. Х.

3) Если, наконецъ, $t < n$, то разность $t - n$ будетъ отрицательная. Если положимъ, что первое событіе совершилось спустя 600 лѣтъ послѣ Р. Х., а второе за 800 лѣтъ до перваго, то подставляя въ формулу $t - n$ эти числа, найдемъ

$$t - n = 600 - 800 = -200 \text{ л.}$$

Ясно, что отрицательный результатъ означаетъ, что второе событіе совершилось за 200 л. *до* Р. Х.

И такъ, замѣтивъ, что положительный результатъ означаетъ время послѣ Р. Х., а отрицательный — время до Р. Х., мы въ формулѣ $t - n$ имѣемъ рѣшеніе всѣхъ частныхъ случаевъ данной задачи. И здѣсь мы могли бы избѣжать отрицательнаго вывода, если бы вторую задачу рѣшили по иной формулѣ: $n - t$; но такое дробленіе задачи и формулы не соотвѣтствовало бы духу общности, составляющей отличительный характеръ алгебры.

И такъ, введеніе отрицательныхъ количествъ даетъ возможность какъ самые вопросы давать въ совершенно общей формѣ, такъ и рѣшеніе всѣхъ частныхъ случаевъ выводить изъ одной общей формулы.

11. Свойства положительныхъ и отрицательныхъ количествъ. — Если имѣемъ нѣсколько примѣровъ вычитанія, въ которыхъ уменьшаемыя равны, то остатки будутъ тѣмъ меньше, чѣмъ больше вычитаемыя. Такъ, вычитая изъ 5 послѣдовательно 1, 2, 3, ... , получимъ остатки

$$\begin{aligned} 5 - 1 &= +4 \\ 5 - 2 &= +3 \\ 5 - 3 &= +2 \\ 5 - 4 &= +1 \\ 5 - 5 &= 0 \\ 5 - 6 &= -1 \\ 5 - 7 &= -2 \\ 5 - 8 &= -3 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

величина которыхъ становится все меньше и меньше. Сравнивая между собою остатки, находимъ такимъ образомъ, что

$$+4 > +3 > +2 > +1 > 0 > -1 > -2 > -3 \text{ и т. д.}$$

Отсюда слѣдуетъ что:

1) Всякое положительное количество больше нуля;

2) Всякое отрицательное количество меньше нуля;

3) 0 составляетъ границу, отдѣляющую положительныя количества отъ отрицательныхъ;

4) Изъ двухъ отрицательныхъ количествъ то больше, котораго абсолютная величина меньше.

Въ поясненіе выводовъ — втораго и четвертаго приведемъ слѣдующіе примѣры. Пусть изъ двухъ лицъ A и B первое ничего не имѣетъ (ни имущества ни долга), а второе, не имѣя никакого имущества, имѣетъ долгъ въ 50 руб. Долгъ и имущество величины противоположныя, причемъ, согласно съ вышеприведеннымъ условіемъ, долгъ есть величина отрицательная, а имущество — положительная. Такимъ образомъ, состояніе A равно 0, состояніе B равно — 50 р. Лицо, имѣющее только долгъ, имѣетъ менѣе лица, ничего не имѣющаго, поэтому мы вправѣ сказать, что отрицательное имущество B (— 50 р.) меньше нулеваго имущества A. Въ этомъ мы имѣемъ новое подтвержденіе вывода: *отрицательное количество меньше нуля.* Положимъ теперь, что A и B не имѣютъ никакого имущества, но A имѣетъ долгу 30 р., а B — 80 р.; состояніе перваго выразится отрицательнымъ числомъ — 30 р., втораго отриц. числомъ — 80 р. Очевидно, что лицо, имѣющее долгу 30 р., богаче лица, долгъ котораго равенъ 80 р., слѣд. — 30 р. $>$ — 80 р. Въ этомъ — новое подтвержденіе вывода: *изъ двухъ отрицательныхъ количествъ то больше, котораго численная величина меньше.*

ГЛАВА III.

Цѣль алгебраическихъ дѣйствій. — Законъ Ганкеля. — Свойства суммы и разности. — Свойства полинома. — Сложеніе и вычитаніе.

12. — Цѣль ариѳметическихъ дѣйствій состоитъ въ нахожденіи окончательнаго результата. Иное дѣло въ алгебрѣ. Количества, выраженныя буквами, не могутъ сливаться, поэтому никакое алгебраическое дѣйствіе не можетъ быть доведено до конца. Такимъ образомъ, алгебраическія дѣйствія имѣютъ цѣлью: *указать знаками производимыя дѣйствія* и *преобразовать полученный результатъ, съ тѣмъ чтобы сдѣлать выраженіе его болѣе короткимъ или болѣе яснымъ* Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что далѣе идти нельзя. Приэтомъ, такъ какъ алгебраическое количество состоитъ изъ двухъ элементовъ — абсолютной величины и знака, то и правило каждаго алгебраическаго дѣйствія должно состоять изъ двухъ частей: правила абсолютныхъ величинъ и правила знаковъ.

13. — Приступая къ какому-либо дѣйствію, надо прежде всего опредѣлить смыслъ его. Приэтомъ, уже въ ариѳметикѣ мы видѣли, что обобщеніе понятія о числѣ ведетъ къ *обобщенію опредѣленій* самыхъ дѣйствій, въ тѣхъ видахъ чтобы избѣжать накопленія частыхъ случаевъ и всѣ эти случаи соединить въ одно общее выраженіе. Такъ, опредѣленіе дѣйствія умноженія расширяется при переходѣ отъ цѣлыхъ чиселъ къ дробнымъ. При этихъ послѣдовательныхъ обобщеніяхъ могутъ иногда утратиться тѣ или другія свойства дѣйствій. Такъ, мы увидимъ далѣе, что извлеченіе корня, — дѣйствіе, въ ариѳметическомъ смыслѣ дающее одинъ результатъ, въ алгебраическомъ смыслѣ приводитъ къ нѣсколькимъ

различнымъ результатамъ; въ данномъ случаѣ, слѣдовательно, обобщенное дѣйствіе теряетъ свойство давать *одинъ* результатъ.

Но если, въ видахъ обобщенія, и можно откинуть то или другое свойство операціи, необходимо условиться не прибавлять никакихъ новыхъ свойствъ къ тѣмъ, которыя имѣли мѣсто для дѣйствій надъ количествами менѣе общими, и это въ тѣхъ видахъ, чтобы всякое правило, установленное для обобщеннаго дѣйствія, было приложимо и къ менѣе общему случаю, содержа въ себѣ, какъ частный случай, правило, найденное ранѣе для дѣйствія, разсматриваемаго въ болѣе узкомъ смыслѣ, совершенно такъ-же, какъ менѣе общій видъ количествъ содержится какъ частный случай въ количествахъ обобщенныхъ.

Это начало, которое слѣдуетъ соблюдать при обобщеніи опредѣленій количествъ и дѣйствій надъ ними, названо Ганкелемъ *началомъ постоянства правилъ вычисленія*. Въ силу этого начала, всякое правило, относящееся къ количествамъ обобщеннымъ, должно прилагаться и къ количествамъ низшаго порядка, такъ какъ обобщеніе не вводитъ новыхъ свойствъ, а стало быть и не даетъ мѣста такимъ правиламъ, которыя не вытекали бы уже изъ свойствъ ранѣе принятыхъ.

14. — Установленіе правилъ вычисленія зависитъ единственно отъ свойствъ дѣйствій; отсюда необходимость предварительнаго изученія этихъ свойствъ. Ознакомимся прежде всего съ фундаментальными свойствами суммы и разности.

При выводѣ этихъ свойствъ мы для краткости будемъ означать противоположныя величины — каждую одною буквою; такимъ образомъ подъ буквами: a, b, c, d,..... будемъ представлять противоположныя величины, т. е. абсолютныя величины съ сопровождающими ихъ знаками.

Свойства суммы.

15. Понятіе о *сложеніи* есть основное, а потому и не поддается никакимъ опредѣленіямъ.

Мы видѣли, что каковы бы ни были противоположныя величины (скорости, времена, температуры), ихъ всегда можно представлять прямыми линіями, наносимыми на неограниченной прямой въ томъ или другомъ направленіи. Поэтому, если мы желаемъ сложить нѣсколька величинъ, то должны помѣстить ихъ одну за другой, каждую въ направленіи, опредѣляемомъ ея знакомъ; т. е. начало второй помѣстить въ концѣ первой, нанося ее въ направленіи, указываемомъ ея знакомъ, и т. д. Суммою будетъ разстояніе отъ начала первой до конца послѣдней. Это геометрическое представленіе сложенія полезно какъ облегчающее средство при доказательствѣ нѣкоторыхъ изъ нижеслѣдующихъ теоремъ.

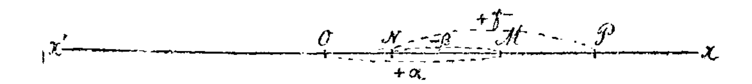
Теорема I. — *Придать къ данному количеству послѣдовательно нѣсколько другихъ — все равно что придать ихъ сумму; т. е.*

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Этою теремою выражается такъ называемый *законъ сочетательный* въ сложеніи.

Доказательство. — Пусть напр. $a=+\alpha$, $b=-\beta$, $c=+\gamma$, гдѣ α, β и γ суть абсолютныя величины. На линіи X'X отъ точки O нанесемъ снача-

ла a: придемъ въ нѣкоторую точку M. Затѣмъ наносимъ — β, сообразно съ знакомъ этого количества, влѣво отъ точки M: придемъ въ точку N. Наконецъ



Черт. 5.

отъ точки N вправо наносимъ отрѣзокъ γ: приходимъ въ точку P. Сумма $a + b + c$ выразится линіей OP отъ начала перваго слагаемаго до конца третьяго.

Но $b + c$ составляетъ въ тоже время сумму MP, ибо M есть начало слагаемаго b, а P — конецъ слагаемаго c; сл. представляя линію OP суммою OM + MP, и замѣчая, что $OM = a$, а $MP = b + c$, имѣемъ:

$$OP = a + (b + c) \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

А раньше мы нашли, что

$$OP = a + b + c \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Изъ (1) и (2) заключаемъ, что

$$a + b + c = a + (b + c),$$

такъ какъ оба эти выраженія представляютъ одну и туже линію OP.

Теорема II. — *Сумма не измѣнится отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.*

Этою теоремою выражется *законъ перемѣстительный въ сложеніи.*

Доказательство. I. Докажемъ эту теорему сначала для двухъ слагаемыхъ, т. е. что

$$a + b = b + a$$

Доказательство это, въ свою очередь, распадается на нѣсколько случаевъ, смотря по знакамъ количествъ a и b.

1) Пусть a и b — положительныя количества. Наносимъ a по линіи OX, начиная отъ точки O: придемъ въ точку M. Затѣмъ, отъ точки M въ томъ же

Черт. 6.

направленіи наносимъ b, и такимъ образомъ приходимъ въ точку P. Сумма равна линіи OP отъ начала перваго слагаемаго до конца втораго:

$$a + b = OP. \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Если теперь на линіи OP отложимъ часть $OQ = b$, то остальная ея часть QP будетъ равна a; слѣдов. линію OP можно разсматривать также какъ сумму линій b и a:

$$b + a = OP. \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Изъ (1) и (2) слѣдуетъ, что

$$a + b = b + a.$$

2) Составимъ сумму $a+b$, полагая, что a положительно и равно $+\alpha$, а b отрицательно и равно $-\beta$; положимъ сверхъ того, что $\alpha > \beta$.

Нанесемъ a на линію OX: придемъ въ точку M; отъ точки M наносимъ линію b, сообразно съ ея знакомъ, влѣво отъ точки M: придемъ въ точку P. Сумма $a+b$ выразится линіей OP отъ начала перваго до конца втораго слагаемаго:

$$a+b=OP \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Черт. 7.

Нанесемъ теперь b, сообразно съ знакомъ этой линіи, влѣво отъ O: придемъ въ точку Q; очевидно, что линія $QP=OM$ (ибо каждая состоитъ изъ b, сложеннаго съ OP); а потому, нанося a отъ точки Q вправо, придемъ въ точку P, и сумма $b+a$ выразится линіей OP отъ начала слагаемаго b до конца a:

$$b+a=OP \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Изъ равенствъ (3) и (4) находимъ опять, что

$$a+b=b+a,$$

ибо та и другая сумма выражаютъ одну и туже линію OP.

Пусть $\alpha < \beta$. Нанеся a на линію OX вправо отъ начала, придемъ въ точ-

Черт. 8.

ку M; отъ точки M наносимъ b въ направленіи OX^1; такъ какъ $\beta > \alpha$, то придемъ въ нѣкоторую точку P, лежащую влѣво отъ O. Сумма $a+b$ выразится линіей OP, отъ начала перваго до конца втораго слагаемаго:

$$a+b=OP \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Отложимъ отъ точки O влѣво линію $OQ=MP=b$; очевидно, что QP будетъ равна OM или a. Слѣд. линія OP будетъ выражать сумму линій: $OQ=-\beta$ и $QP=+\alpha$, т. е.

$$b+a=OP \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Изъ равенствъ (5) и (6) заключаемъ:

$$a+b=b+a.$$

3) Если бы количества a и b были оба отрицательны, то доказательство было бы тоже самое, что и въ случаѣ 1), только обѣ линіи пришлось бы откладывать влѣво отъ начала.

Итакъ, теорема доказана для двухъ слагаемыхъ.

II. Докажемъ теперь, что если имѣемъ сумму трехъ слагаемыхъ, то можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы I имѣемъ:

$$a+b+c=a+(b+c);$$

измѣнивъ въ скобкахъ порядокъ слагаемыхъ, отъ чего, по теоремѣ II для двухъ слагаемыхъ, сумма ихъ не измѣнится, находимъ

$$a+b+c=a+(c+b);$$

отсюда, замѣняя, на основаніи теоремы I, выраженіе $a+(c+b)$ равнымъ ему $a+c+b$, получаемъ

$$a+b+c=a+c+b.$$

III. Въ суммѣ, состоящей изъ сколькихъ угодно слагаемыхъ, можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ. Въ самомъ дѣлѣ, такую сумму можно разсматривать какъ состоящую изъ трехъ слагаемыхъ.

IV. Во всякой суммѣ можно перемѣнить мѣста двухъ послѣдовательныхъ слагаемыхъ, гдѣ бы они ни находились.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи пункта III имѣемъ

$$a+b+c+d=a+b+d+c;$$

прибавляя къ равнымъ величинамъ по-ровну (по e), получимъ равныя, слѣд.

$$a+b+c+d+e=a+b+d+c+e;$$

отсюда такимъ же образомъ

$$a+b+c+d+e+f=a+b+d+c+e+f, \text{ и т. д.}$$

V. Можно измѣнить какъ угодно мѣста слагаемыхъ въ суммѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, перемѣщая два послѣдовательныхъ члена одинъ на мѣсто другаго, можно всякое слагаемое помѣстить на какомъ угодно мѣстѣ.

Теорема. III. *Нѣсколько слагаемыхъ можно замѣнить ихъ суммою* (вычисливъ ее), *и наоборотъ — одно слагаемое можно замѣнить нѣсколькими, которыхъ сумму оно представляетъ.*

Доказательство. — I. Помѣстимъ въ началѣ всѣ слагаемыя, которыя мы хотимъ суммировать; вычислимъ ихъ сумму, сообразно съ ихъ знаками; наконецъ, полученный результатъ помѣстимъ тамъ, гдѣ хотимъ. Эти преобразованія, законность которыхъ выше доказана, доказываютъ первую часть теоремы.

II. Помѣстимъ на первомъ мѣстѣ слагаемое, которое желаемъ разложить; разложимъ его на части, сумму которыхъ оно составляетъ; наконецъ, размѣстимъ какъ угодно эти части въ данной суммѣ. Всѣ эти преобразованія, которыя по вышедоказанному всегда можно сдѣлать, служатъ доказательствомъ второй части теоремы.

Свойства разности.

16. Опредѣленіе вычитанія. — *Вычитаніе есть дѣйствіе обратное сложенію. Вычесть изъ первой величины вторую значитъ найти такую третью величину, которая будучи сложена со второю, давала бы первую.* Итакъ, вычитаніе служитъ для рѣшенія слѣдующей задачи: «по данной суммѣ a двухъ количествъ и одному изъ нихъ b найти другое».

Дѣйствіе вычитанія и результатъ его, называемый *остаткомъ* или *разностью*, обозначается слѣдующимъ образомъ:

$$a - b.$$

Назвавъ остатокъ буквою δ, по опредѣленію вычитанія имѣемъ

$$a = b + \delta.$$

Теорема I. — *Вычитаніе какой угодно величины всегда можно замѣнить приданіемъ величины ей противоположной* (т. е. противоположнаго знака).

Доказательство. Замѣтимъ сначала, что сумма двухъ количествъ a и a*) одинаковой абсолютной величины, но противоположныхъ знаковъ равна нулю; т. е.

$$a + \mathrm{a} = o$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть наприм. a есть количество положительное и выражается отрѣзкомъ OM; придать a значитъ отъ точки M влѣво отложить линію MO: придемъ въ точку O. Такимъ обр. сумма, т. е. разстояніе отъ начала перваго до конца втораго слагаемаго равно 0. (См. черт. 3).

Состояніе лица, имѣющаго 5 р. капитала и 5 р. долга, очевидно, равно нулю, сл. $+5p. + (-5p) = 0$; и т. п.

Пусть теперь изъ a нужно вычесть b. По опредѣленію вычитанія, это значитъ: найти такое третье количество, которое, будучи сложено съ b давало-бы a. Такимъ свойствомъ обладаетъ количество $a + b$; въ самомъ дѣлѣ:

$$a + b + \mathrm{b} = a + \{b + \mathrm{b}\}$$

по теоремѣ I свойствъ суммы. Но, въ силу только — что сдѣланнаго замѣчанія, количество въ скобкахъ равно нулю; слѣд.

$$a - \mathrm{b} = a + b,$$

что и требовалось доказать.

Теорема II. — *Чтобы вычесть сумму, нужно вычесть послѣдовательно всѣ ея члены.*

Доказательство. — Въ самомъ дѣлѣ, пусть нужно вычислить выраженіе

$$N - (a + b + c + d);$$

назвавъ разность буквою δ, мы, по опредѣленію вычитанія, имѣемъ равенство

$$N = \delta + (a + b + c + d),$$

или, по теоремѣ I свойствъ суммы,

$$N = \delta + a + b + c + d,$$

а перемѣнивъ мѣста слагаемыхъ:

$$N = a + \delta + d + c + b,$$

---

*) Въ этой теоремѣ и въ теоремѣ IV мы обозначаемъ равныя, но противоположныя количества одинаковыми литерами разныхъ начертаній.

или, по той же теоремѣ:

$$N = a + (\delta + d + c + b).$$

Здѣсь N есть сумма, $\delta + d + c + b$ — одно слагаемое, a — другое; по опредѣленію вычитанія (по данной суммѣ N и одному слагаемому, a другое опредѣляется вычитаніемъ) имѣемъ:

$$N - a = \delta + d + c + b.$$

Такимъ же точно разсужденіемъ, изъ послѣдняго равенства находимъ послѣдовательно:

$$N - a - b = c + (\delta + d);$$
$$N - a - b - c = \delta + d;$$
$$N - a - b - c - d = \delta.$$

Подставивъ вмѣсто δ равную ему величину, находимъ

$$N - (a + b + c + d) = N - a - b - c - d,$$

что и требовалось доказать.

Принципъ, выражаемый этою теоремой, служитъ, между прочимъ, основаніемъ теоріи вычитанія цѣлыхъ чиселъ: изъ уменьшаемаго послѣдовательно отнимаютъ всѣ части вычитаемаго, разсматривая его какъ сумму единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д.

Теорема III. — *Чтобы придать разность, нужно придать уменьшаемое и изъ результата отнять вычитаемое.*

Доказательство. — Пусть будетъ дана разность

$$a - b = \delta;$$

по опредѣленію вычитанія, имѣемъ

$$a = \delta + b$$

Придавая равныя къ равнымъ, получимъ равныя величины (приданіе $\delta + b$ означаемъ скобками); сл.

$$N + a = N + (\delta + b);$$

отсюда, по теор. I св. сум. имѣемъ:

$$N + a = N + \delta + b,$$

а по опредѣленію вычитанія:

$$N + a - b = N + \delta,$$

или, замѣнивъ δ его величиною, получаемъ

$$N + a - b = N + (a - b),$$

что и требовалось доказать.

Теорема IV. — *Чтобы вычесть разность, нужно вычесть уменьшаемое и къ результату придать вычитаемое.*

Доказательство. — Изъ равенства

$$a - b = \delta.$$

имѣемъ

$$a = \delta + b.$$

Придавая къ обѣимъ частями по b. имѣемъ:

$$a + b = \delta + b + b = \delta;$$

вычитая равныя изъ равныхъ, получимъ:

$$N - (a + b) = N - \delta;$$

отсюда, по теор. II св. разн., имѣемъ

$$N - a - b = N - \delta$$

но вычесть b — тоже самое, что придать b; слѣд.

$$N - a + b = N - \delta = N - (a - b),$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. *Придавая или вычитая разность, всегда можемъ измѣнить порядокъ двухъ производимыхъ дѣйствій.*

Доказательство. — Чтобы доказать теорему для случая приданія разности, напишемъ равенство

$$N + a - b = a + N - b,$$

справедливое потому, что въ суммѣ $N + a$ можно перемѣнить порядокъ слагаемыхъ.

Вторую часть равенства, на основаніи теоремы III св. разн , можно представить въ видѣ: $a + (N - b)$; слѣд.

$$N + a - b = a + (N - b);$$

перемѣнивъ снова мѣста слагаемыхъ во второй части, получимъ

$$N + a - b = (N - b) + a;$$

опустивъ скобки, такъ какъ и безъ нихъ смыслъ дѣйствій ясенъ, имѣемъ

$$N + a - b = N - b + a.$$

Для случая вычитанія разности, на основаніи случая приданія прямо имѣемъ:

$$N - a + b = N + b - a.$$

Теорема V. — *Разность не измѣнится, если къ уменьшаемому и вычитаемому придать или изъ нихъ вычесть одно и тоже количество.*

Доказательство. — Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенства

$$a - b = \delta,$$

по опредѣленію вычитанія, имѣемъ

$$a = \delta + b.$$

Придавая къ равнымъ по-ровну, получимъ количества равныя, слѣд.

$$a + m = \delta + b + m,$$

или по теоремѣ I св. суммы:

$$a + m = \delta + (b + m).$$

Отсюда по опредѣленію вычитанія,

$$(a + m) - (b + m) = \delta,$$

или, замѣнивъ δ его величиною, имѣемъ

$$(a+m)-(b+m)=a-b.$$

Совершенно аналогичнымъ пріемомъ докажемъ что

$$(a-m)-(b-m)=a-b.$$

Слѣдствіе. — *Всякая разность равна обращенной разности, взятой со знакомъ минусъ.*

Доказательство. — Имѣя разность $a-b$, мы не измѣнимъ ее, вычтя изъ обоихъ членовъ ея по a; поэтому

$$a-b=(a-a)-(b-a);$$

или

$$a-b=0-(b-a);$$

опустивъ ноль, получимъ окончательно

$$a-b=-(b-a).$$

Теорема VI. — *Количество не измѣнится, если къ нему придать и затѣмъ вычесть одну и туже величину.*

Доказательство. — Въ самомъ дѣлѣ, по теоремѣ III о приданіи разности имѣемъ:

$$\begin{aligned} P+a-a&=P+(a-a)\\ &=P+0\\ &=P. \end{aligned}$$

Свойства полинома.

17. Выраженіе вида

$$a+b-c+d-e$$

указывающее рядъ сложеній и вычитаній, называется *полиномомъ* или *многочленомъ*. Члены, предшествуемые знакомъ $+$, называются *положительными*, а предшествуемые знакомъ $-$, *отрицательными*. Если передъ первымъ членомъ не находится никакого знака, надо подразумѣвать $+$. Члены полинома суть количества, которыя сами по себѣ могутъ быть или положительныя, или отрицательныя. Отдѣльный членъ, называемый *одночленомъ* или *мономомъ*, всегда можно разсматривать какъ двучленъ или биномъ; въ самомъ дѣлѣ:

$$a=a+0=0+a=a-0.$$

18. Теорема. — *Во всякомъ полиномѣ можно какъ угодно измѣнять порядокъ членовъ, сохраняя передъ ними ихъ знаки: величина полинома отъ этого не измѣнится.*

Доказательство. — I. Сначала докажемъ, что можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ членовъ; т. е., назвавъ совокупность предшествующихъ членовъ буквою P, докажемъ справедливость равенствъ:

$$\begin{aligned} P+a+b&=P+b+a,\\ P-a-b&=P-b-a,\\ P+a-b&=P-b+a. \end{aligned}$$

Въ самомъ дѣлѣ, по теоремѣ II свойствъ суммы, величина *суммы* не измѣнится отъ перемѣны мѣстъ слагаемыхъ; слѣд. 1-е равенство доказано.

Для доказательста втораго припомнимъ, что на основаніи теоремы II свойствъ разности имѣемъ

$$P-a-b=P-(a+b);$$

измѣнивъ въ суммѣ $a+b$ мѣста слагаемыхъ, получимъ

$$P-a-b=P-(b+a);$$

отсюда, основываясь опять на теор. II св. разн., вторую часть замѣняемъ формулою $P-b-a$, послѣ чего окончательно находимъ

$$P-a-b=P-b-a.$$

Наконецъ, на основаніи слѣдствія теоремы IV св. разн., прямо имѣемъ

$$P+a-b=P-b+a,$$

и третье равенство доказано.

II. Докажемъ теперь, что можно измѣнить порядокъ двухъ послѣдовательныхъ (рядомъ стоящихъ) членовъ полинома.

Въ самомъ дѣлѣ, всякіе два рядомъ стоящіе члена суть послѣдніе члены полинома, составленнаго изъ нихъ и имъ предшествующихъ членовъ; а по I пункту нашей теоремы такіе два члена могутъ быть переставлены одинъ на мѣсто другаго.

III. Можно измѣнить какъ угодно порядокъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, переставляя два послѣдовательные члена одинъ на мѣсто другаго, можно какой угодно членъ полинома перевести постепенно на какое угодно мѣсто.

19. Приведеніе подобныхъ членовъ полинома. — Два члена, состоящіе изъ одинаковыхъ буквъ и надъ одинаковыми буквами имѣющіе одинаковыхъ показателей, а коэффиціенты и знаки которыхъ могутъ быть какіе угодно, называются *подобными*. Короче, *подобными одночленами называются такіе, у которыхъ буквенная часть одинакова*. Такъ, $3a^2b^3c$ и $-7a^2b^3c$ — подобны; также $4(x-y)^2z^3$ и $-\frac{1}{2}(x-y)^2z^3$ — подобны между собою.

Когда многочленъ содержитъ подобные члены, его можно упростить, соединивъ подобные члены въ одинъ. Соединеніе подобныхъ членовъ въ одинъ называется *приведеніемъ*.

При выводѣ правилъ приведенія нужно разсмотрѣть слѣдующіе случаи.

1) *Знаки подобныхъ членовъ одинаковы*. Пусть данъ двучленъ, состоящій изъ положительныхъ членовъ, напр. $3a^2b+5a^2b$. Знакъ $+$, подразумѣваемый передъ членомъ $3a^2b$, показываетъ, что слѣдуетъ *придать* $3a^2b$; $+$ передъ вторымъ членомъ означаетъ, что *придается* $5a^2b$; но придать $3a^2b$, а затѣмъ $5a^2b$ — все равно что сразу придать $8a^2b$, слѣдовательно

$$3a^2b+5a^2b=+8a^2b.$$

Возьмемъ двучленъ $-4ab^3-5ab^3$. Знакъ (—) передъ первымъ членомъ показываетъ, что нужно отнять $4ab^3$; тотъ же знакъ передъ вторымъ членомъ означаетъ, что нужно отнять $5ab^3$; но отнять $4ab^3$ и затѣмъ $5ab^3$ — все равно что сразу отнять $9ab^3$; итакъ

$$-4ab^3-5ab^3=-9ab^3.$$

Отсюда правило: *если знаки подобныхъ членовъ одинаковы, то для приведенія*

членовъ въ одинъ нужно буквенное выраженіе оставить безъ перемѣны, коэффиціенты сложить, а знакъ поставить общій.

2) *Знаки приводимыхъ членовъ различны.* Возьмемъ выраженіе, состоящее изъ двухъ подобныхъ членовъ съ разными знаками, напр. $5a^2b^3 - 3a^2b^3$. Знакъ $(+)$, подразумѣваемый передъ первымъ членомъ, означаетъ, что нужно придать $5a^2b^3$; $(-)$ передъ вторымъ членомъ показываетъ, что нужно вычесть $3a^2b^3$. Придать 5 разъ a^2b^3, а затѣмъ вычесть 3 раза a^2b^3 — все равно что придать 2 раза a^2b^3; сл.

$$5a^2b^3 - 3a^2b^3 = +2a^2b^3.$$

Въ выраженіи: $-5a^2b^3 + 2a^2b^3$ знакъ $(-)$ передъ первымъ членомъ показываетъ, что нужно 5 разъ вычесть a^2b^3; $(+)$ передъ вторымъ членомъ показываетъ, что нужно придать 2 раза a^2b^3; но это — все равно что отнять 3 раза a^2b^3. Слѣд.

$$-5a^2b^3 + 2a^2b^3 = -3a^2b^3.$$

Отсюда правило: *Когда знаки подобныхъ членовъ разные, то для соединенія членовъ въ одинъ нужно — буквенное выраженіе оставить безъ измѣненія, изъ бо́льшаго коэффиціента вычесть меньшій и передъ разностью поставить знакъ бо́льшаго коэффиціента.*

Можетъ случиться, что подобные члены имѣютъ одинаковые коэффиціенты, но разные знаки, напр. $+2a - 2a$; очевидно, что такіе члены взаимно уничтожаются т. е. даютъ въ результатѣ ноль. Слѣд.

$$+2a - 2a = 0.$$

При помощи этихъ правилъ можно дѣлать приведеніе подобныхъ членовъ полинома, сколько бы ихъ ни было. Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя первое правило, мы соединимъ въ одинъ членъ всѣ подобные члены, имѣющіе одинаковые знаки; послѣ этого придется сдѣлать приведеніе членовъ съ разными знаками, примѣняя второе правило. Пусть, напр., данъ полиномъ

$$7a^6 - 5a^4b^2 + 5a^4b^2 - 3a^4b^2 + 8a^4b^2 - 13a^4b^2 + a^4b^2 - b^6.$$

Членъ $7a^6$, не имѣющій себѣ подобнаго, остается неприводимымъ. Члены: $-5a^4b^2$ и $+5a^4b^2$, какъ подобные члены съ разными знаками и равными коэффиціентами, взаимно уничтожаются. Затѣмъ: $-3a^4b^2$ и $-13a^4b^2$ даютъ, по первому правилу, $-16a^4b^2$; члены: $+8a^4b^2$ и $+a^4b^2$, по тому же правилу, даютъ $+9a^4b^2$. Члены: $-16a^4b^2$ и $+9a^4b^2$, по второму правилу, даютъ $-7a^4b^2$. Наконецъ $-b^6$, какъ не имѣющій себѣ подобнаго, остается не приводимымъ. Такимъ образомъ данный полиномъ приводится къ слѣдующему сокращенному виду:

$$7a^6 - 7a^4b^2 - b^6.$$

20. Расположеніе многочлена по степенямъ главной буквы. — Когда показатели нѣкоторой буквы въ послѣдовательныхъ членахъ идутъ постоянно уменьшаясь или увеличиваясь, то говорятъ, что полиномъ расположенъ по степенямъ этой буквы, которая въ такомъ случаѣ называется *главной*.

Такъ, полиномъ

$$3 - 5x + 6x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^4$$

расположенъ по возрастающимъ степенямъ буквы x.

Многочленъ

$$3x^4 - \frac{5a}{b^2}x^3 - \frac{6a^2}{b}x^2 + \frac{3a^4}{5}x - 1$$

расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы x.

Многочленъ

$$9ax^8y - 12x^6y^4 + 7a^3x^2y^5$$

расположенъ одновременно по убывающимъ степенямъ буквы x и по возрастающимъ буквы y.

Многочленъ называется *полнымъ*, если показатели главной буквы идутъ увеличиваять или уменьшаясь постоянно на единицу и если имѣется членъ не содержащій главной буквы. Таковъ напр. многочленъ

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e:$$

это есть полный многочленъ относительно буквы x.

Если же нѣкоторыхъ степеней главной буквы недостаетъ, многочленъ называется неполнымъ. Напр.

$$x^4 - 3x^2 + 2x + 1$$

есть неполный многочленъ четвертой степени относительно буквы x: въ немъ недостаетъ члена, содержащаго x^3.

21. Задачи.

Сдѣлать приведеніе въ слѣдующихъ многочленахъ:

1. $3a^2b + 7ab^2c - a^2b + 15ab^2c + 9a^2b - 4a^2bc - 5a^2b$.
2. $8x^3 - 5x^2y - 7xy^2 + 4x^2y - 9y^3 - 5x^3 - 14xy^2 + 28xy^2 - 60x^2y + 20x^3$.
3. $7\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z + 3\frac{1}{3}x - \frac{5}{6}y + \frac{1}{3}z - \frac{17}{2}x + \frac{15}{2}y + 2\frac{1}{6}z$.
4. $12{,}49m^2n - 3{,}72n^2 + 7\frac{1}{2}m^2n + 2{,}9p^3 - 6{,}39n^2 + 5p^3 + 3{,}72n^2$.
5. $9\frac{1}{2}x - \frac{7}{8}y + 3{,}6z + 2{,}7x + 0{,}125y - 4\frac{2}{5}z$.

Сложеніе.

22. Сложеніе полиномовъ. Теорема. *Чтобы придать полиномъ къ какому нибудь количеству, надо всѣ члены полинома приписать къ этому количеству — каждый съ тѣмъ знакомъ, какой передъ нимъ находится.*

Первое доказательство. — Оно основано на правилѣ приданія суммы или разности. Пусть требуется къ P придать полиномъ $a - b + c - d$; дѣйствіе обозначаемъ, заключивъ многочленъ въ скобки:

$$P + (a - b + c - d).$$

Разсматривая d какъ количество вычитаемое изъ $a - b + c$, обозначаемъ это дѣйствіе, заключивъ $a - b + c$ въ новыя скобки; такимъ образомъ получимъ:

$$P + (a - b + c - d) = P + [(a - b + c) - d].$$

Разсматривая $a-b+c$ какъ одинъ членъ разности, а d какъ другой, и припоминая, что по теор. III св. разн. для приданія разности надо придать первый членъ и отнять второй, найдемъ:

$$P+(a-b+c-d)=P+(a-b+c)-d.$$

Разсматривая $a-b$ какъ одинъ членъ суммы, а c какъ другой, что обозначаемъ соотвѣтствующими скобками, имѣемъ:

$$P+(a-b+c-d)=P+[(a-b)+c]-d.$$

На основаніи теоремы III св. суммы можно членъ $[(a-b)+c]$ замѣнить суммою составляющихъ его членовъ; так. обр.

$$P+(a-b+c-d)=P+(a-b)+c-d.$$

Наконецъ по теоремѣ о приданіи разности получимъ окончательно

$$P+(a-b+c-d)=P+a-b+c-d.$$

Второе доказательство. — Оно проще перваго. Разсматривая придаваемый полиномъ какъ одинъ членъ, мы, перемѣняя мѣста слагаемыхъ, можемъ написать:

$$P+(a-b+c-d)=(a-b+c-d)+P.$$

Вторая часть равенства означаетъ, что изъ a надо вычесть b, затѣмъ придать c, вычесть d и наконецъ придать P; но тотъ же смыслъ будетъ имѣть это выраженіе, если въ немъ опустить скобки; сл. имѣемъ право написать

$$P+(a-b+c-d)=a-b+c-d+P.$$

Переставивъ затѣмъ послѣдній членъ второй части на первое мѣсто, получимъ окончательно

$$P+(a-b+c-d)=P+a-b+c-d.$$

Итакъ, для сложенія многочленовъ надо члены одного многочлена приписать къ другому, каждый съ тѣмъ знакомъ, какой передъ нимъ находится и, если можно, сдѣлать приведеніе. На практикѣ, для удобства приведенія, пишутъ члены одного многочлена подъ другимъ, наблюдая, чтобы подобные члены находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. Такъ, пусть требуется сдѣлать сложеніе:

$$4x^3-5a^2x+7ax^2-a^3+(8a^3-x^3+4ax^2-3a^2x)+(4a^2x-2x^3+a^3).$$

Располагая многочлены сказаннымъ образомъ, имѣемъ:

$$\begin{array}{l|rrrr} & 4x^3 & -5a^2x & +7ax^2 & -a^3 \\ \text{Слагаемыя} & -x^3 & -3a^2x & +4ax^2 & +8a^3 \\ & -2x^3 & +4a^2x & & +a^3 \\ \hline \text{Сумма}\ \ldots & x^3 & -4a^2x & +11ax^2 & +8a^3 \end{array}$$

или, располагая члены по убывающимъ степенямъ буквы a:

$$8a^3-4a^2x+11ax^2+x^3.$$

23. Сложеніе мономовъ. — Правило этого дѣйствія можетъ быть введено на основаніи правила сложенія полиномовъ, такъ-какъ всякій мономъ можно разсматривать какъ биномъ.

Уменьшаемое . . . . . . $5a^3b^2 - 7a^2b^3 + 8ab^4 - b^5$
Вычитаемое . . . . . $-2a^3b^2 \pm 7a^2b^3 \mp 3ab^4 \pm 6b^5$
Остатокъ . . . . $3a^3b^2 \qquad\qquad + 5ab^4 + 5b^5$

25. Вычитаніе мономовъ. — Правило вычитанія одночленовъ можно вывести на основаніи правила вычитанія многочленовъ, такъ какъ всякій одночленъ можно разсматривать какъ двучленъ.

Пусть изъ какого нибудь количества P, подъ которымъ можно подразумѣвать или многочленъ, или одночленъ, требуется вычесть $+a$. Разсматривая $+a$ какъ бинонъ $o+a$, на основаніи правила вычитанія многочленовъ находимъ

$$P-(+a)=P-(o+a)=P-o-a;$$

опустивъ o, имѣемъ:

$$P-(+a)=P-a \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Разсматривая $-a$ какъ биномъ $o-a$, подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$P-(-a)=P-(o-a)=P-o+a=P+a \; . \; . \; . \; (2).$$

Такимъ образомъ, *вычитаемый одночленъ надо приписывать къ уменьшаемому съ обратнымъ знакомъ.*

Напримѣръ

$$5a^3b^2c-(-2a^3b^2c)=5a^3b^2c+2a^3b^2c=7a^3b^2c.$$

Такимъ же образомъ найдемъ:

1) $3-(+5)=3-5=-2.$
2) $3-(-5)=3+5=+8.$

Замѣчая, что остатокъ перваго вычитанія (-2) меньше уменьшаемаго, между тѣмъ какъ остатокъ втораго $(+8)$ больше уменьшаемаго, заключаемъ, что съ алгебраическимъ вычитаніемъ не всегда соединяется понятія объ уменьшеніи: вычесть положительное число — значитъ уменьшить, вычесть отрицательное — значитъ увеличить.

Примѣчаніе. — Правило вычитанія одночленовъ можно-бы было вывести непосредственно, основываясь на опредѣленіи этого дѣйствія; такой выводъ ничѣмъ не отличается отъ втораго доказательства правила вычитанія многочленовъ, потому мы его и опускаемъ.

Употребленіе скобокъ.

26. Если многочленъ или нѣсколько его членовъ заключены въ скобки, от можно ихъ опустить, написавъ многочленъ безъ скобокъ. Дѣйствіе это наз. *раскрытіемъ скобокъ*, а правила его непосредственно вытекаютъ изъ правилъ сложенія и вычитанія многочленовъ. При этомъ слѣдуетъ разсмотрѣть два случая.

1. Если передъ скобками стоитъ знакъ $+$, то можно опустить скобки вмѣстѣ съ знакомъ, который передъ ними находится, переписавъ члены, стоявшіе въ скобкахъ, съ ихъ знаками. Такъ, выраженіе

$$a+(-b+c-d+e),$$

по раскрытіи скобокъ, дастъ, по правилу сложенія,

$$a-b+c-d+e.$$

2. Если многочленъ или часть его заключена въ скобки, передъ которыми стоитъ знакъ —, то можно опустить скобки вмѣстѣ съ знакомъ, который имъ предшествуетъ, перемѣнивъ знаки у всѣхъ членовъ, стоящихъ въ скобкахъ. Такъ, многочленъ.

$$a-b-(-e+f-h),$$

согласно съ правиломъ вычитанія, по раскрытіи скобокъ дастъ:

$$a-b+e-f+h.$$

Если многочленъ содержитъ нѣсколько паръ скобокъ, то ихъ можно уничтожать послѣдовательно, начиная или съ внутреннихъ, или съ наружныхъ, руководствуясь каждый разъ вышеприведенными правилами. Такъ, въ выраженіи $a-[b+(c-d)]$ раскрывъ сперва наружныя скобки, найдемъ

$$a-b-(c-d),$$

принимая на-время $c-d$ за одинъ членъ. Раскрывая оставшіяся скобки, находимъ окончательно

$$a-b-c+d.$$

Наоборотъ, раскрывая сначала внутреннія скобки, т. е. вида ( ), въ выраженіи

$$a-\{-b+[c-(d-e)]\},$$

получимъ

$$a-\{-b+[c-d+e]\};$$

раскрывъ затѣмъ квадратныя скобки, найдемъ

$$a-\{-b+c-d+e\};$$

раскрывъ, наконецъ, фигурныя скобки, получимъ окончательно:

$$a+b-c+d-e.$$

Наоборотъ, можно многочленъ или часть его *заключить въ скобки*, такъ чтобы передъ ними былъ опредѣленный знакъ Здѣсь опять надо разсмотрѣть два случая.

1. Если многочленъ или часть его желаемъ заключить въ скобки со знакомъ + передъ ними, то у членовъ, вносимыхъ въ скобки, слѣдуетъ сохранить ихъ знаки. Такъ въ выраженіи $a+b-c+d-e$ внося три послѣдніе члена въ скобки съ знакомъ + передъ ними, получимъ

$$a+b+(-c+d-e);$$

справедливость этого преобразованія подтверждается тѣмъ, что, раскрывъ скобки, находимъ данное выраженіе $a+b-c+d-e$.

2. Если же многочленъ или часть его требуется заключить въ скобки со знакомъ — передъ ними, то у членовъ, заключаемыхъ въ скобки, надо знаки перемѣнить на обратные. Такъ, если три средніе члена многочлена $a-b+f-$ $-h+k$ нужно заключить въ скобки съ знакомъ — передъ ними, то найдемъ:

$$a-(b-f+h)+k;$$

справедливость преобразованія доказывается тѣмъ, что, раскрывъ скобки, находимъ данное вырнженіе

$$a-b+f-h+k.$$

Можно въ данный многочленъ вводить и нѣсколько паръ скобокъ. Такъ напр. многочленъ $a-b+c-d+e-f$ можно написать въ видѣ

$$a+[-b+c-(d-e+f)].$$

27. Задачи.

Сложить многочлены:

1. $4a^3x-15a^2xy+7ax^2y+(9axy^2-7y^3x)+(4a^2x^2+5ax^2y-8y4)$.

2. $7x^5-4x^3y^2+11xy^4+(9y^5-2x^2y^3+4xy^4)+(3x^2y^3-10y^5+9x^3y^2)$.

3. $9x^4+7x^2-1+5x+(2x^3-4x+11x^2)+(3-5x^2+7x-x^4)$.

4. $0{,}8a^2-3{,}47ab-17{,}25ac+3{,}75bc+(-\frac{3}{4}a^2+0{,}47ab+12\frac{5}{8}ac-7\frac{1}{2}bc)$.

5. $x^6-6ax^5+3a^2x^4-28a^3x^3+9a^4x^2-54a^5x+27a^6$;

$-3x^6+7ax^5-\frac{3}{4}a^2x^4-a^3x^3+\frac{3}{4}a^4x^2+27a^5x-a^6$;

$12x^6+\frac{1}{3}ax^5+a^2x^4+34a^3x^3-\frac{5}{8}a^4x^2-a^5x-28a^6$;

$-7x^6+\frac{2}{3}ax^5+\frac{1}{12}a^2x^4-11a^3x^3-7a^4x^2+15a^5x-7a^6$;

$-3x^6-2ax^5-\frac{5}{6}a^2x^4+6a^3x^3-\frac{5}{4}a^4x^2+13a^5x+3a^6$.

6. $4x^4y^5z^6-3x^3y^4z^5+17x^2y^3z^4-8xy^2z^3+(14x^2y^3z^4+4xy^2z^3+5x^3y^4z^5-3x^4y^5z^6)+(-x^4y^5z^6-2x^3y^4z^5+4xy^2z^3+19x^2y^3z^4)+(2x^3y^4z^5+5xy^2z^3-7x^4y^5z^6+9x^2y^3z^4)+(-12xy^2z^3+4x^4y^5z^6-15x^2y^3z^4-x^3y^4z^5)+(3x^4y^5z^6+41x^2y^3z^4-x^3y^4z^3+7xy^2z^3)$.

7. $a^m+6a^{m-1}b+10a^{m-2}b^2+6a^{m-3}b^3+b^4$;

$-7b^m-3a^{m-2}b^2+7a^{m-3}b^3+8a^m+4a^{m-1}b$;

$8a^{m-2}b^2+3a^{m-3}b^3-5a^m+3b^4+6a^{m-4}b$;

$-3a^{m-1}b+5a^{m-2}b^2+3a^m-5b^4-3a^{m-3}b^3$.

8. $x^p+y^q+z^k-t^m+(abx^p-mnz^k+amy^q+bt^m)+(-5abx^p+3aby^q++8t^m-az^k)+(at^m-3bz^k+mx^p+14y^q)+(3bcx^p-4y^q+3mz^k+nt^m)$.

9. Изъ $x^4+3ax^3-2bx^2+3cx-4d$ вычесть $3x^4+ax^3-4bx^2-3cx+d$.

10. Изъ $72x^4-78x^3y-10x^2y^2+17xy^3+3y^4$ вычесть $-x^4+36x^3y-17xy^3--34y^4+10x^2y^2$.

11. Изъ $10a^m-15b^n-c^p+5d^q$ вычесть $-9a^m+2b^n+c^p-5d^q$.

12. Изъ $7\frac{3}{4}x^2y-4{,}45y^2z+19\frac{7}{8}u^3+0{,}85a^2b-1{,}75x-8\frac{3}{8}y-9{,}5$ вычесть $47{,}5a^2b-2\frac{5}{12}x+1{,}125y-9\frac{1}{6}+0{,}25x^2y-4\frac{1}{4}y^2z-0{,}625u^3$.

13. Изъ многочлена $4x^4-3ax^3+8a^2x^2-9a^3x-4a^4$ вычесть сумму многочленовъ: $2x^4+5ax^3-12a^2x^2-a^3x-3a^4$, $5x^4-2ax^3+8a^2x^2-7a^3x-a^4$ и $3x^4++ax^3-a^3x$.

14. Изъ многочлена $9x^4-2ax^3+a^2x^2-b^3x+b^4$ вычесть сумму многочленовъ: $5x^4+3bx^3-5abx^2-a^3x+b^4$, $2x^4-ax^3+7b^2x^2-2b^3x-a^4$, $x^4-4ax^3+3a^2x^2--4a^2bx-2a^2b^2$.

15. Вычислить выраженіе: $P - P^{I} + P^{II} - P^{III} + P^{IV} - P^{V}$, въ которомъ

$$P = x^3 + ax^2 + a^2x;$$
$$P^{I} = y^3 - by^2 + b^2y;$$
$$P^{II} = z^3 + cz^2 + c^2z;$$
$$P^{III} = x^3 - y^3 + z^3;$$
$$P^{IV} = ax^2 + by^2 + cz^2;$$
$$P^{V} = a^2x - b^2y + c^2z.$$

16. Упростить выраженіе:

$$44x + [48y - (6z + 3y - 7x) + 4z] - [48y - 8x + 2z - (4x + y)].$$

17. Упростить выраженіе

$$6a + \{4a - [8b - (2a + 4b) - 22b]\} - \{7b + [9a - (3b + 4a) + 8b] + 6a\}.$$

18. Вычислить выраженіе

$$y - \{z - [x - (y + t)]\},$$

въ которомъ

$$x = 3a^2 - 2ab + 5b^2; \qquad y = 7a^2 - 8ab + 5b^2;$$
$$z = 9a^2 - 5ab + 3b^2; \qquad t = 11a^2 - 3ab + 4b^2.$$

19. Найти числовую величину выраженія

$$a + 2x - [b + y - \{a - x - (b - 2y)\}],$$

если $a = 2$, $b = 3$, $x = 6$, $y = 5$.

20. Упростить выраженіе

$$9x^3y - 7x^2y^2 + y^4 - [4y^4 - 2x^3y - \{3x^2y^2 - 2y^4 - (5x^3y - 2xy^3)\}].$$

21. Представить въ видѣ суммы, различными способами, каждый изъ слѣдующихъ полиномовъ:

(1) $a - b - c - d$ (2) $1 + ab - a - b$

(3) $x^3 - 7x^2 - 4x + 1$ (4) $x^3 - x^2y + 4xy^2 + 4y^3$.

22. Представить въ видѣ разности, различными способами, каждый изъ слѣдующихъ полиномовъ:

(1) $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ (2) $ay^3 - 2axy + by - 2bx$

(3) $x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ (4) $x^3y - x^2y^2 + 4xy - 4y^4$.

23. Въ каждой изъ слѣдующихъ шести группъ представить полиномы P и Q: одинъ — въ видѣ суммы двухъ полиномовъ, другой — въ видѣ разности такихъ же точно полиномовъ.

(1) $P = 1 + ab + a + b$ $Q = 1 - ab + a - b$.

(2) $P = a - b + c - d$ $Q = a + b - c - d$.

(3) $P = x^3 + 4x^2 - 4x + 1$ $Q = x^3 - 4x^2 - 4x - 1$.

(4) $P = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $Q = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

(5) $P = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$ $Q = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

(6) $P = x^4 - 3x^3y - 4x^2y^2 + 3xy^3 + y^4$ $Q = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 - 3xy^3 + y^4$.

ГЛАВА IV.

Умноженіе.

Опредѣленіе.— Правило знаковъ. — Законъ перемѣстительный. — Умноженіе одночленовъ.—Умноженіе многочлена на одночленъ и обратно.—Умноженіе многочленовъ.— Замѣчательные случаи умноженія.—Задачи.

28. Опредѣленіе. — Если для умноженія даны два ариѳметическія цѣлыя числа, напр. 5 и 4, то умножить первое на второе значитъ взять первое слагаемымъ 4 раза. Но если бы требовалось умножить 5 на $\frac{4}{7}$, то данное опредѣленіе теряетъ смыслъ въ примѣненіи къ этому случаю, потому-что нельзя взять 5 слагаемымъ $\frac{4}{7}$ раза. Такимъ образомъ, опредѣленіе дѣйствія умноженія, въ случаѣ умноженія на дробь, должно быть измѣнено, но такъ, чтобы оно не противорѣчило опредѣленію умноженія на цѣлое число. Умножая 5 на 4, мы повторяемъ множимое слагаемымъ четыре раза, т. е. составляемъ изъ множимаго новое число такъ, какъ множитель составленъ изъ единицы. Распространяя такое понятіе объ умноженіи на случай дробнаго множителя, т. е. понимая подъ умноженіемъ наприм. 5 на $\frac{4}{7}$ — составленіе изъ 5 новаго числа такъ, какъ $\frac{4}{7}$ составлено изъ единицы, мы даемъ такое опредѣленіе умноженія, которое осмысливая случай умноженія на дробь, не противорѣчитъ въ тоже время опредѣленію дѣйствія умноженія на цѣлое число. Распространяя это опредѣленіе и на алгебраическія количества, *Лакруа* даетъ слѣдующее общее опредѣленіе умноженія: *умножить одно количество на другое значитъ — изъ множимаго составить новое количество такъ, какъ множитель составленъ изъ положительной единицы.*

29. Правило знаковъ. — Примѣнимъ это опредѣленіе къ выводу правила знаковъ при умноженіи.

Пусть требуется положительное количество $(+5)$ помножить на положительное количество $(+4)$. Это значитъ: изъ $+5$ составить новое количество такъ, какъ множитель $+4$ составленъ изъ положительной единицы. Но для составленія $+4$ изъ $+1$ надо $+1$ повторить слагаемымъ четыре раза; въ самомъ дѣлѣ: $(+1)+(+1)+(+1)+(+1)=+1+1+1+1=+4$; а потому для нахожденія произведенія надо и $+5$ взять слагаемымъ четыре раза. Находимъ

$$(+5).(+4)=(+5)+(+5)+(+5)+(+5)=+5+5+5+5=+20......(1).$$

Пусть требуется (-5) помножить на $(+4)$. По опредѣленію, это значитъ изъ (-5) составить новое количество такъ, какъ $(+4)$ составлено изъ положительной единицы, т. е. надо (-5) повторить слагаемымъ четыре раза. Находимъ

$$(-5).(+4)=(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=-5-5-5-5=-20......(2).$$

Дано: $(+5)$ помножить на (-4). По опредѣленію, надо изъ $(+5)$ составить новое количество такъ, какъ (-4) составлено изъ $(+1)$. Но для составленія (-4) изъ $(+1)$ нужно у $(+1)$ перемѣнить знакъ на обратный, и съ этимъ измѣненнымъ знакомъ взять ее слагаемой четыре раза; дѣйствительно: $(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$.

Совершая надъ множимымъ тѣже дѣйствія, что и надъ $(+1)$, должно: у $(+5)$ перемѣнить знакъ на обратный, вслѣдствіе чего получимъ (-5), а затѣмъ -5 повторить слагаемымъ четыре раза. Найдемъ

$$(+5).(-4)=(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=-5-5-5-5=-20......(3).$$

Пусть, наконецъ, требуется (-5) помножить на (-4). Согласно опредѣленію, нужно у (-5) перемѣнить знакъ на обратный, и съ этимъ измѣненнымъ знакомъ взять его слагаемымъ четыре раза. Получимъ

$$(-5).(-4)=(+5)+(+5)+(+5)+(+5)=+5+5+5+5=+20......(4).$$

Результаты: (1), (2), (3) и (4) приводятъ къ слѣдующему правилу: *при умноженіи двухъ количествъ надо перемножить ихъ абсолютныя величины и передъ результатомъ поставить знакъ $+$, если множимое и множитель имѣютъ одинаковые знаки, и $(-)$, если оба сомножителя имѣютъ знаки разные.*

При выводѣ этого правила мы брали числа цѣлыя. Возьмемъ теперь дробныя числа; пусть, напр., требуется $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{5}{7}\right)$. По опредѣленію умноженія, надо изъ $\left(-\frac{2}{3}\right)$ составить новое количество такъ, какъ $\left(-\frac{5}{7}\right)$ составлено изъ $(+1)$. Но для составленія $\left(-\frac{5}{7}\right)$ изъ $(+1)$ надо: 1) $+1$ раздѣлить на 7, вслѣдствіе чего получимъ $\left(+\frac{1}{7}\right)$; въ самомъ дѣлѣ, помноживъ $+\frac{1}{7}$ на 7, т. е. повторивъ слагаемымъ 7 разъ, найдемъ $\left(+\frac{1}{7}\right)+\left(+\frac{1}{7}\right)+.....=+\frac{7}{7}$ или $+1$; 2) затѣмъ слѣдуетъ $\left(+\frac{1}{7}\right)$ повторить слагаемымъ пять разъ; сдѣлавъ это, найдемъ $+\frac{5}{7}$; и 3) въ результатѣ перемѣнить знакъ на обратный, что и даетъ $\left(-\frac{5}{7}\right)$. Поступая съ $\left(-\frac{2}{3}\right)$ такъ, какъ сейчасъ мы поступали съ $(+1)$, дѣлимъ, во-первыхъ, $-\frac{2}{3}$ на 7, вслѣдствіе чего находимъ $-\frac{2}{3.7}$; повторяемъ, затѣмъ, $-\frac{2}{3.7}$ слагаемымъ пять разъ, что даетъ $-\frac{2\times5}{3\times7}$; наконецъ, въ результатѣ перемѣняемъ знакъ и находимъ $+\frac{2\times5}{3\times7}$, или $+\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$.

Итакъ:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7},$$

что согласно съ вышеприведеннымъ правиломъ.

Такимъ образомъ, обозначая буквами α и β абсолютныя числа, цѣлыя или дробныя, имѣемъ:

$$(+\alpha).(+\beta)=+\alpha.\beta.$$
$$(-\alpha).(+\beta)=-\alpha.\beta.$$
$$(+\alpha).(-\beta)=-\alpha.\beta.$$
$$(-\alpha).(-\beta)=+\alpha.\beta.$$

Обобщеніе правила знаковъ. — Пусть a и b будутъ два количества, которыя сами по себѣ представляютъ числа положительныя или отрицательныя; и распространимъ правило знаковъ и на этотъ случай. Докажемъ напр., что каковы бы ни были знаки a и b, всегда $(-a).(-b)=+ab$. Разсмотримъ четыре случая:

I. Пусть $a=+\alpha$, $b=+\beta$, гдѣ α и β — числа абсолютныя, цѣлыя или дробныя. Въ такомъ случаѣ: $-a=-(+\alpha)=-\alpha$, $-b=-(+\beta)=-\beta$; слѣдовательно

$$(-a).(-b)=-\alpha.-\beta=+\alpha\beta.$$

Съ другой стороны

$$+ab=+(+\alpha.+\beta)=+(+\alpha\beta)=+\alpha\beta.$$

Итакъ, количества $(-a)(-b)$ и $+ab$, какъ равныя порознь одному и тому же количеству $+\alpha\beta$, равны между собою, слѣд.

$$(-a).(-b)=+ab.$$

II. Пусть $a=-\alpha$, $b=+\beta$, гдѣ α и β числа абсолютныя.

Въ этомъ случаѣ: $-a=-(-\alpha)=+\alpha$, и $-b=-(+\beta)=-\beta$; слѣд.

$$(-a).(-b)=+\alpha.-\beta=-\alpha\beta.$$

Съ другой стороны

$$+ab=+(-\alpha.+\beta)=+(-\alpha\beta)=-\alpha\beta.$$

Заключаемъ опять, что и въ этомъ случаѣ

$$(-a).(-b)=+ab.$$

III. Пусть $a=+\alpha$, $b=-\beta$; отсюда: $-a=-(+\alpha)=-\alpha$, и $-b=-(-\beta)=+\beta$; слѣд. $(-a).(-b)=-\alpha.+\beta=-\alpha\beta$.

Но $+ab=+(+\alpha.-\beta)=+(-\alpha\beta)=-\alpha\beta$.

Опять находимъ, что

$$(-a).(-\beta)=+\alpha\beta.$$

IV. Пусть, наконецъ, $a=-\alpha$, $b=-\beta$; въ такомъ случаѣ:

$$-a=-(-\alpha)=+\alpha;\ -b=-(-\beta)=+\beta;\ \text{слѣд.}$$
$$(-a).(-b)=+\alpha.+\beta=+\alpha\beta.$$

Но и $+ab=+(-\alpha.-\beta)=+(+\alpha\beta)=+\alpha\beta$.

Снова имѣемъ

$$(-a).(-b)=+ab.$$

Итакъ, каковы-бы нибыли знаки количествъ a и b, всегда имѣемъ:

$$(-a).(-b)=+ab.$$

Такимъ же точно образомъ можно доказать, что вышедоказанное правило знаковъ распространяется и на три остальныя случая; такъ-что, каковы бы ни

были количества a и b — положительныя или отрицательныя, и каковы бы ни были ихъ абсолютныя величины — цѣлыя или дробныя, всегда имѣемъ:

$$(+a).(+b)=+ab;$$
$$(-a).(+b)=-ab;$$
$$(+a).(-b)=-ab;$$
$$(-a).(-b)=+ab.$$

Правило знаковъ при умноженіи, въ сокращенной формѣ, выражаютъ такъ: *одинаковые знаки даютъ въ произведеніи плюсъ, а разные — минусъ.*

Слѣдствія. — Укажемъ нѣкоторыя слѣдствія правила знаковъ:

1) Произведеніе положительныхъ количествъ всегда положительно; такъ,

$$(+2).(+3).(+4)=+24.$$

2) Знакъ произведенія отрицательныхъ множителей зависитъ отъ числа ихъ, именно: если число ихъ четное, то произведеніе будетъ положительное, потому-что въ такомъ случаѣ его можно разбить на пары, изъ которыхъ каждая даетъ знакъ (+); если же число отрицательныхъ множителей нечетное, то произведеніе будетъ отрицательное, такъ-какъ въ этомъ случаѣ будетъ одинъ отрицательный множитель, для котораго нѣтъ пары. Такъ:

1) $(+8).(-5).(-2)=(-40).(-2)=+80;$

2) $(+8).(-5).(-2).(-3)=(+80).(-3)=-240;$

3) $(+8).(-5).(-2).(-3).(-7)=(-240).(-7)=+1680$ и т. под.

Примѣчаніе. — Правило знаковъ встрѣчаемъ уже у *Діофанта* (365 по Р. Х.), но безъ доказательства. Знаменитый *Эйлеръ* въ своей алгебрѣ даетъ слѣдующее доказательство: $(-a).(-b)$ равно или $+ab$, или $-ab$; третьяго результата быть не можетъ. Этимъ результатомъ не можетъ быть $-ab$, потому-что такое произведеніе происходитъ или отъ $(-a)(+b)$ или отъ $(-b).(+a)$. Поэтому, произведеніе будетъ $=+ab$. Очевидно, это доказательство, какъ и доказательство *Крампа*, не выдерживаетъ критики. Крампъ въ своей *всеобщей Ариѳметикѣ*, говоритъ: «Теорема, въ силу которой два отрицательные множителя даютъ произведеніе со знакомъ, противоположнымъ *минусу*, и слѣд. *положительное*, сводится къ извѣстному правилу грамматики: duplex negatio affirmat».

30. Теорема. — *Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.* Эта теорема составляетъ такъ называемый *законъ перемѣстительности въ умноженіи.* Докажемъ ее:

1) Для цѣлыхъ положительныхъ сомножителей;

2) Для дробныхъ положительныхъ производителей;

4) для отрицательныхъ, цѣлыхъ или дробныхъ, производителей.

Имѣемъ два цѣлыхъ положительныхъ числа a и b; умножить a на b значитъ повторить a слагаемымъ b разъ; сл.

$a.\ b = a+a+a+a+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$ (b разъ);

но $a = 1+1+1+1+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$ (a разъ); слѣд.

$$
\left.\begin{aligned}
a.b = &(1+1+1+1+\ldots\ldots\ a \text{ разъ})\\
&+(1+1+1+1+\ldots\ldots\ \text{id})\\
&+(1+1+1+1+\ldots\ldots\ \text{id})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(1+1+1+1+\ldots\ldots\ \text{id})
\end{aligned}\right\}\text{Число горизонтальныхъ строкъ} = b.
$$

Приходится составить сумму единицъ, содержащихся въ этихъ b строкахъ. Это можно сдѣлать двоякимъ образомъ:

1) Складывая единицы въ каждыхъ скобкахъ, число которыхъ равно b, мы получимъ b слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое $=a$; такимъ образомъ нужно a повторить b разъ слагаемымъ, что и даетъ намъ произведеніе $a.b$.

2) Можно взять сумму единицъ, составляющихъ первый вертикальный рядъ и равняющуюся b; затѣмъ сумму единицъ втораго вертикальнаго ряда, равную также b, и т. д., а какъ всѣхъ вертикальныхъ рядовъ a, то приходится b повторить a разъ слагаемымъ; найдемъ

$$b+b+b+\ldots\ldots(a \text{ разъ}) = b.a.$$

Итакъ, сумма одного и того же числа единицъ можетъ быть представлена произведеніями $a.b.$ и $b.a$; т. е.

$$ab = ba.$$

Возьмемъ теперь произведеніе нѣсколькихъ цѣлыхъ положительныхъ сомножителей, и назовемъ буквою P произведеніе всѣхъ ихъ, кромѣ двухъ послѣднихъ; можно доказать, что въ произведеніи Pmn можно перемѣнить мѣста двухъ послѣднихъ множителей, не измѣняя этимъ величины произведенія, т. е. что $Pmn = Pnm$. Въ самомъ дѣлѣ

$$Pm = P+P+P+\ldots\ldots(m \text{ разъ}).$$

Произведеніе Pmn представляетъ сумму n слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое $= Pm$ или, что тоже, $= P+P+P+\ldots\ldots(m$ разъ); слѣдовательно

$$
\left.\begin{aligned}
Pmn = &(P+P+P+\ldots\ldots(m \text{ разъ})\\
&+(P+P+P+\ldots\ldots\text{id})\\
&+(P+P+P+\ldots\ldots\text{id})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\text{Число горизонтальныхъ строкъ} = n.
$$

Эту сумму можно вычислить двоякимъ образомъ:

1) Въ каждыхъ скобкахъ имѣемъ m слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое $=P$; поэтому, каждыя скобки даютъ Pm; это количество повторяется слагаемымъ n разъ, сл. сумма $= Pmn$.

2) Иначе: въ каждомъ вертикальномъ ряду имѣемъ n слагаемыхъ, изъ коихъ каждое $=P$; сл. каждый вертикальный рядъ даетъ Pn; а какъ всѣхъ вертикальныхъ рядовъ m, то общая сумма $= Pnm$. Итакъ

$$Pmn = Pnm.$$

Основываясь на этомъ выводѣ, докажемъ, что если дано произведеніе изъ нѣсколькихъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, то каждое изъ нихъ можно помѣстить на каждомъ мѣстѣ.

Такъ, имѣя произведеніе $abcde$, можемъ, на основаніи предъидущей теоремы, замѣнить его произведеніемъ $abced$. Затѣмъ, разсматривая c и e какъ два послѣдніе множителя произведенія $abce$, замѣняемъ послѣднее равнымъ ему произведеніемъ $abec$, такъ-что $abced=abecd$. Разсматривая b и e какъ два послѣдніе множителя произведенія abe, замѣняемъ послѣднее равнымъ ему произведеніемъ aeb, такъ-что $abecd=aebcd$. Наконецъ, перемѣняя мѣста множителей произведенія ae, находимъ $aebcd=eabcd$. Такимъ образомъ, послѣдовательно имѣемъ

$$abcde=abced=abecd=aebcd=eabcd,$$

откуда видимъ, что множитель e можетъ быть поставленъ на каждомъ мѣстѣ произведенія, не измѣняя величины его.

Это справедливо относительно каждаго множителя; слѣд. въ произведеніи цѣлыхъ положительныхъ множителей можно каждаго изъ нихъ помѣстить последовательно на каждое мѣсто, не измѣняя этимъ величины произведенія.

II Пусть множители будутъ положительныя дроби. Означая буквою P произведеніе, предшествующее двумъ послѣднимъ множителямъ $\frac{m}{n}$ и $\frac{r}{s}$, припоминая правило умноженія дробей и замѣчая, что правило знаковъ доказано и для дробныхъ множителей, находимъ

$$P\times\frac{m}{n}\times\frac{r}{s}=P\times\frac{mr}{ns}=P\times\frac{rm}{sn}=P\times\frac{r}{s}\times\frac{m}{n}.$$

Такимъ образомъ и здѣсь произведеніе не измѣняется отъ перестановки двухъ послѣднихъ множителей. А отсюда, примѣняя вышеприведенныя разсужденія, находимъ, что

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{h}{i}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{h}{i}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{h}{i}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{h}{i}$$
$$=\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\cdot\frac{h}{i}$$

т. е. въ произведеніи нѣсколькихъ дробныхъ положительныхъ множителей можно послѣдній изъ нихъ помѣстить на какомъ угодно мѣстѣ произведенія, не измѣняя величины послѣдняго. Правило это справедливо и для всѣхъ дробныхъ положительныхъ множителей.

III. Если множители произведенія будутъ отрицательные, дробные или цѣлые, то произведеніе, по абсолютной величинѣ, равно будетъ произведенію тѣхъ же множителей, но взятыхъ съ положительными знаками. Но, по доказанному, въ произведеніи положительныхъ множителей можно измѣнять порядокъ ихъ какъ угодно, не измѣняя этимъ величины произведенія. Поэтому абсолютная величина нашего произведенія не измѣнится отъ перемѣны мѣстъ множителей. Слѣдовательно, если измѣненіе порядка множителей можетъ оказать какое нибудь вліяніе на величину произведенія, то это вліяніе можетъ простираться только на его знакъ. Но выше было показано (§ 29, Сл. 2), что знакъ произведенія отрицательныхъ множителей зависитъ только отъ *числа*, но не отъ порядка, въ которомъ они размѣщены; а какъ число ихъ при производимыхъ перестановкахъ остается тоже самое, то и знакъ произведенія всегда будетъ одинъ и тотъ же. Итакъ, измѣняя порядокъ множителей въ произведеніи отрицательныхъ чиселъ, мы этимъ не измѣнимъ ни величины, ни знака произведенія.

Слѣдствія. I. Чтобы умножить данное количество на произведеніе нѣсколькихъ другихъ, нужно его послѣдовательно умножить на множители этого произведенія.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$m(abc) = (abc)m,$$

по закону перемѣстительному; выраженіе во второй части показываетъ, что a нужно умножить на b, произведеніе на c, и новое произведеніе на m; опустивъ, для сокращенія, скобки найдемъ

$$m(abc) = abcm,$$

но по закону перемѣст., $abcm = mabc$, сл. окончательно

$$m(abc) = mabc.$$

II. Чтобы умножить произведеніе на нѣкоторое количество, нужно на это колич. помножить одного изъ производителей.

Въ самомъ дѣлѣ:

$(abcd)m = abcdm$ (опустивъ скобки)
$= cmabd$ (по закону перемѣстительности)
$= (cm)abd$ (по смыслу скобокъ)
$= ab(cm)d$ (по закону перемѣст).

III. Во всякомъ произведеніи можно: нѣсколько множителей замѣнить ихъ вычисленнымъ произведеніемъ, и обратно, какой угодно множитель — другими, которыхъ произведенію онъ равенъ.

Въ самомъ дѣлѣ:

1). Всегда возможно разсматриваемые множители перемѣстить такъ, чтобы они стояли рядомъ; составить затѣмъ ихъ произведеніе; и помѣстить послѣднее куда угодно, какъ множителя.

2). Всегда возможно множителя, который желаемъ разложить помѣстить на первомъ мѣстѣ; замѣнить его сомножителями, произведенію которыхъ онъ равнялся бы; и наконецъ расположить этихъ множителей, какъ угодно.

31. Правило показателей. — Разсмотримъ умноженіе степеней одного и того же основанія. Пусть, напр., требуется умножить a^5 на a^3. Мы знаемъ, что $a^5 = a.a.a.a.a$ и $a^3 = a.a.a$; слѣдовательно $a^5.a^3 = a.a.a.a.a.a.a.a = a^8$. Отсюда заключаемъ, что произведеніе имѣетъ то же самое основаніе, а показатель его равенъ суммѣ показателей множителей. Пусть вообще дано помножить a^m на a^n, гдѣ a какое нибудь количество; а m и n — числа цѣлыя и положительныя. Замѣчая, что

$a^m = a.a.a \ldots\ldots\ldots\ldots$ гдѣ a повторяется множителемъ m разъ,
и $a^n = a.a.a.a. \ldots\ldots\ldots\ldots$, гдѣ a берется множителемъ n разъ,
находимъ, что

$$a^m.a^n = \overbrace{a.a.a \ldots\ldots\ldots\ldots}^{m \text{ разъ}} \overbrace{a.a.a \ldots\ldots\ldots\ldots}^{n \text{ разъ}} =$$
$$= \underbrace{a.a.a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{m+n \text{ разъ}} = a^{m+n}.$$

Итакъ: $a^m.a^n = a^{m+n}$. Слѣд. имѣемъ правило:

Произведеніе двухъ степеней одного и того же основанія есть другая степень того же самаго основанія, которой показатель равенъ суммѣ показателей сомножителей.

32. Умноженіе одночленовъ. — Пусть дано перемножить одночлены

$$6a^5b^2c^3d^4 \times 5a^2b^6cf^2.$$

Перемѣнивъ порядокъ множителей $6, a^5, b^2, c^3, d^4, 5, a^2$ и т. д., отъ чего величина произведенія не измѣнится, даемъ произведенію видъ

$$6.5.a^5.a^2.b^2.b^6.c^3.c.d^4.f^2;$$

примѣняя сюда правило показателей (§ 31), имѣемъ

$$6.5.a^7b^8c^4d^4f^2.$$

Итакъ

$$6a^5b^2c^3d^4 \times 5a^2b^6cf^2 = 30a^7b^8c^4d^4f^2.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило умноженія одночленовъ:

1) *Коэффиціенты слѣдуетъ перемножить.*

2) *Затѣмъ написать одну за другою всѣ различныя буквы, входящія въ оба одночлена, и при каждой поставить показатель, равный суммѣ показателей этой буквы въ сомножителяхъ; если же буква входитъ только въ одинъ изъ сомножителей, ее пишутъ въ произведеніи съ тѣмъ показателемъ, какой она имѣетъ.*

Примѣръ. Умножить: $-7x^m y^5 z^2 (u-v)^8$ на $\frac{3}{4}x^p y^4 (u-v)^5$.

Замѣчая, что знакъ произведенія долженъ быть (—), и примѣняя найденное правило, получимъ въ произведеніи

$$-\frac{21}{4}x^{m+p}y^9z^2(u-v)^{13}.$$

Умноженіе многочлена на одночленъ.

33. Пусть требуется умножить $a+b-c$ на d, гдѣ подъ буквами a, b и c можно разумѣть какія угодно числа. Что же касается множителя d, то слѣдуетъ различать нѣсколько случаевъ.

1. Пусть d есть цѣлое положительное число, напр. $d=4$. Припоминая опредѣленіе умноженія и замѣчая, что 4 составлено повтореніемъ положительной единицы, какъ слагаемаго, четыре раза, заключаемъ, что и множимое надо повторить слагаемымъ столько же разъ. Получимъ

$$(a+b-c).4 = (a+b-c)+(a+b-c)+(a+b-c)+(a+b-c) = 4a + 4b - 4c.$$

Результатъ показываетъ, что для умноженія многочлена на цѣлое положительное число нужно каждый членъ множимаго отдѣльно помножить на это число, соблюдая правило знаковъ.

2. Пусть d равно нѣкоторой положительной дроби, напр. $\frac{3}{4}$. По опредѣленію, умножить $a+b-c$ на $\frac{3}{4}$ значитъ изъ множимаго составить новое количество такъ, какъ множитель составленъ изъ $+1$. Но для составленія $\frac{3}{4}$ изъ $+1$,

надо отъ $+1$ взять четверть, вслѣдствіе чего получимъ $+\frac{1}{4}$, а затѣмъ $+\frac{1}{4}$ помножить на 3, что и даетъ дѣйствительно $+\frac{3}{4}$. Итакъ, мы должны: 1) взять четверть отъ $a+b-c$, и 2) полученный результатъ умножить на 3.

Можно доказать, что для раздѣленія многочлена $a+b-c$ на 4 нужно каждый его членъ раздѣлить на 4, удерживая передъ каждымъ изъ отдѣльныхъ частныхъ тотъ знакъ, какой имѣетъ дѣлимый членъ, т. е. что

$$\frac{a+b-c}{4}=\frac{a}{4}+\frac{b}{4}-\frac{c}{4}.$$

Для доказательства помножимъ частное на 4; по извѣстному уже правилу умноженія многочлена на цѣлое положительное число найдемъ:

$$\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{4}-\frac{c}{4}\right)\cdot 4=\frac{a}{4}\cdot 4+\frac{b}{4}\cdot 4-\frac{c}{4}\cdot 4.$$

Замѣчая, что $\frac{a}{4}$ или $\frac{1}{4}a$, умноженная на 4, даетъ $\frac{4}{4}a$ или a, и т. д., находимъ, что

$$\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{4}-\frac{c}{4}\right)\cdot 4 = a+b-c.$$

Итакъ, помноживъ частное на дѣлителя, мы нашли въ результатѣ дѣлимое, а потому дѣйствительно

$$\frac{a+b-c}{4}=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}c.$$

Это выраженіе надо умножить на 3. По извѣстному уже правилу умноженія на цѣлое положительное число получаемъ

$$\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}c\right)\cdot 3=\frac{1}{4}a.3+\frac{1}{4}b.3-\frac{1}{4}c.3,$$

или, относя 3 множителемъ къ $\frac{1}{4}$, найдемъ окончательно:

$$(a+b-c)\,.\,\frac{3}{4}=\frac{3}{4}a+\frac{3}{4}b-\frac{3}{4}c,$$

т. е. для умноженія многочлена на положительную дробь нужно каждый членъ множимаго умножить отдѣльно на эту дробь, соблюдая правило знаковъ.

3. Пусть d равно нѣкоторому отрицательному цѣлому числу, напр. $d=-3$. По опредѣленія умноженія, нужно съ множимымъ поступать такъ, какъ съ $+1$ при составленіи изъ нея -3, т. е. перемѣнить у множимаго знакъ, что даетъ $-(a+b-c)$, и затѣмъ повторить это выраженіе слагаемымъ три раза. Итакъ

$$(a+b-c).-3=-(a+b-c)-(a+b-c)-(a+b-c.)$$

По раскрытіи скобокъ и по приведеніи, находимъ

$$(a+b-c).-3=-3a-3b+3c.$$

Результатъ этотъ приводитъ къ тому же заключенію, какъ и два первые случая.

4. Пусть наконецъ $d=-\frac{2}{3}$, т. е. отрицательной дроби. Замѣтивъ, что $-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times-1$, имѣемъ:

$$(a+b-c).-\frac{2}{3}=\left[(a+b-c).\frac{2}{3}\right]\times-1$$

Отсюда видно, что нужно $a+b-c$ умножить сперва на положительную дробь $\frac{2}{3}$, а затѣмъ результъ на отрицательное цѣлое число -1. Производя эти двѣ операціи, для которыхъ правила уже найдены, находимъ послѣдовательно.

$$(a+b-c).-\frac{2}{3}=\left[(a+b-c).\frac{2}{3}\right].-1=\left(\frac{3}{2}a+\frac{2}{3}b-\frac{2}{3}c\right).-1=$$
$$=-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c.$$

Отсюда тоже заключеніе, что и прежде.

Итакъ, каково-бы нибыло d, имѣемъ

$$(a+b-c).\ d=ad+bd-cd,$$

откуда *правило: для умноженія многочлена на одночленъ нужно каждый членъ множимаго помножить на множителя, соблюдая правило знаковъ.* —

Этимъ правиломъ выражается *законъ распредѣлительный.* —

Примѣръ I. $\left(\frac{3}{2}b^2-4c^2+\frac{2}{5}ad^2-3\right).-\frac{2}{3}a^2c=-\frac{3}{2}b^2\times\frac{2}{3}a^2c+$
$$+4c^2\times\frac{2}{3}a^2c-\frac{2}{5}ad^2\times\frac{2}{3}a^2c+3.\frac{2}{3}a^2c=-a^2b^2c+\frac{8}{3}a^2c^3-\frac{4}{15}a^3cd^2+$$
$$+2a^2c.$$

Примѣръ II. $\{a^2(x^2+1)^p-3a(x^2+1)^{p-1}+5(x^2+1)^{p-2}\}\times$
$$-2a^n(x^2+1)^{p+3}=-2a^{n+2}(x^2+1)^{2p+3}+6a^{n+1}(x^2+1)^{2p+2}-10a^n(x^2+1)^{2p+1}.$$

Умноженіе одночлена на многочленъ.

34. Пусть требуется одночленъ умножить на многочленъ: d на $a-b+c$. Замѣчая, что отъ перемѣны мѣстъ производителей произведеніе не измѣняется, имѣемъ:

$$d(a-b+c)=(a-b+c).d.$$

На основаніи § 33, $(a-b+c).d=ad-bd+cd$; измѣняя въ каждомъ членѣ этого произведенія порядокъ сомножителей, получимъ

$$d(a-b+c)=da-db+dc,$$

откуда правило: *для умноженія одночлена на многочленъ надо одночленъ помножить на каждый членъ многочлена, соблюдая правило знаковъ.*

Такъ

$$\frac{3}{5}y^{2p-m+1}.\left[70y^{m-p-1}-65y^{2-3m-2p}+5y^{2p+m}\right]=42y^p-39y^{-4m+3}+3y^{4p+1}.$$

Умноженіе многочлена на многочленъ.

35. Пусть требуется умножить $a-b+c$ на $p-q+r$. Представивъ себѣ на время, что буквы множителя замѣнены опредѣленными числами, и выпол-

нивъ указанныя въ немъ дѣйствія, мы представимъ множителя нѣкоторымъ числомъ. Означивъ это число буквою V, приводимъ вопросъ къ умноженію многочлена на одночленъ, и по извѣстному уже правилу находимъ:

$$(a-b+c).V=aV-bV+cV.$$

Подставляя сюда вмѣсто V данное выраженіе $p-q+r$, имѣемъ:

$$(a-b+c)(p-q+r)=a(p-q+r)-b(p-q+r)+c(p-q+r).$$

Но по правилу § 34 имѣемъ:

$$a(p-q+r)=ap-aq+ar; b(p-q+r)=bp-bq+br; c(p-q+r)= cp-cq+cr.$$

Слѣдовательно

$$(a-b+c)(p-q+r)=ap-aq+ar-(bp-bq+br)+(cp-cq+cr).$$
$$=ap-aq+ar-bp+bq-br+cp-(cq+cr.$$

Разсматривая составъ произведенія, замѣчаемъ, что первые три члена его представляютъ произведеніе перваго члена множимаго на каждый членъ множителя, слѣдующіе три члена — произведеніе втораго члена множимаго на каждый членъ множителя, а три послѣдніе — произведеніе третьяго члена множимаго на множителя. Полное произведеніе состоитъ, слѣдовательно, изъ частныхъ произведеній каждаго члена множимаго на каждый членъ множителя, составленныхъ съ соблюденіемъ правила знаковъ; такъ членъ cr, представляющій произведеніе членовъ, имѣющихъ одинаковые знаки, является въ произведеніи съ знакомъ $+$, а членъ $-cq$ — произведеніе членовъ, имѣющихъ разные знаки, является въ произведеніи со знакомъ $-$. Итакъ, имѣемъ

Правило. — Для умноженія многочлена на многочленъ нужно каждый членъ множимаго помножить на каждый членъ множителя, соблюдая правило знаковъ, и если окажется возможно, сдѣлать приведеніе. —

Существенное въ этомъ правилѣ — то, что каждый членъ множимаго слѣдуетъ помножить на каждый членъ множителя съ соблюденіемъ правила знаковъ; порядокъ же частныхъ умноженій члена на членъ остается совершенно произвольнымъ.

Но во избѣжаніе ошибокъ (повтореній или пропусковъ) соблюдаютъ опредѣленный порядокъ, поступая двоякимъ образомъ:

1. Дѣлаютъ умноженіе въ томъ порядкѣ, на который мы натолкнулись при выводѣ правила, т. е. умножаютъ сначала первый членъ множимаго на каждый членъ множителя, затѣмъ второй членъ множимаго на каждый членъ множителя, и т. д. Или

2. Умножаютъ каждый членъ множимаго сначала на первый, затѣтъ на второй, и т. д. члены множителя.

Если многочлены содержатъ одну и туже букву, то для облегченія приведенія подобныхъ членовъ удобнѣе расположить оба многочлена или по убывающимъ, или по возрастающимъ степенямъ этой буквы. Затѣмъ, подписываютъ одинъ многочленъ подъ другимъ, проводятъ горизонтальную черту, умножаютъ множимое на первый членъ множителя и подписываютъ это частное произведеніе подъ чертою

Умножаютъ множимое на второй членъ множителя, и второе частное произведенiе пишутъ подъ первымъ, такъ чтобы подобные члены находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ.

Составляютъ и располагаютъ такимъ же образомъ и другiя частныя произведенiя; наконецъ, дѣлаютъ приведенiе.

Примѣръ I. Умножить

$$8x^4 - 5a^2x^2 - 2a^3x + 3ax^3 + a^4 \text{ на } 2ax^2 + 7a^3 - 6a^2x.$$

Расположивъ оба сомножителя по убывающимъ степенямъ буквы x, и соображаясь съ сказаннымъ, производимъ умноженiе такъ:

$$\begin{array}{ll}
\text{Множимое:} & 8x^4 + 3ax^3 - 5a^2x^2 - 2a^3x + a^4 \\
\text{Множитель:} & 2ax^2 - 6a^2x + 7a^3 \\
\hline
\text{1-ое частн. произв.} & 16ax^6 + 6a^2x^5 - 10a^3x^4 - 4a^4x^3 + 2a^5x^2 \\
\text{2-ое частн. произв.} & \quad - 48a^2x^5 - 18a^3x^4 + 30a^4x^3 + 12a^5x^2 - 6a^6x \\
\text{3-ье частн. произв.} & \quad\quad + 56a^3x^4 + 21a^4x^3 - 35a^5x^2 - 14a^6x + 7a^7 \\
\hline
\text{Полное произв.} & 16ax^6 - 42a^2x^5 + 28a^3x^4 + 47a^4x^3 - 21a^5x^2 - 20a^6x + 7a^7
\end{array}$$

Примѣръ II. Умножить $-\frac{3}{4}a^3x + \frac{4}{5}a^4 + \frac{5}{2}a^2x^2 + x^4 - \frac{2}{3}ax^3$ на $x^2 +$

$$+ \frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{2}ax.$$

Располагаемъ оба сомножителя по возрастающимъ степенямъ главной буквы x и производимъ дѣйствiе слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l}
\frac{4}{5}a^4 - \frac{3}{4}a^3x + \frac{5}{2}a^2x^2 - \frac{2}{3}ax^3 + x^4 \\
\frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{2}ax + x^2 \\
\hline
\frac{8}{15}a^6 - \frac{1}{2}a^5x + \frac{5}{3}a^4x^2 - \frac{4}{9}a^3x^3 + \frac{2}{3}a^2x^4 \\
\quad + \frac{6}{5}a^5x - \frac{9}{8}a^4x^2 + \frac{15}{4}a^3x^3 - a^2x^4 + \frac{3}{2}ax^5 \\
\quad\quad + \frac{4}{5}a^4x^2 - \frac{3}{4}a^3x^3 + \frac{5}{2}a^2x^4 - \frac{2}{3}ax^5 + x^6 \\
\hline
\frac{8}{15}a^6 + \frac{7}{10}a^5x + \frac{161}{120}a^4x^2 + \frac{23}{9}a^3x^3 + \frac{13}{6}a^2x^4 + \frac{5}{6}ax^5 + x^6.
\end{array}$$

Примѣръ III. Умножить $8x^5 - 3a^3x^2 - 5a^4x + a^5$ на $7x^2 - 8ax + a^2$.

Располагая дѣйствiе такимъ же образомъ какъ и въ предъидущихъ примѣрахъ, оставляя пустое мѣсто тамъ, гдѣ во множимомъ должны бы были находиться члены, содержащiе x^4 и x^3, имѣемъ:

$$\begin{array}{l}
8x^5 \qquad\qquad - 3a^3x^2 - 5a^4x + a^5 \\
7x^2 - 8ax + a^2 \\
\hline
56x^7 \qquad\qquad - 21a^3x^4 - 35a^4x^3 + 7a^5x^2 \\
\quad - 64ax^6 \qquad\qquad + 24a^4x^3 + 40a^5x^2 - 8a^6x \\
\quad\quad + 8a^2x^5 \qquad\qquad - 3a^5x^2 - 5a^6x + a^7 \\
\hline
56x^7 - 64ax^6 + 8a^2x^5 - 21a^3x^4 - 11a^4x^3 + 44a^5x^2 - 13a^6x + a^7.
\end{array}$$

Свойства произведенія двухъ полиномовъ.

36. I. Число членовъ произведенія. — Умножая множимое на первый членъ множителя, получаемъ первое частное произведеніе, имѣющее столько членовъ сколько ихъ и во множимомъ. Произведеніе множимаго на второй членъ множителя содержитъ опять столько членовъ, сколько ихъ во множимомъ, и т. д. Поэтому, если частныя произведенія не содержатъ подобныхъ членовъ, то *число членовъ произведенія равно будетъ произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя.* Напр., если множимое имѣетъ 7 членовъ, а множитель 5, то въ произведеніи будетъ 7×5 или 35 членовъ.

Но произведеніе двухъ многочленовъ можетъ содержать члены подобные; вслѣдствіе соединенія нѣсколькихъ подобныхъ членовъ въ одинъ, число членовъ произведенія можетъ уменьшиться, но никогда не можетъ сдѣлаться меньше двухъ. Въ самомъ дѣлѣ, легко доказать, что въ произведеніи двухъ полиномовъ, содержащихъ одну и ту-же букву x, всегда есть по крайней мѣрѣ два члена, которые не имѣютъ себѣ подобныхъ между другими членами произведенія, и потому *неприводимы.* Для доказательства замѣтимъ, что всякій членъ произведенія происходитъ отъ умноженія какого-либо члена множимаго на одинъ изъ членовъ множителя, и показатель главной буквы въ немъ равенъ суммѣ показателей тойже буквы въ членахъ множимаго и множителя, отъ которыхъ онъ произошелъ. Слѣдовательно, помноживъ высшій относительно главной буквы членъ множимаго на высшій членъ множителя, мы получимъ членъ произведенія, въ которомъ показатель главной буквы будетъ равенъ суммѣ *наибольшихъ* показателей той-же буквы, какіе имѣются въ сомножителяхъ; очевидно, что такой членъ произведенія будетъ имѣть главную букву съ показателемъ большимъ ея показателей въ другихъ членахъ произведенія; поэтому означенный членъ не можетъ имѣть себѣ подобныхъ между остальными членами произведенія и слѣд. есть *членъ неприводимый.* — Помножая нисшій относительно главной буквы членъ множимаго на нисшій членъ множителя, получимъ членъ произведенія, въ которомъ главная буква будетъ имѣть показатель, равный суммѣ наименьшихъ показателей тойже буквы въ сомножителяхъ, слѣд. показатель главной буквы этого члена будетъ меньше чѣмъ въ другихъ членахъ произведенія, а потому это будетъ также *членъ неприводимый.* Заключаемъ, что произведеніе двухъ многочленовъ содержитъ, по меньшей мѣрѣ, два неприводимыхъ члена — высшій и нисшій относительно главной буквы. Итакъ:

наибольшее число членовъ произведенія равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя, наименьшее же — два члена.

Примѣчаніе. Когда множимое и множитель расположены по нисходящимъ или восходящимъ степенямъ главной буквы, то неприводимые члены (высшій и низшій) занимаютъ крайнія мѣста произведенія.

Нижеслѣдующій примѣръ представляетъ одинъ изъ случаевъ, когда произведеніе имѣетъ только два члена,

$$\begin{array}{l} x^4+x^3+x^2+x+1 \\ x-1 \\ \hline x^5+x^4+x^3+x^2+x \\ \quad\; -x^4-x^3-x^2-x-1 \\ \hline x^5 \qquad\qquad\qquad\quad -1 \end{array}$$

II. Свойство произведенія однородныхъ многочленовъ. — Произведеніе двухъ однородныхъ многочленовъ есть многочленъ однородный, а измѣреніе его равно суммѣ измѣреній множителей. Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе двухъ какихъ-нибудь членовъ множимаго и множителя имѣетъ измѣреніе равное суммѣ показателей перемножаемыхъ членовъ; но оба многочлена однородны, слѣд. эта сумма во всѣхъ членахъ произведенія будетъ одинакова, т. е. произведеніе само будетъ однородно, а его измѣреніе равно суммѣ измѣреній сомножителей.

Такъ, многочленъ $a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4$ есть однородный многочленъ четырехъ измѣреній; $a-x$ есть однородный двучленъ одного измѣренія; произведеніе же ихъ a^5-x^5 — однородное выраженіе пяти измѣреній.

Замѣчательные случаи умноженія.

37. Разсмотримъ нѣкоторые часто встрѣчающіеся особенные случаи умноженія.

I. Пусть требуется суму $a+b$ возвысить въ квадратъ. Для этого надо $a+b$ помножить само на себя:

$$\begin{array}{l} \quad a+b \\ \quad a+b \\ \hline a^2+ab \\ \qquad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

Итакъ: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, т. е.

квадратъ суммы двухъ количествъ равенъ: квадрату перваго члена, + удвоенное произведеніе перваго члена на второй, + квадратъ втораго.

Напримѣръ, $(5x^2+2y)^2=(5x^2)^2+2.5x^2.2y+(2y)^2=25x^4+20x^2y+4y^2$.

II. Возвысимъ въ квадратъ разность $a-b$:

$$\begin{array}{l} \quad a-b \\ \quad a-b \\ \hline a^2-ab \\ \qquad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2. \end{array}$$

Слѣдовательно: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, т. е.

квадратъ разности двухъ количествъ равенъ квадрату перваго члена, — удвоенное произведеніе перваго на второй, + квадратъ втораго.

Напр. $(0{,}3ax-x^2)^2=(0{,}3ax)^2-2.0{,}3ax.x^2+(x^2)^2=0{,}09a^2x^2-0{,}6ax^3+x^4$.

III. Умножимъ сумму двухъ количествъ a и b на ихъ разность:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \qquad \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \qquad -b^2. \end{array}$$

Итакъ: $(a+b)(a-b=a^2-b^2$, т. е.

произведеніе суммы двухъ количествъ на ихъ разность равно разности ихъ квадратовъ.

Напр. $(4x^2y+\frac{2}{3}xy^2)(4x^2y-\frac{2}{3}xy^2)=(4x^2y)^2-\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2=16x^4y^2-\frac{4}{9}x^2y^4$.

IV. Найдемъ кубъ суммы $a+b$. Замѣчая, что $(a+b)^3=(a+b)^2.(a+b)$, и что $(a+b)^2=a^2+2b+b^2$, мы найдемъ искомый результатъ, умноживъ a^2+2b+b^2 на $a+b$:

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \end{array}$$

Слѣдовательно: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, т. е.

кубъ суммы двухъ количествъ равенъ: кубу перваго члена, + утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, + утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ втораго, + кубъ втораго.

Напр. $(2a^2+4b^2)^3=(2a^2)^3+3.(2a^2)^2.4b^2+3.(2a^2)(4b^2)^2+(4b^2)^3=8a^6+$
$+48a^4b^2+96a^2b^4+64b^6$.

V. Такимъ же образомъ найдемъ $(a-b)^3$, умноживъ $(a-b)^2$ или a^2-2ab $+b^2$ на $a-b$:

$$\begin{array}{l} a^2-2ab+b^2 \\ a-b \\ \hline a^3-2a^2b+ab^2 \\ \quad -a^2b+2ab^2-b^3 \\ \hline a^3-3a^2b+3ab^2-b^3, \end{array}$$

Слѣдовательно: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, т. е.

кубъ разности двухъ членовъ равенъ кубу перваго члена, минусъ утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, + утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ втораго, минусъ кубъ втораго члена.

Напр. $\left(\frac{1}{2}-3x^2\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3.\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3x^2+3.\frac{1}{2}\cdot(3x)^2-(3x^2)^3=\frac{1}{8}-\frac{9}{4}x^2$
$+\frac{27}{2}x^4-27x^6$.

38. Формула n⁰ II можетъ быть выведена изъ формулы n⁰ I, если въ послѣдней положить $b=-b'$; находимъ

$$[a+(-b')]^2=a^2+2a(-b')+(-b')^2.$$

Замѣтивъ, что $a+(-b')=a-b'$; затѣмъ, что $+2a(-b')=-2ab'$, и что $(-b')^2=+b'^2$, имѣемъ

$$(a-b')^2=a^2-2ab'+b'^2.$$

Такимъ же образомъ, подставляя въ формулу n⁰ IV вмѣсто b количество $-b'$, получаемъ

$$[a+(-b')]^3=a^3+3a^2(-b')+3a(-b')^2+(-b')^3.$$

Замѣчая, что $a+(-b')=a-b'$, что $+3a^2(-b')=-3a^2b'$, что $+3a(-b')^2=+3ab'^2$ и что $(-b')^3=-b'^3$, имѣемъ

$$(a-b')^3=a^3-3a^2b'+3ab'^2-b'^3.$$

Приложенія.

39. Приложимъ формулы § 37 къ нѣсколькимъ примѣрамъ.

Примѣръ I. Возвысить 79 въ квадратъ.

По формулѣ n⁰ I имѣемъ:

$$79^2=(70+9)^2=4900+1260+81=6241.$$

Примѣръ II. Возвысить 97 въ квадратъ.

По формулѣ n⁰ II имѣемъ

$$97^2=(100-3)^2=10000-600+9=9409.$$

Примѣръ III. Помножить 103 на 97.

По формулѣ n⁰ III находимъ:

$$103\times 97=(100+3)(100-3)=10000-9=9991.$$

Примѣръ IV. Преобразовать:

$$(3a^2-2ab+3b^2)(3a^2+2ab-3b^2).$$

Первый множитель можно представить въвидѣ $3a^2-(2ab-3b^2)$; второй — въ видѣ $3a^2+(2ab-3b^2)$; примѣняя формулу n⁰ III, получимъ:

$$(3a^2)^2-(2ab-3b^2)^2,$$

или, выполняя дѣйствія:

$$9a^4-4a^2b^2+12ab^3-9b^4.$$

Примѣръ *V*. Умножить $x+y+z-t$ на $x+y-z+t$.

Представивъ данныя выраженія въ видѣ

$$(x+y)+(z-t) \text{ и } (x+y)-(z-t)$$

и примѣняя формулу n⁰ III, находимъ

$$(x+y)^2-(z-t)^2.$$

Прилагая сюда теоремы nn. I и II, получимъ

$$(x^2+2xy+y^2)-(z^2-2zt+t^2),$$

или, раскрывъ скобки:

$$x^2+2xy+y^2-z^2+2zt-t^2.$$

Примѣръ *VI*. Составить произведеніе

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Первые два множителя можно представить въ видѣ

$$(a+b)+c \text{ и } (a+b)-c;$$

ихъ произведеніе $=$

$$(a+b)^2-c^2 \text{ или } a^2+2ab+b^2-c^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Третій и четвертый множители пишемъ въ видѣ

$$c+(a-b) \text{ и } c-(a-b);$$

ихъ произведеніе равно

$$c^2-(a-b)^2 \text{ или } c^2-a^2+2ab-b^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Представивъ (1) и (2) въ формѣ

$$2ab+(a^2+b^2-c^2) \text{ и } 2ab-(a^2+b^2-c^2)$$

и перемноживъ эти выраженія, имѣемъ:

$$(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2 \text{ или } 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2.$$

Чтобы триномъ $a^2+b^2-c^2$ возвысить въ квадратъ, разсматриваемъ на-время a^2+b^2 какъ одинъ членъ; положивъ, что $a^2+b^2=s$, имѣемъ:

$$(a^2+b^2-c^2)^2=(s-c^2)^2=s^2-2sc^2+c^4.$$

Подставляя вмѣсто s его величину a^2+b^2, получимъ

$$s^2-2s.c^2+c^4=(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)c^2+c^4=a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4.$$

Итакъ, искомое произведеніе равно

$$4a^2b^2-a^4-2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4, \text{ или } 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

Примѣръ *VII*. Возвысить въ квадратъ многочленъ $1+x-x^2+x^3$.

Въ предыдущемъ примѣрѣ намъ пришлось возвышать въ квадратъ триномъ $a^2+b^2-c^2$; для этого мы обозначили двучленъ a^2+b^2 одною буквою s, и черезъ это получили возможность примѣнить къ данному случаю формулу квадрата бинома. Вообще указанный пріемъ можно съ удобствомъ примѣнять при возвышеніи многочленовъ въ квадратъ и кубъ. Такъ, въ данномъ выраженіи положимъ на время $1+x-x^2=s$; данный многочленъ приметъ видъ $s+x^3$; возвышая въ квадратъ, получимъ

$$(s+x^3)^2=s^2+2s.x^3+x^6=(1+x-x^2)^2+2(1+x-x^2)x^3+x^6.$$

Полагая въ членѣ $(1+x-x^2)^2$ на время $1+x=t$, найдемъ:

$$(1+x-x^2)^2=(t-x^2)^2=t^2-2tx^2+x^4=(1+x)^2-2(1+x)x^2+x^4=$$
$$=1+2x+x^2-2x^2-2x^3+x^4.$$ Слѣд., данное выраженіе равно $1+2x+x^2-$
$$-2x^2-2x^3+x^4+2x^3+2x^4-2x^5+x^6, \text{ или } 1+2x-x^2+3x^4-2x^5+x^6.$$

40. Задачи.

Перемножить одночены:

1. $-5x^2z^3$ на $0{,}02nx^7z^5$.
2. $-0{,}44\ldots a^{x-1}b^{y+p}z^3$ на $0{,}54a^4b^{y-p+3}z^ku^6$.
3. Произведеніе $-2\frac{2}{3}(a^2-b^2)^{p+1}(c-d)^{q^2+2q+1}x^5$ и $5(a^2-b^2)^{p-1}(c-d)^{q^2-2q+1}$

умножить на произведеніе $-5{,}0333\ldots(a^2-b^2)^6(c-d)^{1-q^2}x^2$ и $\frac{3}{5}(a^2-b^2)^{p+2}(c-d)^2xy^7$.

Произвести умноженіе:

4. $(2a^2b - 3cd^2 + \frac{1}{2}ac^2 - 5) \times -0{,}6ac^2d^2$.

5. $(8c^2 + 4cd^3 - 2c^3x - 3) \times -\frac{2}{3}a^mc^n$.

6. $(3x^{2m-1} - \frac{3}{7}y^{3n-5} + x^{2m}y^{3n} - y^2 - 3) \times -x^{3-2m}y^{6-3n}$.

7. $25x^{2-m-2n} \times (24x^{m+2n-1} - 42x^{2m-3n+2} + 25x^{2n+3m-2})$.

8. $\frac{-3}{5}y^{2p-m+1} \times (70y^{m-p-1} - 65y^{2-3m-2p} + 5y^{2p+m})$.

9. $(x^5 - 5cx^4 + \frac{1}{3}c^2x^3 - 9c^3x^2 + \frac{1}{4}c^4x) \,.\, (8x^3 + 7cx^2 - \frac{1}{9}c^2x - c^3)$.

10. $(0{,}7a^8 - 0{,}4a^6 + 0{,}2a^4 - 0{,}6a^2 + 0{,}3).(0{,}4a^5 - 2a^3 - 0{,}6a)$.

11. $(2{,}44\ldots xy^4 - \frac{3}{7}x^2y^3 - 0{,}66\ldots x^3y^2 + \frac{3}{5}x^4y).(3y^2 - 0{,}4xy - \frac{3}{4}x^2)$.

12. $(a^p - 3a^{p-1} + 4a^{p-2} - 6a^{p-3} + 5a^{p-4}).(2a^3 - a^2 + a)$.

13. $(3x^{4n+1} - 4x^{3n} + 2x^{2n-1} - x^{n-2}).(2x^{4n-1} - 5x^{3n} - 2x^{2n-1} + x^{n-2})$.

14. $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{6} + 1 - \frac{x^3}{5} - \frac{x}{3}\right) \cdot \left(2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{2}\right)$.

15. $(5x - 2y)(x^2 - 2xy + 3y^2 - 8) + (2x^2 + 2xy - 5y^2 + 10)(5x - 2y) -$
$- (3x^2 - 2y^2 + 2)(5x - 2y)$.

16. $(2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4).(x^4 - x^2 + x - 1)$.

17. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$.

18. $(x - 5)(x + 6)(x - 7)(x + 8)$.

19. $(x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1)(x^2 - 7x + 1)$.

20. Возвысить въ квадратъ каждый изъ слѣдующихъ биномовъ:

$2x^3 - 1$; $3a^2b + cd^2$; $5ax^2 - 2b^3$; $4ax - 7b^2$: $-0{,}5x^2y + 4x^3$.

21. Возвысить въ квадратъ выраженія:

$ab + bc - ac$; $a + b + c + d$; $a + b - c - d$; $2p^2 + 3x^4 - 2xy - y^2$; $a^2 - 5b^3 + 2a - 3b^2$;

$\frac{1}{2}x^2 - 4y + \frac{2}{3}y^2 + 6z^3$; $0{,}6m^2 - \frac{1}{2}n + 0{,}8p^3 - 3x^5$.

22. Возвысить въ кубъ биномы:

$2x^2 + 1$; $5x^2 - 1$; $3x - 4b$; $bc^2 - ab^2$; $m^2n + p^2q$; $8z^4 - 9$.

23. Возвысить въ кубъ выраженія:

$x^2 + x + 1$; $2x^2 - x + \frac{1}{3}$; $x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - y^3$.

24. Примѣнить формулу $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ къ умноженію въ слѣдующихъ примѣрахъ:

$(a^2 + 3x) \times [-(3x - a^2)]$; $(5 - bx^2).(bx^2 + 5)$; $(6m + 7n^4).(7n^4 - 6m)$;

$(a - b + c).(a - b - c)$; $(x^2 + y^2 - xy).(x^2 + y^2 + xy)$; $(2x - y - 3z).(2x - y + 3z)$;

$(a + 2b + 3c + d).(a - 2b + 3c - d)$; $(1 + x - 3x^3 - 2x^2).(1 + x + 2x^2 + 3x^3)$;

$(2 + a^2 + 3a^3 + d^2).(2 - a^2 + 3a^3 - d^2)$; $(a^4 + a^2b^2 + b^4).(a^4 - a^2b^2 + b^4)$.

$\left\{(1 + ab)x + (a - b)\right\}.\left\{(1 - ab)x - (a + b)\right\}$.

$$[a^2+b^2(x-1)+c^2(y-1)].[a^2-b^2(x+1)-c^2(y+1)].$$
$$(a^2+9b^2)(a+3b)(a-3b)(a^4-81b^4).$$
$$(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3).$$
$$(x-a)(x+a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$$
$$(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a+c+d-b)(b+c+d-a).$$
$$(3x^5-7ax^4+5a^3x^2-a^5)(3x^5+7ax^4-5a^3x^2-a^5).$$
$$(a+2x+3y)(a+2x-3y)(a-2x+3y)(-a+2x+3y).$$

25. Приложить теоремы I, II, III и др. § 37 къ слѣдующимъ примѣрамъ:

588^2; 489^2; 408^2; 698^2; 305×306; 999^2; 312×288; 101×99; 911×889; 520×480; 209×191; 84×76; 125×115; 42^3; 104^3; 98^3; 101^3; 999^3.

26. Упростить выраженіе

$$(x+y+z)^3-3(y+x)(y+z)(x+z).$$

27. Прилагая правило умноженія, доказать справедливость равенствъ

$$(P^2-PQ+Q^2).(P+Q)=P^3+Q^3$$
и $$(P^2+PQ+Q^2)(P-Q)=P^3-Q^3;$$

и примѣнить ихъ къ умноженію въ слѣдующихъ примѣрахъ:

$$(4x^2-2xy+y^2).(2x+y)$$
$$(4x^2+6x+9).(2x-3)$$
$$(9a^2x^2-21axy+49y^2).(3ax+7y)$$
$$(a^2y^2-abxy+b^2x^2).(ay+bx)$$
$$(x^4+x^2y^2+y^4)(x^2-y^2)$$
$$[a^2x^2+axy(x+y)+y^2(x+y)^2].[ax-y(x+y)].$$
$$\left\{a^2x^2+abx(x-a)+b^2(x-a)^2\right\}.\left\{x(a-b)+ab\right\}.$$
$$\left\{a^2(x+y)^2-ab(x^2-y^2)+b^2(x-y)^2\right\}.\left\{x(a+b)+y(a-b)\right\}.$$

28. При помощи теоремъ I и II § 37 доказать справедливость равенствъ

$$(P+Q)^2+(P-Q)^2=2(P^2+Q^2) \;\ldots\ldots\; (1)$$
$$(P+Q)^2-(P-Q)^2=4PQ \;\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

Изъ (2) вывести:

$$(P+Q)^2-4PQ=(P-Q)^2 \;\ldots\ldots\; (3)$$
$$(P-Q)^2+4PQ=(P+Q)^2 \;\ldots\ldots\; (4).$$

При помощи формулъ (1) и (2) доказать справедливость преобразованій, указанныхъ въ слѣдующихъ равенствахъ:

$$(a+b-c+d)^2+(a-b+c+d)^2=2\left\{(a+d)^2+(b-c)^2\right\}.$$
$$(a+b-c+d)^2-(a-b+c+d)^2=4(a+d)(b-c).$$
$$(1+ab+a+b)^2+(1-ab+a-b)^2=2\left\{(1+a)^2+(ab+b)^2\right\}.$$
$$(1+ab+a+b)^2-(1-ab+a-b)^2=4(1+a)(ab+b)=4b(1+a)^2.$$

При помощи формулъ (3) и (4) доказать справедливость равенствъ

$$(ad+bc)^2-4abcd=(ad-bc)^2$$
$$(3ax+by)^2-12abxy=(3ax-by)^2$$
$$(ad-bc)^2+4abcd=(ad+bc)^2.$$
$$\left\{bc(a-d)+ad(b-c)\right\}^2+4abcd(a+b)(c+d)=\left\{ab(c+d)+cd(a+b)\right\}^2.$$

29. Приложить равенства (1) и (2) къ слѣдующимъ выраженіямъ:

$$(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2.$$
$$(a+b+c+d)^2+(a-b-c+d)^2.$$
$$(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2.$$
$$(x^2+xy+y^2)^2+(x^2-xy+y^2)^2.$$
$$\{a(x+y)+b(x-y)\}^2+\{a(x-y)+b(x+y)\}^2.$$

Взять тѣ-же равенства съ знакомъ — между полиномами.

30. Приложить равенство (3) къ преобразованію слѣдующихъ выраженій:

$$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2.$$
$$(2a+b+c)^2-4(a+b)(a+c).$$
$$36a^2-4(3a+b-c)(c+3a-b).$$
$$\{a(b+c)+b^2+c^2\}^2-4[a^2+a(b+c)+bc].bc.$$

31. Приложить равенство (4) къ преобразованію выраженій:

$$(x^3-y^3)^2+4x^3y^3.$$
$$(1-ax-a+b)^2+4(a+ab)(1+x).$$
$$(a+2b+c)^2+4(a-b)(2a+b+c).$$
$$(4a^2-6ab-b^2)^2+20a(a^3-b^3).$$

32. Доказать справедливость слѣдующихъ равенствъ, изъ которыхъ послѣднее извѣстно подъ именемъ *равенства Лагранжа.*

$$(MA+NB)^2+(NA-MB)^2=(A^2+B^2)(M^2+N^2).$$
$$(MA-NB)^2-(NA-MB)^2=(A^2-B^2)(M^2-N^2).$$
$$(A^2+B^2+C^2)(A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2)-(AA'+BB_1+CC_1)^2=(AB_1-BA_1)^2+$$
$$+(BC_1-CB_1)^2+(CA_1-AC_1)^2.$$

33. Упростить выраженіе

$$(x-y)^3+(x+y)^3+3(x-y)^2(x+y)+3(x+y)^2(x-y).$$

34. Даны четыре полинома

$$A=a+b+c+d,$$
$$B=a+b-c-d,$$
$$C=a-b+c-d,$$
$$D=a-b-c+d;$$

составить выраженіе $AB(A^2+B^2)-CD(C^2+D^2)$, и провѣрить результатъ.

35. Если въ триномѣ

$$Ax^2+Bxy+Cy^2$$

положить; $x=ax'+by'$ и $y=bx'-ay'$, то получимъ полиномъ вида

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2;$$

доказать, что

$$B_1{}^2-4A_1C_1=(B^2-4AC\ (a^2+b^2)^2.$$

36. Представить

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2)-(aa_1+bb_1+cc_1+dd')^2$$

въ видѣ слѣдующей суммы шести квадратовъ:

$$(ab'-ba')^2+(ac'-ca'\ ^2+(ad'-da')^2+(bc'-cb')^2+(bd'-db')^2+(cd'-dc')^2.$$

37. Провѣрить равенство:

$$15x^2(y^2-z^2)^2+15y^2(x^2-z^2)^2+15z^2(x^2-y^2)^2+x^2(2x^2-y^2-z^2)^2$$
$$+y^2(2y^2-x^2-z^2)^2+z^2(2z^2-x^2-y^2)^2=4(x^2+y^2+z^2)^3-108x^2y^2z^2.$$

38. Провѣрить равенство:

$$4\left\{(a^2-b^2)xy+(x^2-y)^2ab\right\}^2+\left\{(a^2-b^2)(x^2-y^2)-4axby\right\}^2=$$
$$(a^2+b^2)^2.(x^2+y^2)^2.$$

ГЛАВА V.

Дѣленіе.

Опредѣленіе. — Правило знаковъ. — Правило показателей; значеніе символовъ a^{-q} и a^0.—Дѣленіе одночленовъ; признаки невозможнаго дѣленія ихъ.—Дѣленіе многочлена на одночленъ.—Дѣленіе многочлена на многочленъ.—Признаки невозможнаго дѣленія многочленовъ.—Замѣчательные случаи дѣленія (теорема Безу).—Задачи.

41. Опредѣленіе. — Раздѣлить одно количество на другое значитъ найти такое третье количество, которое, будучи умножено на второе, дало бы въ произведеніи первое. — Первое данное количество называется *дѣлимымъ*, второе — *дѣлителемъ*, а искомое количество — *частнымъ*. —

Если дѣлимое есть A, дѣлитель B, а частное Q, то, по опредѣленію дѣйствія, связь между этими тремя количествами выразится равенствомъ:

$$Q\times B=A.$$

42. Правило знаковъ. — Основываясь на опредѣленіи дѣленія и на правилѣ знаковъ при умноженіи, легко найти правило знаковъ при дѣленіи.

Пусть требуется $(+a)$ раздѣлить на $(+b)$. По опредѣленію дѣленія, частное, умноженное на дѣлителя, должно давать дѣлимое; но только количество, предшествуемое знакомъ $+$, при умноженіи на $(+b)$ можетъ дать $(+a)$. Слѣдов.

$$(+a):(+b)=+q.$$

При дѣленіи $(-a)$ на $(+b)$, въ частномъ должно быть $(-q)$, потому-что только количество, предшествуемое знакомъ $-$, при умноженіи на $(+b)$ можетъ дать $(-a)$. Итакъ

$$(-a):(+b)=-q.$$

Дѣля $(+a).(-b)$ мы ищемъ количество, которое, будучи умножено на $(-b)$, давало-бы $(+a)$; но какъ только количество со знакомъ $-$, при умноженіи на $(-b)$, можетъ дать $(+a)$, то

$$(+a):(-b)=-q.$$

Наконецъ, припоминая, что при уможеніи $(-)$ на $(+)$ даетъ $(-)$, находимъ:

$$(-a):(-b)=+q.$$

Итакъ:

$$(+a):(+b)=+q.$$
$$(-a):(+b)=-q.$$
$$(+a):(-b)=-q.$$
$$(-a):(-b)=+q.$$

Отсюда вытекаетъ *правило: при дѣленіи количествъ съ одинаковыми знаками, въ частномъ получается* $(+)$, *при дѣленіи же количествъ съ разными знаками* $(-)$.

Правило это — совершенно общее: оно относится и къ тому случаю, когда знаки стоятъ передъ абсолютными величинами количествъ, и къ тому — когда a и b сами суть количества положительныя или отрицательныя. Въ самомъ дѣлѣ, выводъ правила основанъ на правилѣ знаковъ при умноженіи, а это послѣднее правило доказано для какихъ угодно количествъ.

43. Правило показателей. — Разсмотримъ дѣленіе степеней одного и того же основанія: пусть требуется раздѣлить a^m на a^n, гдѣ a — какое угодно количество, а m и n — числа цѣлыя и положительныя. Замѣтивъ, что въ частномъ долженъ получиться нѣкоторая степень буквы a, назовемъ неизвѣстнаго показателя этой степени буквою x, такъ-что частное выразится формулою a^x:

$$a^m:a^n=a^x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

По опредѣленію дѣленія, частное, умноженное на дѣлителя, должно давать дѣлимое, слѣд.

$$a^x.a^n=a^m;$$

но, по правилу показателей при умноженіи, $a^x.\ a^n=a^{x+n}$, слѣд. имѣемъ равенство:

$$a^{x+n}=a^m.$$

Но степени одного и того же основанія тогда будутъ равны, когда показатели ихъ равны, а потому должно быть

$$x+n=m.$$

Чтобы по извѣстной суммѣ (m) и извѣстному слагаемому (n) найти другое слагаемое (x), нужно изъ суммы вычесть извѣстное слагаемое. Итакъ

$$x=m-n.$$

Подставляя въ равенство (1) вмѣсто x найденную величину, имѣемъ:

$$a^m:a^n=a^{m-n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Осюда *правило: при дѣленіи степеней одного и того же основанія нужно: основаніе въ частномъ написать тоже самое, а изъ показателя дѣлимаго вычесть показатель дѣлителя.* —

Изслѣдованіе. — Формула (2) даетъ мѣсто слѣдующимъ случаямъ:

$$1) m>n; 2) m=n; 3) m<n.$$

1-й случай. — Если $m>n$, то разность $m-n$ даетъ *положительное* (цѣлое) *число*, и частное a^{m-n} подходитъ подъ вышеданное опредѣленіе степени какъ произведенія, равныхъ количеству a, множителей. Такъ, если $m=8$, а $n=5$, то $a^m:\ a^n=a^{8-5}=a^3$, т. е. $a.a.a.$, и т. д. Этотъ случай не представляетъ, слѣдовательно, ничего особеннаго.

2-й случай. Если $m = n$, то разность $m - n$ равна нулю, и частное принимаетъ видъ a^0. Выраженіе a^0 само по себѣ не имѣетъ никакого смысла, т. е. его нельзя разсматривать въ смыслѣ степени, ибо показатель долженъ означать, сколько разъ основаніе берется множителемъ. Значеніе символа a^0 откроется, если мы обратимъ вниманіе на его происхожденіе. При $m = n$ дѣлимое a^m и дѣлитель a^n дѣлаются равными, а частное отъ раздѣленія количества самого на себя есть 1; поэтому

$$a^0 = 1,$$

а такъ какъ a означаетъ какое угодно количество, то заключаемъ, что *всякое количество въ нулевой степени даетъ единицу.*

Такимъ образомъ: $7^0 = 1$; $x^0 = 1$; $(a^2 - b^2)^0 = 1$ и т. п.

Здѣсь самъ собою возникаетъ вопросъ: если мы знаемъ, что $a^m : a^m$ есть ничто иное какъ 1, то для чего замѣняютъ 1 особымъ символомъ a^0, имѣющимъ только видъ степени, но не имѣющимъ смысла какъ степень. Это дѣлается для того, во-первыхъ, чтобы въ правилѣ показателей не дѣлать исключенія для случая $m = n$, другими словами, — въ видахъ *обобщенія* этого правила; и, во-вторыхъ, чтобы имѣть возможность сохранить въ частномъ букву a, которая иначе не вошла-бы въ частное, ибо была бы замѣнена единицею.

3-й случай. — Если $m < n$, то разность $m - n$ отрицательна; напр: если n превышаетъ m на q единицъ, то $m - n = -q$, и частное имѣетъ видъ a^{-q}. Выраженіе a^{-q} опять не имѣетъ значенія степени, ибо a нельзя взять множителемъ отрицательное число разъ. Чтобы выяснить значеніе символа a^{-q}, постараемся частное, въ случаѣ $m < n$, выразить въ иной формѣ.

Полагая, что n больше m на q единицъ, т. е. $n = m + q$, можемъ частное $a^m : a^n$ представить въ видѣ $a^m : a^{m+q}$. Обозначивъ его буквою x, имѣемъ

$$a^m : a^{m+q} = x.$$

По опредѣленію дѣленія, имѣемъ отсюда

$$xa^{m+q} = a^m.$$

Раздѣливъ обѣ части этото равенства на a^m, находимъ:

$$\frac{xa^{m+q}}{a^m} = \frac{a^m}{a^m}.$$

Замѣтивъ, что частное $\frac{xa^{m+q}}{a^m}$ равно xa^q (ибо, умноживъ его на дѣлителя a^m, находимъ въ результатѣ дѣлимое xa^{m+q}), и что $\frac{a^m}{a^m} = 1$, получаемъ равенство

$$x.a^q = 1,$$

откуда

$$x = \frac{1}{a^q}.$$

Но то-же самое частное было представлено въ формѣ a^{-q}; поэтому

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q}.$$

Такъ-какъ a означаетъ какое угодно количество, то заключаемъ, что *всякое количество съ отрицательнымъ показателемъ равно единицѣ, дѣленной на тоже количество съ положительнымъ показателемъ.*

Такимъ образомъ:

$$a^{-3}=\frac{1}{a^3};\qquad (a^2-b^2)^{-5}=\frac{1}{(a^2-b^2)^5}\text{ и т. п.}$$

Отрицательные показатели введены для того, чтобы: во первыхъ, въ правилѣ показателей не дѣлать исключенія для того случая, когда показатель дѣлимаго меньше показателя дѣлителя, т. е. въ видахъ *обобщенія* этого правила; и во-вторыхъ, чтобы имѣть возможность дробь (какъ $\frac{1}{a^q}$) изображать безъ знаменателя, т. е. въ формѣ цѣлаго алгебраическаго выраженія.

Итакъ, вводя показатели — нуль и отрицательный, мы можемъ всѣ случаи дѣленія степеней одного и того-же основанія совершать по одному общему правилу: основаніе писать въ частномъ безъ перемѣны, а надъ нимъ показателя, равнаго разности показателей дѣлимаго и дѣлителя.

Дѣленіе одночленовъ.

44. Пусть требуется раздѣлить $63a^9b^8c^5d^2$ на $-9a^4b^5c$. Знакъ частнаго долженъ быть (—), потому что дѣлимое и дѣлитель имѣютъ разные знаки. По опредѣленію дѣленія, въ частномъ должно быть такое количество, которое, будучи умножено на дѣлителя, давало-бы дѣлимое; слѣд., коэффиціентъ частнаго есть такое число, которое, по умноженіи на 9, давало бы 63; такое число мы найдемъ, раздѣливъ 63 на 9: получимъ 7. Далѣе, чтобы въ произведеніи имѣть a^9, надо a^4 умножить на a^5; слѣд. буква a войдетъ въ частное съ показателемъ равнымъ разности показателей этой буквы въ дѣлимомъ и дѣлителѣ. Такимъ же точно образомъ убѣдимся, что буква b войдетъ въ частное — съ показателемъ 3, а буква c — съ показателемъ 4. Наконецъ, чтобы въ произведеніе вошло d^2, необходимо, — такъ какъ буквы d нѣтъ въ дѣлителѣ, — чтобы она вошла въ частное съ тѣмъ показателемъ, какой она имѣетъ въ дѣлимомъ. Итакъ

$$63a^9b^8c^5d^2:-9a^4b^5c=-7a^5b^3c^4d^2.$$

Отсюда имѣемъ

Правило. — Чтобы найти частное отъ раздѣленія одного одночлена на другой нужно: 1) коэффиціентъ дѣлимаго раздѣлить на коэффиціентъ дѣлителя; 2) а затѣмъ написать всѣхъ множителей дѣлимаго — каждаго съ показателемъ, равнымъ разности его показателей въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ.

Въ частномъ случаѣ, если какой либо множитель находится только въ дѣлимомъ, онъ входитъ въ частное безъ измѣненія показателя; если же какой либо множитель имѣетъ въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ одинаковаго показателя, то въ частное войдетъ съ нулевымъ показателемъ. Напримѣръ

$$4a^2b^3c^5:2ab^3c=2ab^0c^4.$$

Но, какъ $b^0=1$, то можно частное представить въ видѣ $2ac^4$.

Примѣняя это правило, найдемъ, что:

$$1)\quad 92a^3b^5x^2y^9:23a^2b^4x^2y^5=4aby^4.$$

$$2)\quad 35a^3b^2(x+y)^4(x-2y)^3:-7a^2(x+y)^3(x-2y)=-5ab^2(x+y)(x-2y)^2.$$

$$3)\quad -24a^3b^4(a^2-b^2)(x+3y)^5:-8b^4(x+3y)^2=3a^3(a^2-b^2)(x+3y)^3.$$

45. Признаки невозможнаго дѣленія одночленовъ. — Дѣленіе цѣлыхъ одночленовъ называется возможнымъ, если частное можетъ быть выражено *цѣлою* формулою, т. е. не содержащею буквенныхъ дѣлителей; въ противномъ случаѣ, т. е. когда частное получается въ формѣ алгебраической дроби, дѣленіе считается *невозможнымъ*.

Изъ самого опредѣленія невозможнаго въ алгебраическомъ смыслѣ дѣленія слѣдуетъ, что если не дѣлятся другъ на друга только численные коэффиціенты, то дѣленіе слѣдуетъ считать алгебраически возможнымъ. Напр. дѣля $4a^3b^2c$ на $3a^2b$, получимъ въ частномъ $\frac{4}{3}abc$ — выраженіе алгебраически цѣлое, такъ какъ оно не содержитъ буквенныхъ дѣлителей.

Дѣленіе одночленовъ невозможно въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ:

1) Когда показатель хотя одной буквы дѣлителя больше покателя той же буквы въ дѣлимомъ. Такъ дѣленіе $6a^3b^2$ на $2ab^4$ невозможно, потому что на какой-бы *цѣлый* одночленъ ни умножили дѣлителя, всегда въ произведеніе буква b войдетъ съ показателемъ, большимъ 2: частное не можетъ быть, поэтому, выражено цѣлымъ одночленомъ.

Въ такомъ случаѣ дѣленіе только обозначается, и получается дробь

$$\frac{6a^3b^2}{2ab^4};$$

послѣдняя, какъ будетъ показано далѣе, можетъ быть упрощена сокращеніемъ.

2) Когда дѣлитель содержитъ такую букву, которой нѣтъ въ дѣлимомъ; напр. $4a^3b$ не дѣлится на $3a^2bd^2$. Въ самомъ дѣлѣ, на какой-бы цѣлый одночленъ мы ни умножили дѣлителя, въ произведеніе непремѣнно войдетъ буква d, которой нѣтъ въ дѣлимомъ, а слѣд. частное не можетъ быть представлено цѣлымъ одночленомъ.

Обозначая дѣленіе, получимъ дробь

$$\frac{4a^3b}{3a^2bd^2}$$

которая также подлежитъ сокращенію.

Дѣленіе многочлена на одночленъ.

46. Пусть требуется раздѣлить многочленъ $a - b + c - d$ на одночленъ m. Частное не можетъ быть одночленомъ, потому что умноживъ одночленъ на одночленъ (m), въ произведеніи найдемъ одночленъ, между тѣмъ какъ должны получить многочленъ $a - b + c - d$. Итакъ, частное должно быть — многочленъ, для нахожденія котораго имѣемъ слѣдующее

Правило. — Чтобы найти частное отъ раздѣленія многочлена на одночленъ, нужно каждый членъ дѣлимаго раздѣлить на дѣлителя, соблюдая правило знаковъ.

Это правило доказывается à posteriori. Мы говоримъ, что

$$\frac{a-b+c-d}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} - \frac{d}{m}.$$

Для доказательства умножаемъ частное на дѣлителя; по правилу умноженія многочлена на одночленъ находимъ:

$$\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}\right)\cdot m=\frac{a}{m}\cdot m-\frac{b}{m}\cdot m+\frac{c}{m}\cdot m-\frac{d}{m}\cdot m.$$

Но частное $\frac{a}{m}$, умноженное на дѣлителя m, даетъ дѣлимое, слѣд. $\frac{a}{m}\cdot m=a$; точне такъ же: $\frac{b}{m}\cdot m=b$; $\frac{c}{m}\cdot m=c$; и $\frac{d}{m}\cdot m=d$. Такимъ образомъ

$$\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}\right)\cdot m=a-b+c-d,$$

т. е. частное, умноженное на дѣлителя, воспроизвело дѣлимое, слѣд. это частное составлено вѣрно, и правило доказано.

Примѣры:

1) $$(8a^4b^2-3a^3b^3+12a^2b^4):4a^2b^2=2a^2-\frac{3}{4}ab+3b^2.$$

2) $$\left\{28a^2b^3(x-y)^3+12a^3b^2(x^2-y^2)(x+y)-8ab^2(x+y)(x^2-y^2)^2\right\}:4ab^2(x-y)=$$
$$7ab(x-y)^2+3a^2(x+y)^2-2(x+y)^3(x-y).$$

Дѣленіе многочлена на многочленъ.

47. Частное отъ раздѣленія нѣкотораго многочлена A на многочленъ B есть выраженіе алгебраически дробное вида

$$\frac{A}{B}.$$

Въ большинствѣ случаевъ такое выраженіе нельзя замѣнить другимъ — простѣйшимъ. Но когда цѣлые многочлены A и B содержатъ одну и ту-же букву, то возможенъ такой третій многочленъ C, *цѣлый* относительно той же буквы, который, будучи умноженъ на дѣлителя, даетъ дѣлимое. Въ такомъ случаѣ говорятъ, что дѣленіе полинома A на B *возможно*.

Укажемъ, какъ въ этомъ исключительномъ случаѣ находятъ частное.

Допуская, что многочленъ

$$8x^5+10x^4-31x^3+22x^2-29x+12$$

дѣлится на многочленъ

$$4x^3-5x^2+3x-4,$$

постараемся опредѣлить члены частнаго.

Написавъ дѣлитель справа отъ дѣлимаго, отдѣляютъ ихъ вертикальною чертою; затѣмъ, дѣлителя отдѣляютъ горизонтальною чертою отъ частнаго, котораго члены, по мѣрѣ ихъ нахожденія, и пишутъ подъ этою чертою.

Дѣлимое......$8x^5+10x^4-31x^3+22x^2-29x+12$	$4x^3-5x^2+3x-4$ ....дѣлитель
$-8x^5\pm10x^4\mp6x^3\pm8x^2$	$2x^2+5x-3$...........частное
1-й остатокъ........ $20x^4-37x^3+30x^2-29x+12$	
$-20x^4\pm25x^3\mp15x^2\pm20x$	
2-й остатокъ............ $-12x^3+15x^2-9x+12$	
$\pm12x^3\mp15x^2\pm9x\mp12$	
0	

По опредѣленію, дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на частное.

Но по свойству произведенія двухъ многочленовъ (§ 36), высшій членъ произведенія происходитъ, *безъ приведенія*, отъ умноженія высшихъ членовъ сомножителей, т. е. въ нашемъ случаѣ отъ умноженія высшаго члена дѣлителя на высшій членъ частнаго. Поэтому, назвавъ высшій членъ частнаго буквою q, имѣемъ: $8x^5=4x^3 \times q$, откуда, замѣчая, что неизвѣстный сомножитель (q) опредѣляется дѣленіемъ произведенія ($8x^5$) на извѣстнаго сомножителя ($4x^3$), находимъ:

$$q=8x^5:4x^3=2x^2.$$

Итакъ, чтобы найти высшій членъ частнаго, нужно высшій членъ дѣлимаго раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.

Для нахожденія слѣдующаго члена частнаго руководствуемся такими соображеніями. Дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго; а потому если изъ дѣлимаго вычесть произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго, то въ остаткѣ будетъ заключаться произведеніе дѣлителя на сумму остальныхъ членовъ частнаго. Умноживъ дѣлителя на высшій членъ частнаго, и вычтя произведеніе $8x^5-10x^4+6x^3-8x^2$ изъ дѣлимаго, находимъ остатокъ, равный $20x^4-37x^3+30x^2-29x+12$. Такъ какъ этотъ остатокъ есть произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго, начиная со втораго, то его высшій членъ ($20x^4$) произошелъ безъ приведенія отъ умноженія высшаго члена дѣлителя ($4x^3$) на высшій изъ ненайденныхъ членовъ частнаго. Называя послѣдній буквою q', имѣемъ такимъ образомъ: $20x^4=4x^3 \cdot q'$, откуда

$$q'=20x^4:4x^3=+5x.$$

Итакъ, для нахожденія втораго члена частнаго нужно высшій членъ перваго остатка раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.

Замѣчая, что первый остатокъ есть произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго, начиная со втораго, заключаемъ, что если вычтемъ изъ этого остатка произведеніе дѣлителя на второй членъ частнаго, то въ новомъ (второмъ) остаткѣ будетъ заключаться произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго, начиная съ третьяго. Умноживъ въ самомъ дѣлѣ дѣлителя на второй членъ частнаго и вычтя произведеніе изъ перваго остатка, находимъ второй остатокъ: $-12x^3+15x^2-9x+12$. По свойству произведенія, высшій членъ этого остатка произошелъ, безъ приведенія, отъ умноженія высшаго члена дѣлителя на высшій изъ ненайденныхъ членовъ частнаго. Слѣдоват., если назовемъ послѣдній буквою q'', то найдемъ равенство: $-12x^3=4x^3 \cdot q''$, откуда $q''=-12x^3:4x^3=-3$. Отсюда заключаемъ, что для нахожденія третьяго члена частнаго надо высшій членъ втораго остатка раздѣлить на высшій членъ дѣлителя.

Такими же разсужденіями какъ и прежде убѣдимся, что для нахожденія четвертаго члена частнаго, въ предположеніи что онъ существуетъ, надо дѣлителя умножить на третій членъ частнаго и произведеніе вычесть изъ втораго остатка. Сдѣлавъ это, находимъ въ новомъ остаткѣ 0. Это значитъ, что дѣленіе окончено, и послѣдній членъ частнаго равенъ -3. Все же частное равно $2x^2+5x-3$.

Что частное найдено вѣрно, — въ этомъ убѣждаемся, помноживъ дѣлителя на частное: въ произведеніи получается дѣлимое.

Припоминая ходъ дѣйствія, заключаемъ, что для отысканія послѣдовательныхъ членовъ частнаго намъ приходилось дѣлить высшіе члены дѣлимаго и каждаго остатка на высшій членъ дѣлителя. Чтобы имѣть эти высшіе члены всегда на первомъ мѣстѣ, а также для удобства приведенія, до начала дѣйствія располагаютъ дѣлимое и дѣлителя по нисходящимъ степенямъ главной буквы.

Соображая все сказанное, приходимъ къ слѣдующему правилу дѣленія многочлена на многочленъ:

Правило. — Когда частное отъ раздѣленія двухъ цѣлыхъ полиномовъ можно представить въ формѣ цѣлаго полинома, члены частнаго находимъ слѣдующимъ образомъ:

Располагаемъ дѣлимое и дѣлителя по нисходящимъ степенямъ главной буквы.

Первый членъ дѣлимаго дѣлимъ на первый членъ дѣлителя: получаемъ первый членъ частнаго.

Вычитаемъ изъ дѣлимаго произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго и получаемъ первый остатокъ.

Первый членъ этого остатка дѣлимъ на первый членъ дѣлителя: находимъ второй членъ частнаго.

Вычитаемъ изъ перваго остатка произведеніе дѣлителя на второй членъ частнаго и получаемъ второй остатокъ.

Дѣлимъ первый членъ этого остатка на первый членъ дѣлителя: находимъ третій членъ частнаго, и т. д., продолжая до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ получится ноль.

Вотъ еще примѣръ.

$$\begin{array}{l|l}
12a^7-35a^6b-24a^5b^2+78a^4b^3+2a^3b^4+17a^2b^5+31ab^6+36b^7 & 4a^4-5a^3b-7a^2b^2+8ab^3-9b^4 \\
-12a^7 \pm 15a^6b \pm 21a^5b^2 \mp 24a^4b^3 \pm 27a^3b^4 & \overline{3a^3-5a^2b-7ab^2-4b^3} \\
\hline
\quad -20a^6b-3a^5b^2+54a^4b^3+29a^3b^4+17a^2b^5+31ab^6+36b^7 & \\
\quad \pm 20a^6b \mp 25a^5b^2 \mp 35a^4b^3 \pm 40a^3b^4 \mp 45a^2b^5 & \\
\hline
\qquad -28a^5b^2+19a^4b^3+69a^3b^4-28a^2b^5+31ab^6+36b^7 & \\
\qquad \pm 28a^5b^2 \mp 35a^4b^3 \mp 49a^3b^4 \pm 56a^2b^5 \mp 63ab^6 & \\
\hline
\qquad\quad -16a^4b^3+20a^3b^4+28a^2b^5-32ab^6+36b^7 & \\
\qquad\quad \pm 16a^4b^3 \mp 20a^3b^4 \mp 28a^2b^5 \pm 32ab^6 \mp 36b^7 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

(Измѣненные знаки вычитаемыхъ членовъ поставлены сверху).

48. Такъ какъ нисшій членъ дѣлимаго есть также членъ неприводимый и происходитъ отъ умноженія нисшихъ членовъ дѣлителя и частнаго, то можно начать дѣйствіе съ опредѣленія нисшаго члена частнаго, который мы найдемъ, раздѣливъ нисшій членъ дѣлимаго на нисшій членъ дѣлителя.

Далѣе, дѣля нисшій членъ перваго остатка на нисшій членъ дѣлителя, найдемъ нисшій изъ ненайденныхъ еще членовъ частнаго, и т. д. Однимъ словомъ, дѣленіе многочленовъ можетъ быть выполнено въ порядкѣ, обратномъ вышеизложенному, т. е. начиная съ нисшаго и восходя послѣдовательно до высшаго члена частнаго.

Приводимъ примѣръ такого расположенія дѣйствія:

$$\begin{array}{l|l}
6-15x+13x^2+54x^3-67x^4+38x^5-9x^6-56x^7 & 3-4x^2+5x^3-7x^4 \\ \cline{2-2}
-6 \quad \pm 8x^2 \mp 10x^3 \pm 14x^4 & 2-5x+7x^2+8x^3 \\ \cline{1-1}
-15x+21x^2+44x^3-53x^4+38x^5-9x^6-56x^7 & \\
\pm 15x \quad \mp 20x^3 \pm 25x^4 \mp 35x^5 & \\ \cline{1-1}
21x^2+24x^3-28x^4+3x^5-9x^6-56x^7 & \\
-21x^2 \quad \pm 28x^4 \mp 35x^5 \pm 49x^6 & \\ \cline{1-1}
24x^3 \quad -32x^5+40x^6-56x^7 & \\
-24x^3 \quad \pm 32x^5 \mp 40x^6 \pm 56x^7 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

49. Когда дѣлимое есть многочленъ неполный, т. е. содержитъ не всѣ степени главной буквы, то сохраняютъ мѣста недостающихъ членовъ, чтобы можно было писать подобные члены одинъ подъ другимъ.

Примѣръ. Раздѣлить $14x^6+54x^5-39x^4-7x+2$ на $2x^4+8x^3-$ $-5x^2-3x+1$.

Въ дѣлимомъ недостаетъ членовъ, содержащихъ x^3 и x^2; сохраняя мѣста, на которыхъ должны бы быть написаны эти члены, располагаемъ дѣйствіе такъ:

$$\begin{array}{l|l}
14x^6+54x^5-39x^4 \qquad\qquad -7x+2 & 2x^4+8x^3-5x^2-3x+1 \\ \cline{2-2}
-14x^6 \mp 56x^5 \pm 35x^4 \pm 21x^3 \mp 7x^2 & 7x^2-x+2 \\ \cline{1-1}
-2x^5-4x^4+21x^3-7x^2-7x+2 & \\
\pm 2x^5 \pm 8x^4 \mp 5x^3 \mp 3x^2 \pm x & \\ \cline{1-1}
4x^4+16x^3-10x^2-6x+2 & \\
-4x^4 \mp 16x^3 \pm 10x^2 \pm 6x \mp 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Признаки невозможнаго дѣленія многочленовъ.

50. Когда частное отъ раздѣленія одного цѣлаго многочлена на другой можетъ быть выражено цѣлымъ многочленомъ относительно входящихъ въ него буквъ, то говорятъ, что дѣленіе *возможно*; если же частное нельзя представить въ формѣ цѣлаго многочлена, дѣленіе называется *невозможнымъ*.

Иногда можно à priori узнать, совершается дѣленіе на цѣло, или нѣтъ; въ большинствѣ же случаевъ узнать этого нельзя, не совершая на самомъ дѣлѣ дѣленія.

I. Если дѣлитель содержитъ букву, которой нѣтъ въ дѣлимомъ, то на какой-бы цѣлый многочленъ ни умножили дѣлителя, эта буква остается въ произведеніи, которое поэтому никогда не будетъ равняться дѣлимому. Значитъ, въ этомъ случаѣ частное не можетъ быть представлено въ формѣ цѣлаго многочлена, и дѣленіе невозможно. Напримѣръ,

$$8a^2+5ab-b^2$$

не можетъ раздѣлиться на-цѣло на $4a+bc$, такъ какъ дѣлитель содержитъ букву c, которой нѣтъ въ дѣлимомъ. Частное изображаютъ въ видѣ дроби, означая дѣленіе горизонтальною чертою:

$$\frac{8a^2+5ab-b^2}{4a+bc}.$$

II. Когда дѣлимое есть одночленъ, а дѣлитель — многочленъ, то частное не можетъ быть выражено ни цѣлымъ одночленомъ, ни цѣлымъ многочленомъ. Одночленомъ оно не можетъ быть выражено потому, что произведеніе многочленнаго дѣлителя на одночленное частное дало бы многочленъ, между тѣмъ какъ дѣлимое одночленъ. Многочленомъ оно не можетъ быть выражено потому, что произведеніе многочлена — дѣлителя на многочленъ — частное содержитъ по меньшей мѣрѣ два неприводимыхъ члена, между тѣмъ какъ дѣлимое — одночленъ.

Такъ, дѣленіе a^2 на $a+b$ невозмно, и частное имѣтъ видъ дроби

$$\frac{a^2}{a+b}.$$

III. Если возможенъ цѣлый полиномъ (частное), который, будучи умноженъ на дѣлителя, давалъ-бы дѣлимое, то высшій членъ дѣлимаго долженъ быть произведеніемъ высшихъ членовъ дѣлителя и частнаго, а нисшій членъ дѣлимаго — произведеніемъ ихъ нисшихъ членовъ. Поэтому, высшій членъ частнаго долженъ равняться частному отъ раздѣленія высшаго на высшій, а нисшій членъ частнаго — частному отъ раздѣленія нисшаго на нисшій членовъ дѣлимаго и дѣлителя. Отсюда прямо слѣдуетъ, что если не дѣлятся на — цѣло высшій членъ дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя, или нисшій на нисшій, то дѣленіе невозможно.

Такъ, многочленъ

$$8x^7-6x^6+3x^5-4x^4-2x^3+7x^2$$

не дѣлится на

$$5x^5-2x^4+x^3,$$

потому-что нисшій членъ $7x^2$ дѣлимаго не дѣлится на нисшій членъ x^3 дѣлителя.

Точно также многочленъ

$$3x^2-x+1$$

не дѣлится на

$$x^4+x^2+1,$$

такъ-какъ высшій членъ дѣлимаго ($3x^2$) не дѣлится на высшій членъ (x^4) дѣлителя.

IV. Но если высшій членъ дѣлимаго дѣлится на высшій членъ дѣлителя и нисшій на нисшій, то изъ этого еще никакъ не слѣдуетъ заключать, что дѣленіе возможно. Совершая въ этомъ случаѣ дѣленіе и продолжая его достаточно далеко, всегда можно открыть — возможно оно или нѣтъ.

При этомъ слѣдуетъ различать два случая.

1. Дѣлимое и дѣлитель расположены по нисходящимъ степенямъ главной буквы.

Въ этомъ случаѣ степень высшихъ членовъ послѣдовательныхъ остатковъ идетъ понижаясь. Для возможности дѣленія необходимо, чтобы высшій членъ каждаго остатка дѣлился на высшій членъ дѣлителя; поэтому, если дойдемъ до остатка, въ которомъ высшій членъ содержитъ главную букву въ меньшей степени чѣмъ высшій членъ дѣлителя, и слѣдовательно не дѣлится на высшій членъ дѣлителя, то заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Такъ, пусть требуется раздѣлить

$$2x^4 + x^3 - x^2 + 7x + 4$$

на

$$x^2 - x + 1.$$

Высшій членъ дѣлимаго дѣлится на высшій членъ дѣлителя и нисшій на нисшій. Попробуемъ, не совершается-ли дѣленіе на цѣло:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + x^3 - x^2 + 7x + 4 & x^2 - x + 1 \\ \underline{-2x^4 \pm 2x^3 \mp 2x^2} \qquad\quad & \overline{2x^2 + 3x} \\ 3x^3 - 3x^2 + 7x + 4 & \\ \underline{-3x^3 \pm 3x^2 \mp 3x} \qquad & \\ 4x + 4 & \end{array}$$

Высшій членъ втораго остатка не дѣлится на высшій членъ дѣлителя: заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Иногда, прежде чѣмъ дойдемъ до такого остатка, можно ранѣе предвидѣть, возможно дѣленіе или нѣтъ. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что дѣленіе возможно, можно напередъ опредѣлить — каковъ долженъ быть нисшій членъ частнаго. Именно, если дѣленіе возможно, то дѣлимое будетъ произведеніемъ дѣлителя на частное, а потому нисшій членъ дѣлимаго долженъ быть произведеніемъ нисшихъ членовъ дѣлителя и частнаго; слѣдовательно, раздѣливъ нисшій членъ дѣлимаго на нисшій членъ дѣлителя, мы узнаемъ, каковъ долженъ быть нисшій членъ частнаго. Совершая дѣленіе, пусть мы дошли въ частномъ до члена той степени, какую мы ранѣе нашли для послѣдняго члена частнаго; для того чтобы дѣленіе было возможно, необходимо: 1) чтобы членъ, найденный нами въ частномъ, былъ равенъ частному отъ раздѣленія послѣдняго члена дѣлимаго на послѣдній чл. дѣлителя; 2) чтобы слѣдующій остатокъ былъ равенъ нулю. Если хотя одно изъ этихъ условій не осуществляется, заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Приводимъ примѣры.

Раздѣлять $x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 2x^4$ на $x^2 - 5x + 1$.

Высшій членъ дѣлимаго дѣлится на в. ч. дѣлителя и нисшій на нисшій; при этомъ, если дѣленіе возможно, то послѣднимъ членомъ частнаго долженъ быть: $+2x^4 : +1 = +2x^4$.

Совершаемъ на самомъ дѣлѣ дѣленіе:

$$\begin{array}{r|l} x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 2x^4 & x^2 - 5x + 1 \\ \underline{-x^7 \pm 5x^6 \mp x^5} \qquad\quad & \overline{x^5 + 2x^4} \\ 2x^6 - 5x^5 + 2x^4 & \\ \underline{-2x^6 \pm 10x^5 \mp 2x^4} & \\ 5x^5 & \end{array}$$

Раздѣливъ высшій членъ перваго остатка на высшій членъ дѣлителя, находимъ $+2x^4$, т. е. какъ разъ такой членъ, какимъ долженъ быть послѣдній членъ частнаго; но какъ слѣдующій остатокъ не равенъ нулю, то заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Другой примѣръ: раздѣлить

$$8x^6 + 10x^5 - 32x^4 - 3x^3 + 54x^2 - 20x \text{ на } 4x^3 + 5x^2 - 2x.$$

Первый членъ дѣлимаго дѣлится на первый членъ дѣлителя, и послѣдній на послѣдній; притомъ, частное отъ этого послѣдняго дѣленія есть $-20x$: $-2x$ или $+10$. Членъ $+10$ долженъ быть послѣднимъ въ частномъ, если дѣленіе совершается на-цѣло.

Выполняемъ дѣйствіе:

$$\begin{array}{r|l}
8x^6+10x^5-32x^4-3x^3+54x^2-20x & 4x^3+5x^2-2x \\
\hline
-8x^6\mp 10x^5\pm 4x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & 2x^3-7x+8 \\
\hline
-28x^4-3x^3+54x^2-20x & \\
\pm 28x^4\pm 35x^3\mp 14x^2 \qquad\; & \\
\hline
32x^3+40x^2-20x & \\
-32x^3\mp 40x^2\pm 16x & \\
\hline
-4x &
\end{array}$$

Членъ частнаго, несодержащій буквы x, оказывается равнымъ $+8$, а не $+10$, какъ должно бы быть при возможномъ дѣленіи: заключаемъ, что дѣленіе невозможно. Вычтя изъ втораго остатка произведеніе $(4x^3+5x^2-2x).8$, находимъ послѣдній остатокъ: $-4x$.

2. Дѣлимое и дѣлитель расположены по восходящимъ степенямъ главной буквы.

Въ этомъ случаѣ степень нисшаго члена послѣдовательныхъ остатковъ идетъ постепенно увеличиваясь, а потому нисшіе члены остатковъ всегда будутъ дѣлиться на нисшій членъ дѣлителя. Невозможность дѣленія открываемъ слѣдующимъ образомъ. Раздѣливъ высшій членъ дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя, мы узнаемъ, каковъ долженъ быть высшій членъ частнаго, въ предположеніи, что дѣленіе возможно. Если, дойдя въ частномъ до члена, содержащаго главную букву въ той степени, какую мы предвидѣли для послѣдняго члена частнаго, мы не получимъ затѣмъ въ остаткѣ нуль, — это будетъ признакомъ невозможности дѣленія.

Пусть напр. требуется раздѣлить

$$4-3x+5x^2+x^3-19x^4 \text{ на } 1-2x-x^2.$$

Здѣсь первый членъ дѣлимаго дѣлится на первый членъ дѣлителя и послѣдній членъ дѣлимаго на послѣдній дѣлителя.

Если дѣленіе возможно, послѣднимъ членомъ частнаго долженъ быть

$$(-19x^4):(-x^2)=+19x^2.$$

$$\begin{array}{r|l}
4-3x+5x^2+x^3-19x^4 & 1-2x-x^2 \\
\hline
-4\pm 8x\pm 4x^2 \qquad\qquad\quad & 4+5x+19x^2 \\
\hline
5x+9x^2+x^3-19x^4 & \\
-5x\pm 10x^2\pm 5x^3 \qquad & \\
\hline
19x^2+6x^3-19x^4 & \\
-19x^2\pm 38x^3\pm 19x^4 & \\
\hline
44x^3 \qquad\quad &
\end{array}$$

Третій членъ частнаго дѣйствительно $=+19x^2$, но затѣмъ остатокъ не есть ноль: заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Еще примѣръ: раздѣлить

$$-2+x-5x^3+4x^4 \text{ на } -1-2x+x^2.$$

При возможномъ дѣленіи послѣднимъ членомъ частнаго долженъ быть $+4x^2$.

$$\begin{array}{l|l} -2+x-5x^3+4x^4 & -1-2x+x^2 \\ \cline{2-2} \pm 2 \pm 4x \mp 2x^2 & 2-5x+12x^2 \\ \cline{1-1} \quad 5x-2x^2-5x^3+4x^4 & \\ \quad -5x \mp 10x^2 \pm 5x^3 & \\ \cline{1-1} \qquad -12x^2+4x^4 & \\ \qquad \pm 12x^2 \pm 24x^3 \mp 12x^4 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 24x^3-8x^4 & \end{array}$$

Вмѣсто $+4x^2$ находимъ въ частномъ $+12x^2$; кромѣ того, соотвѣтствующій остатокъ долженъ бы быть нулемъ, а онъ равенъ $24x^3-8x^4$. Значитъ, дѣленіе невозможно.

Особенность случая дѣленія цѣлыхъ полиномовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы (при соблюденіи условія дѣлимости крайнихъ членовъ дѣлимаго на крайніе члены дѣлителя) заключается въ возможности полученія въ частномъ неограниченнаго числа цѣлыхъ членовъ. Обусловливается это тѣмъ, что степени нисшихъ членовъ остатковъ идутъ постоянно повышаясь. Такъ въ послѣднемъ примѣрѣ, продолжая дѣленіе, получили-бы четвертый членъ $-24x^3$, и т. д.

51. Когда частное отъ раздѣленія цѣлыхъ относительно x полиномовъ не есть полиномъ цѣлый, то оно можетъ быть представлено въ видѣ суммы, состоящей изъ нѣкотораго цѣлаго относительно x полинома и дроби, имѣющей числителемъ остатокъ, степень котораго меньше степени дѣлителя, а знаменателемъ — дѣлителя.

Въ самомъ дѣлѣ, пуста A и B будутъ два цѣлые относительно x полинома, расположеные по нисходящимъ степенямъ буквы x; и пусть степень A не ниже степени B. Совершая дѣленіе и продолжая его до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ не получится цѣлый по буквѣ x полиномъ, котораго степень ниже степени дѣлителя, назовемъ частное Q и остатокъ R. Замѣчая, что остатокъ R происходитъ послѣ вычитанія изъ A произведенія BQ, находимъ:

$$R=A-B.Q;$$

выражая уменьшаемое посредствомъ вычитаемаго и остатка, имѣемъ

$$A=B.Q+R;$$

отсюда, раздѣливъ обѣ части на B, получаемъ

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}.$$

Примѣняя преобразованіе, указываемое этимъ равенствомъ, къ первому примѣру пункта IV § 50, находимъ, что полное частное отъ раздѣленія $2x^4+x^3-$ $-x^2+7x+4$ на x^2-x+1 равно

$$2x^2+3x+\frac{4x+4}{x^2-x+1}.$$

Продолжая дѣленіе $x^7-3x^6-4x^5+2x^4$ на x^2-5x+1 до тѣхъ поръ пока не дойдемъ до остатка, степень котораго ниже степени дѣлителя, находимъ:

$$\frac{x^7-3x^6-4x^5+2x^4}{x^2-5x+1}=x^5+2x^4+4x^3+25x^2+120x+575+\frac{2755x-575}{x^2-5x+1}.$$

Замѣчательные случаи дѣленія.

52. Приведемъ нѣкоторые частные случаи дѣленія, заслуживающіе особаго вниманія вслѣдствіе частаго ихъ примѣненія.

I. *Разность одинаковыхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на разность основаній.*

Пусть требуется раздѣлить $x^m - a^m$ на $x - a$. Совершая дѣленіе имѣемъ:

$$
\begin{array}{l|l}
x^m - a^m & x - a \\
\hline
-x^m \pm ax^{m-1} & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots\dots + a^{m-1} \\
\quad ax^{m-1} - a^m & \\
\quad -xa^{m-1} \pm a^2x^{m-2} & \\
\qquad a^2x^{m-2} - a^m & \\
\qquad -a^2x^{m-2} \pm a^3x^{m-3} & \\
\qquad\quad a^3x^{m-3} - a^m & \\
\qquad\quad \dots\dots & \\
\qquad\quad \dots\dots & \\
\qquad\quad \dots\dots & \\
\qquad\quad a^{m-1}x - a^m & \\
\qquad\quad -a^{m-1}x \pm a & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Расположивъ дѣлимое и дѣлителя по убывающимъ степѣнямъ буквы x, дѣлимъ первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя, и находимъ первый членъ частнаго, въ которомъ показатель буквы x, какъ равный разности показателей тойже буквы въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ ,будетъ $= m - 1$. Первый членъ частнаго есть x^{m-1}. Умноживъ его на дѣлителя и вычтя произведеніе изъ дѣлимаго, получаемъ первый остатокъ: $ax^{m-1} - a^m$. Раздѣливъ ax^{m-1} на x, находимъ второй членъ частнаго: ax^{m-2}. Умноживъ его на дѣлителя и вычтя произведеніе изъ перваго остатка, получимъ второй остатокъ: $a^2x^{m-2} - a^m$. Подобнымъ же образомъ найдемъ, что третій членъ частнаго $= a^2x^{m-3}$, а третій остатокъ $a^3x^{m-3} - a^m$.

Не продолжая дѣйствія, разсмотримъ законъ составленія послѣдовательныхъ остатковъ. Сравнивая ихъ между собою, замѣчаемъ, что всѣ остатки — двучлены, которыхъ вторые члены одинаковы и равны $-a^m$; первые же члены представляютъ произведенія степеней буквъ a и x, причемъ показатели буквы a идутъ послѣдовательно увеличиваясь на 1, а показатели буквы x уменьшаясь на 1, сумма же обоихъ показателей всегда равна m. Изъ этого слѣдуетъ, что продолжая дѣленіе, мы непремѣнно дойдемъ до такого остатка, первый членъ котораго будетъ имѣть букву a съ показателемъ $m - 1$, а слѣдовательно букву x съ показателемъ 1, такъ какъ сумма показателей должна равняться m. Этотъ остатокъ будетъ слѣдовательно: $a^{m-1}x - a^m$. Дѣля первый его членъ на x найдемъ въ частномъ членъ a^{m-1}; а умноживъ этимъ членомъ дѣлителя и вычтя произведеніе изъ остатка, находимъ что слѣдующій остатокъ есть 0: значитъ, $x^m - a^m$ дѣлится безъ остатка на $x - a$.

Мы не могли выполнить всѣхъ частныхъ дѣленій вслѣдствіе неопредѣленности числа m; мѣста, гдѣ надо подразумѣвать промежуточные остатки и члены частнаго, обозначены точками.

Законъ частнаго.—Всматриваясь въ составъ частнаго, замѣчаемъ, что оно имѣетъ слѣдующія свойства:

1. Всѣмъ его членамъ предшествуетъ знакъ $(+)$, потому что они происходятъ отъ дѣленія первыхъ членовъ остатковъ, предшествуемыхъ знакомъ $(+)$, па первый членъ дѣлителя, имѣющій тотъ же знакъ.

2. Первый членъ частнаго есть x^{m-1}, послѣдній a^{m-1}; что же касается промежуточныхъ членовъ, то они представляютъ произведенія степеней обѣихъ буквъ x и a, причемъ показатели буквы x идутъ послѣдовательно уменьшаясь на 1, а показатели буквы a — послѣдовательно увеличиваясь на 1; такъ, что сумма показателей въ каждомъ членѣ равна $m-1$. — Если въ первомъ членѣ подразумѣвать множителемъ a^0, а въ послѣднемъ x^0, то можемъ сказать, что члены частнаго расположены по убывающимъ степенямъ буквы x, которой показатели идутъ, уменьшаясь на 1, начиная съ $m-1$ и кончая нулемъ; и по возрастающимъ степенямъ буквы a, которой показатели идутъ, увеличиваясь на 1, начиная съ o и кончая $m-1$.

3. Число членовъ частнаго равно m, т. е. степени дѣлимаго.

Въ самомъ дѣлѣ, показатели буквы a, наприм., идутъ послѣдовательно увеличиваясь на 1, начиная съ o и кончая $m-1$; но послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ отъ o до $m-1$ включительно ровно m. Столько же членовъ и въ частномъ.

При помощи выведенной нами формулы

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}+\ldots\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}\ \ldots\ldots\ (A)$$

можно прямо писать частное отъ раздѣленія разности одинаковыхъ степеней двухъ количествъ на разность основаній. Вотъ примѣры:

1. $\frac{x^5-a^5}{x-a}=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4.$

2. $\frac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1.$

3. Раздѣлить, по формулѣ (A), $125a^3-8b^3$ на $5a-2b$.

Замѣчая, что $125a^3=5.5.5.a.a.a=5a.5a.5a=(5a)^3$, и что $8b^3=2.2.2.b.b.b=2b.2b.2b=(2b)^3$, имѣемъ:

$$\frac{125a^3-8b^3}{5a-2b}=\frac{(5a)^3-(2b)^3}{5a-2b}=(5a)^2+(5a).(2b)+(2b)^2=25a^2+10ab+4b^2.$$

4. Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{\frac{1}{243}a^5-m^5}{\frac{1}{3}a-m}=\frac{\left(\frac{1}{3}a\right)^5-m^5}{\frac{1}{3}a-m}=\left(\frac{1}{3}a\right)^4+\left(\frac{1}{3}a\right)^3.m+\left(\frac{1}{3}a\right)^2.m^2+\frac{1}{3}a.m^3+m^4=$$

$$=\frac{1}{81}a^4+\frac{1}{27}a^3m+\frac{1}{9}a^2m^2+\frac{1}{3}am^3+m^4.$$

Слѣдствія. — Такъ какъ x и a означаютъ какія угодно количества, то можно положить $a=-a'$. Подставивъ въ формулу (A) вмѣсто a количество $-a'$,

и замѣтивъ, что дѣлимое обращается въ $x^m-(-a')^m$, а дѣлитель въ $x-(-a')$ или въ $x+a'$, находимъ:

$$\frac{x^m-(-a')^m}{x+a'}=x^{m-1}+(-a')x^{m-2}+(-a')^2x^{m-3}+\ldots\ldots+(-a')^{m-2}x+$$
$$+(-a')^{m-1}.$$

Изъ правила знаковъ при умноженіи заключаемъ, что $(-a')^2=(-a').(-a')=+a'^2$; $(-a')^3=(-a')^2(-a')=(+a'^2)(-a')=-a'^3$; $(-a')^4=-a'^3.-a'=+a'^4$ и т. д. Однимъ словомъ: четныя степени количества $-a'$ даютъ знакъ $+$, а нечетныя знакъ $-$. Замѣтивъ это, различаемъ два случая: m — четнаго и m — нечетнаго.

1. m — число четное.—Въ такомъ случаѣ будетъ: $m-1$ — число нечетное, $m-2$ — четное, $m-3$ — нечетное и т. д. А потому найдемъ, что: $(-a')^m=+a'^m$; $(-a')^{m-1}=-a'^{m-1}$; $(-a')^{m-2}=+a'^{m-2}$ и т. д. Принимая это въ соображеніе, найдемъ, что послѣднее равенство принимаетъ видъ

$$\frac{x^m-a'^m}{x+a'}=x^{m-1}-a'.x^{m-2}+a'^2.x^{m-3}-a'^3.x^{m-4}+\ldots+a'^{m-2}x-a'^{m-1}\ldots\ (B).$$

Отсюда заключаемъ, что *разность одинаковыхъ четныхъ степеней дѣлится безъ остатка и на сумму основаній*, причемъ законъ составленія частнаго отличается отъ вышеуказаннаго только чередованіемъ знаковъ.

Напримѣръ, x^6-a^6 дѣлится не только на $x-a$, но и на $x+a$, причемъ частное будетъ

$$\frac{x^6-a^6}{x+a}=x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5.$$

2. m — число нечетное. — Въ такомъ случаѣ, $m-1$ будетъ число четное, $m-2$ — нечетное и т. д. Поэтому: $(-a')^m=-a'^m$, сл. дѣлимое будетъ $x^m-(-a'^m)=x^m+a'^m$; затѣмъ, $(-a')^{m-1}$ будетъ $=+a'^{m-1}$; $(-a')^{m-2}=-a'^{m-2}$ и т. д., и мы получимъ:

$$\frac{x^m+a'^m}{x+a'}=x^{m-1}-a'x^{m-2}+a'^2x^{m-3}-a'^3x^{m-4}+\ldots-a'^{m-2}x+a'^{m-1}\ldots\ (C).$$

Равенство (C) показываетъ, что *сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на сумму основаній*, причемъ въ частномъ знаки чередуются.

Напримѣръ:

1. $\frac{x^7+a^7}{x+a}=x^6-ax^5+a^2x^4-a^3x^3+a^4x^2-a^5x+a^6.$
2. $\frac{x^5+1}{x+1}=x^4-x^3+x^2-x+1.$

II. *Сумма одинаковыхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится безъ остатка на разность этихъ количествъ.*

Пусть требуется раздѣлить сумму x^m+a^m на $x-a$:

$$\begin{array}{l|l}
x^m + a^m & x - a \\
\underline{-x^m \pm ax^{m-1}} & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots\ldots\ldots + a^{m-1} \\
\quad ax^{m-1} + a^m & \\
\quad \underline{-ax^{m-1} \pm a^2x^{m-2}} & \\
\qquad a^2x^{m-2} + a^m & \\
\qquad \underline{-a^2x^{m-2} \pm a^3x^{m-3}} & \\
\qquad\quad a^3x^{m-3} + a^m & \\
\qquad\quad \cdots\cdots & \\
\qquad\quad \cdots\cdots & \\
\qquad\quad \cdots\cdots & \\
\qquad\quad \cdots\cdots & \\
\qquad\quad x\,a^{m-1} + a^m & \\
\qquad\quad \underline{-x\,a^{m-1} \pm a^m} & \\
\qquad\qquad\quad 2a^m &
\end{array}$$

Дѣленіе будетъ возможно, если, найдя въ частномъ членъ $-a^{m-1}$, получимъ въ остаткѣ 0; но совершая дѣленіе, мы нашли въ частномъ членъ $+a^{m-1}$; и затѣмъ въ остаткѣ $2a^m$: заключаемъ, что дѣленіе не совершается безъ остатка. Что касается цѣлой части частнаго, то она составлена совершенно по тому же закону, какъ и въ первомъ случаѣ. Полное частное будетъ

$$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots\ldots + a^{m-2}x + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a} \cdots \text{(D.)}$$

Слѣдствія. — Полагая въ этой формулѣ $a = -a'$, находимъ

$$\frac{x^m + (-a')^m}{x - (-a')} = x^{m-1} + (-a')x^{m-2} + (-a')^2x^{m-3} + \ldots\ldots + (-a')^{m-1} + \frac{2(-a')^m}{x - (-a')}.$$

Разсмотримъ опять два случая: m — четнаго, и m — нечетнаго.

1-й случай. — m — число четное. Въ этомъ случаѣ

$$\frac{x^m + a'^m}{x + a'} = x^{m-1} - a'x^{m-2} + a'^2x^{m-3} - a'^3x^{m-4} + \ldots - a'^{m-1} + \frac{2a'^m}{x + a'} \cdots \text{(E.)},$$

Откуда заключаемъ, что *сумма одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится на сумму тѣхъ же количествъ, и что остатокъ равенъ удвоенному второму члену дѣлимаго.*

Такъ

$$\frac{x^4 + a^4}{x + a} = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3 + \frac{2a^4}{x + a}.$$

2-й случай. — m — нечетное число. Въ этомъ случаѣ

$$\frac{x^m - a'^m}{x + a'} = x^{m-1} - a'x^{m-2} + a'^2x^{m-3} - \ldots\ldots + a'^{m-1} - \frac{2a'^m}{x + a'} \cdots \text{(F).}$$

Слѣдовательно, *разность одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ не дѣлится на сумму этихъ количествъ, и остатокъ равенъ удвоенному второму члену дѣлимаго.* Такъ

$$\frac{x^5 - a^5}{x + a} = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4 - \frac{2a^5}{x + a}.$$

Выдѣляя изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ тѣ, когда дѣленіе совершается безъ остатка, приходимъ къ слѣдующему выводу: *разность одинаковыхъ степеней двухъ*

количествъ всегда дѣлится на разность основаній; разность одинаковыхъ четныхъ степеней дѣлится, кромѣ того, и на сумму основаній; сумма же одинаковыхъ нечетныхъ степеней — на сумму основаній.

Теорема, доказанная въ этомъ параграфѣ, извѣстна подъ именемъ теоремы Безу (Bezout).

53. Задачи.

Выполнить дѣленіе одночленовъ:

1. $0,(72)\ldots a^4b^7c^8 : \frac{9}{11}ab^5c^4$; $\frac{6}{11}b^2x^5z^8 : 0,(54)\ldots bx^5$; $0,9a^mb^nc^q : -0,5a^xb^rc^{q-1}$; $\frac{21}{22}m^{a+2}n^{b+3} : 4\frac{1}{22}m^an^b$; $\frac{3}{4}x^{p+q+1}y^{m-n+2} : -\frac{5}{6}x^{2p-1}y^{2m-2n}$; $x^3(a+b)^7z : 5x^2(a+b)^4$; $3a^3(b-x^2)^m : -2a^2(b-x^2)^n$; $4x^5(8-m^2)^z : 0,44\ldots x^3(m^2-8)$; $15m^2(1-x^2)^4 : 13\frac{3}{4}m^4(x^2-1)^3$; $156(a-b)^3x^2y^4(x-y)^4 : 13x^2(x-y)$.

Раздѣлить:

2. $32a^8b^4c^3x^4y^2 - 96a^9b^3c^3x^3y^3 + 60a^{10}b^3c^2x^2y^4 - 48a^{12}bc^2xy^5$ на $4a^8bc^2xy^2$.

3. $12a^3(a+b)^2x^4 - 15(a+b)^3x^3(x+y)^2(x-y) - 48(a+b)^4(a-b)x^2(x-y)$ на $3(a+b)^2x^2$.

4. $35(a+b)^3(x-y)^5 - 15a^2(a+b)^3x^2(x+y)^3(x-y)^4 + 25(a+b)^2(x-y)^4$ на $5(a+b)^2(x-y)^4$.

5. $0,7a^p - a^{p-1}x^q + \frac{1}{3}a^{p-2}x^{q+3} - 0,2121\ldots a^{p-3}x^{q+5} - \frac{5}{6}a^{p-4}x^{2q}$ на $-\frac{3}{4}a^{p-5}x^{2q-4}$.

6. $5x^7 - 22x^6y + 12x^5y^2 - 6x^4y^3 - 4x^3y^4 + 8x^2y^5$ на $x^3 - 4x^2y + 2y^3$.

7. $\frac{1}{2}a^5 + \frac{23}{24}a^4b - \frac{59}{72}a^3b^2 + 1\frac{3}{4}a^2b^3 - 1\frac{2}{9}ab^4 + \frac{2}{9}b^5$ на $\frac{3}{4}a^2 + 2ab - \frac{2}{3}b^2$.

8. $0,06m^7 - 0,02m^6n - 0,16m^5n^2 + 0,76m^4n^3 - 0,8m^3n^4 + 0,58m^2n^5 - 0,06mn^6$ на $0,2m^2 - 0,4mn + 0,6n^2$.

9. $0,5a^5 + \frac{59}{60}a^4b + \frac{1}{420}ab^2 - 1,35a^2b^3 - \frac{303}{700}ab^4 + 0,28b^5$ на $\frac{3}{2}a^2 + 0,7ab - \frac{2}{5}b^2$.

10. $x^4 + x^3y - 8x^2y^2 + 19xy^3 - 15y^4$ на $x^2 + 3xy - 5y^2$.

11. $-(a^2b^4 + 3a^4b^2 + b^6 - a^6)$ на $a^2b + b^3 + a^3 - ab^2$.

12. $8x^2y^3 - 3y^5 + x^5 + 15xy^4$ на $3xy + x^2 + 3y^2$.

13. $20a^2b^3 + 12b^5 - 25ab^4 - 16a^3b^2 + a^5$ на $4ab + a^2 - 3b^2$.

14. $1 + x^8 + x^4$ на $x^2 + 1 - x$.

15. $-x^4 - \frac{x^2y^2}{4} + x^3y + y^4$ на $y^2 + \frac{xy}{2} - x^2$.

16. $2,88x^4y - 7,2y^5 + 14,94xy^4 + 2,88x^5 - 10,8x^3y^2$ на $0,8x^3 - 0,4x^2y - 1,4xy^2 + 1,6y^3$.

17. $x^3 + y^3 + 3xy - 1$ на $x + y - 1$.

18. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ на $x + y + z$.

19. $a^{m+2} - a^{m+3} + 37a^{m+5} - 55a^{m+6} + 50a^{m+7}$ на $a^2 - 3a^3 + 10a^4$.

20. $6b^{x+y+2} + b^{x+y+1} - 9b^{x+y} + 11b^{x+y-1} - 6b^{x+y-2} + b^{x+y-3}$ на $2b^{y+2} + 3b^{y+1} - b^y$.

21. $6x^{8n+2} - 23x^{7n+1} + 18x^{6n} - x^{5n-1} - 3x^{4n-2} + 4x^{3n-3} - x^{2n-4}$ на $2x^{4n+1} - 5x^{3n} - 2x^{2n-1} + x^{n-2}$.

Въ нижеслѣдующихъ примѣрахъ представить частное подъ видомъ суммы, состоящей изъ цѣлаго по буквѣ x полинома и дроби, имѣющей числителемъ цѣлый по буквѣ x полиномъ, степень котораго ниже степени дѣлителя, а знаменателемъ — дѣлитель.

22. $(2x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 3x^2 - 3x + 1):(x^4 + 2x - 3)$.

23. $(3x^5 + 2ax^4 - a^2x^3 - 4a^3x^2 + 8a^4x - a^5):(ax^2 - 2a^2x + 3a^3)$.

24. $(3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 1):(x - 3)$.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ написать частное по формуламъ § 52.

25. $(32x^5 + 243):(2x + 3)$.
26. $(a^4b^4 - x^4y^4):(ab - xy)$.
27. $(m^8 - n^8):(m + n)$.
28. $(a^9 + b^9):(a + b)$.
29. $(1 + x^7):(1 + x)$.
30. $(16 - x^4):(2 + x)$.
31. $(81 - y^4):(3 - y)$
32. $(625u^4 - v^4):(5u - v)$.
33. $(1 + a^5b^5):(1 + ab)$.
34. $[(a + b)^2 - c^2]:(b - c + a)$.
35. $[x^2 - (a - b)^2]:(x - a + b)$.
36. $[(a + b)^2 - (c - d)^2]:(a + b + c - d)$.
37. $[(x + y)^5 + t^5]:(x + t + y)$.
38. $[(m + n)^3 - p^3]:(m + n - p)$.
39. $[(a - b)^4 - x^4):(a - b + x)$.
40. $[f^4 - (x - y)^4]:(f + x - y)$.
41. $[a^6 - (p - q)^6]:(a - p + q)$.
42. $\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}x^2\right):\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}x\right)$.
43. $\left(\frac{1}{8}x^3 + y^3\right):\left(\frac{1}{2}x + y\right)$.
44. $\left(\frac{1}{243}a^5 - m^5\right):\left(\frac{1}{3}a - m\right)$.
45. $(a^{10} - m^{15}):(a^2 - m^3)$
46. $(x^6 + y^3):(x^2 + y)$.
47. $(y^{12} - z^4):(y^3 + z)$.
48. $(m^8 - n^{12}):(m^2 - n^3)$.
49. $(x^{pq} - 1):(x^p - 1)$.
50. $(125x^6 - 64y^3):(5x^2 - 4y)$.
51. $[(a^2 - 2ac)^3 + c^6]:(a - c)^2$.
52. $[(x + y + z)^3 - (2x - y)^3]:(2y - x + z)$.

53. Показать, что $(x^2 - xy + y^2)^3 + (x^2 + xy + y^2)^3$ дѣлится на $2x^2 + 2y^2$.

54. Раздѣлить $(a^2 - bc)^3 + 8b^3c^3$ на $a^2 + bc$.

55. Раздѣлить $a^2b^2 + 2abc^2 - a^2c^2 - b^2c^2$ на $ab + ac - bc$.

56. Указать, въ какихъ изъ слѣдующихъ примѣровъ дѣленіе совершается безъ остатка.

$(x^7 + a^7):(x - a)$; $(x^7 - a^7):(x + a)$; $(x^7 + a^7):(x + a)$; $(a^2 + b^2):(a + b)$;
$(x^8 - a^8):(x - a)$; $(x^8 - a^8):(x + a)$; $(x^8 + a^8):(x + a)$; $(x^8 + a^8):(x - a)$;
$(a^{10} - m^{10}):(a^2 - m^2)$; $(a^{10} - m^{10}):(a^2 + m^2)$; $(a^{10} + m^{10}):(a^2 + m^2)$;
$(a^{10} + m^{10}):(a^2 - m^2)$.

ГЛАВА VI.

Разложеніе алгебраическихъ выраженій на множители.—Умноженіе и дѣленіе многочленовъ съ буквенными коэффиціентами.

54. Разложить выраженіе на множители — значитъ представить его въ формѣ произведенія, иначе говоря, въ формѣ одночлена. Такое преобразованіе

возможно далеко не всегда: оно удается вообще только тогда, когда данное выраженіе представляетъ нѣкоторую правильность, нѣкоторую симметрію.

Естественно, первое, что нужно сдѣлать — это выдѣлить множителя, общаго всѣмъ членамъ даннаго выраженія, если таковой имѣется. Затѣмъ, дальнѣйшее разложеніе совершается примѣненіемъ одного изъ слѣдуюхъ трехъ пріемовъ: 1) формулъ замѣчательныхъ случаевъ умноженія и дѣленія; 2) метода опредѣленной группировки членовъ; 3) метода двухчленныхъ дѣлителей. Откладывая изложеніе послѣдняго метода до слѣдующей главы, ознакомимся въ этой главѣ съ остальными изъ указанныхъ пріемовъ.

55. Вынесеніе за скобки общаго множителя членовъ даннаго многочлена. — Пусть всѣ члены многочлена имѣютъ общаго множителя, напр.

$$AD - BD + CD;$$

замѣтивъ, что величина многочлена не измѣнится, если мы его помножимъ и раздѣлимъ на одно и тоже количество, множимъ и дѣлимъ на D; находимъ

$$AD - BD + CD = D\left(\frac{AD - BD + CD}{D}\right).$$

Выполнивъ дѣленіе $AD - BD + CD$ на D по правилу дѣленія многочлена на одночленъ, найдемъ въ частномъ $A - B + C$; слѣд.

$$AD - BD + CD = D(A - B + C).$$

Отсюда видимъ, что *если всѣ члены многочлена имѣютъ общаго множителя, то этотъ множитель можно вынести за скобки, написавъ въ скобкахъ частное отъ раздѣленія даннаго многочлена на общій множитель его членовъ.* кахъ частное отъ раздѣленія даннаго многочлена на общій множитель его членовъ.

Такъ, всѣ члены многочлена $35b^2c^4 - 7bc^3d^2 + 49ab^2c^2d + 343b^3c^3$ имѣютъ общимъ множителемъ $7bc^2$, который и выносимъ за скобки; въ скобкахъ же пишемъ частное отъ раздѣленія многочлена на $7bc^2$; такимъ образомъ найдемъ:

$$35b^2c^4 - 7bc^3d^2 + 49ab^2c^2d + 343b^3c^3 = 7bc^2(5bc^2 - cd^2 + 7abd + 49b^2c).$$

Иногда выраженіе, получившееся въ скобкахъ, бываетъ способно къ дальнѣйшему разложенію, либо къ другимъ преобразованіямъ, могущимъ его упростить. Напр., $14a^5b^2 - 28a^4b^3 + 14a^3b^4$, по вынесеніи за скобки общаго множителя $14a^3b^2$, приводится къ виду $14a^3b^2(a^2 - 2ab + b^2)$; замѣчая затѣмъ, что $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, замѣняемъ данное выраженіе простѣйшимъ

$$14a^3b^2(a - b)^2.$$

56. Методъ примѣненія замѣчательныхъ формулъ умноженія и дѣленія. — Можно иногда съ успѣхомъ примѣнять къ разложенію на множители формулы замѣчательныхъ случаевъ умноженія и дѣленія.

Простѣйшая изъ этихъ формулъ есть

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Замѣтивъ далѣе, что

$$\frac{A^3 - B^3}{A - B} = A^2 + AB + B^2 \quad \text{и} \quad \frac{A^3 + B^3}{A + B} = A^2 - AB + B^2,$$

и опредѣляя изъ того и другаго равенства дѣлимое по дѣлителю и частному, имѣемъ:

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Затѣмъ имѣемъ:

$A^4-B^4=(A^2)^2-(B^2)^2=(A^2+B^2)(A^2-B^2)=(A^2+B^2)(A+B)(A-B)\ \ldots\ (4).$

$A^6-B^6=(A^3)^2-(B^3)^2=(A^3+B^3)(A^3-B^3)=(A+B)(A-B)(A^2+AB+B^2)(A^2-AB+B^2)\ .(5).$

Вотъ примѣры примѣненія этихъ формулъ:

1) $4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$.

2) $(a+b-c)^2-(a-2b+3c)^2=(2a-b+2c)(3b-4c)$.

3) $a^8-b^8=(a^4)^2-(b^4)^2=(a^4+b^4)(a^4-b^4)=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

4) $8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$.

5) $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$.

6) Разложить на множители

$$2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

Придавъ къ этому выраженію и вычтя изъ него $2a^2b^2$, находимъ:

$$4a^2b^2-2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4$$

$$(2ab)^2-(a^4+2a^2b^2+b^4)+2(a^2+b^2)c^2-c^4=$$

$$(2ab)^2-(a^2+b^2)^2+2(a^2+b^2)c^2-c^4=$$

$$(2ab)^2-\left\{(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)c^2+c^4\right\}=$$

$(2ab)^2-\left\{(a^2+b^2)-c^2\right\}^2=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)=$ $[(a+b)^2-c^2][-(a-b)^2+c^2]=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

Разсмотримъ еще разложеніе выраженій A^4+B^4, $A^4+B^4+A^2B^2$, $A^4+B^4-kA^2B^2$.

Придавая къ первому изъ этихъ выраженій и вычитая изъ него $2A^2B^2$, находимъ:

$$A^4+B^4=A^4+2A^2B^2+B^4-2A^2B^2=(A^2+B^2)^2-(\sqrt{2}.AB)^2=$$
$$(A^2+B^2+AB\sqrt{2})(A^2+B^2-AB\sqrt{2}).$$

Такимъ же образомъ найдемъ:

$$A^4+B^4+A^2B^2=(A^2+B^2)^2-A^2B^2=(A^2+B^2+AB)(A^2+B^2-AB).$$

$$A^4+B^4-kA^2B^2=(A^2+B^2)^2-(k+2)A^2B^2=$$
$$=(A^2+B^2+AB\sqrt{k+2})(A^2+B^2-AB\sqrt{k+2}).$$

57. Методъ группированія членовъ. — Если всѣ члены многочлена не имѣютъ общаго множителя, то иногда возможно бываетъ разбить ихъ на группы такъ, чтобы всѣ группы имѣли общаго множителя, который и выносится за скобки. Общихъ правилъ для такихъ преобразованій нѣтъ; какъ ихъ совершать, укажутъ нижеслѣдующіе примѣры.

1. Разложить на множители выраженіе $a^2+bc-ac-ab$. Разбиваемъ многочленъ на двѣ группы: a^2-ac и $+bc-ab$; вынося въ первой группѣ за скобки a, находимъ $a(a-c)$; вынося во второй группѣ $-b$, получимъ $-b(a-c)$. Слѣд. данное выраженіе $=a(a-c)-b(a-c)$; вынося здѣсь за скобки $a-c$, получаемъ окончательно $(a-c)(a-b)$.

2 Для разложенія на множители тринома $x^2-10x+24$, разобьемъ сначала членъ $-10x$ на два члена: $-6x$ и $-4x$, послѣ чего данное выраженіе

превратится въ $x^2 - 6x - 4x + 24$. Вынося въ первыхъ двухъ членахъ за скобки x, а въ третьемъ и четвертомъ — 4, получимъ $x(x-6) - 4(x-6) = (x-6)(x-4)$.

Этотъ примѣръ есть частный случай тринома $x^2 - (a+b)x + ab$. Раскрывъ сначала скобки, послѣ чего получимъ $x^2 - ax - bx + ab$, поступаемъ затѣмъ какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ; такимъ образомъ сперва найдемъ $x(x-a) - b(x-a)$, а потомъ $(x-a)(x-b)$.

3. Разложить на множители $6x^2 + x - 12$. Замѣнивъ средній членъ разностью $9x - 8x$, находимъ $6x^2 + 9x - 8x - 12$. Взявъ за скобки въ первыхъ двухъ членахъ $3x$, а въ третьемъ и четвертомъ — 4, имѣемъ: $3x(2x+3) - 4(2x+3) = (2x+3)(3x-4)$.

4. Разложить на множители $a^2b^2(a-b) - a^2c^2(a-c) + b^2c^2(b-c)$.

Имѣемъ послѣдовательно:

$$
\begin{aligned}
& a^2\{b^2(a-b) - c^2(a-c)\} + b^2c^2(b-c) \\
&= a^2\{ab^2 - ac^2 + c^3 - b^3\} + b^2c^2(b-c) \\
&= a^2\{a(b^2-c^2) - (b^3-c^3)\} + b^2c^2(b-c) \\
&= a^2\{a(b-c)(b+c) - (b-c)(b^2+bc+c^2)\} + b^2c^2(b-c) \\
&= a^2(b-c)\{a(b+c) - (b^2+bc+c^2)\} + b^2c^2(b-c) \\
&= (b-c)\{a^3(b+c) - a^2(b^2+bc+c^2) + b^2c^2\} \\
&= (b-c)\{a^2b(a-b) + a^2c(a-b) + c^2(b^2-a^2)\} \\
&= (b-c)(a-b)\{a^2b + a^2c - c^2(a+b)\} \\
&= (b-c)(a-b)\{b(a^2-c^2) + ac(a-c)\} \\
&= (b-c)(a-b)(a-c)(ab+bc+ac).
\end{aligned}
$$

5. Разложить на множители $a^{x+y} - a^yb^y + a^xb^x - b^{x+y}$.

Замѣчая, что показатели складываются при умноженіи степеней одной и той же буквы, замѣняемъ 1-й и 4-й члены произведеніями $a^x.a^y$ и b^xb^y, послѣ чего данное выраженіе приметъ видъ $a^xa^y - a^yb^y + a^xb^x - b^xb^y$, или $a^y(a^x - b^y) + b^x(a^x - b^y)$, и наконецъ $(a^x - b^y)(a^y + b^x)$.

6. Разложить на множители $x^3 + 4x^2 + x - 6$. Представивъ второй членъ въ видѣ $3x^2 + x^2$, а третій — въ видѣ $3x - 2x$, получаемъ выраженіе $x^3 + 3x^2 + x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2(x+3) + x(x+3) - 2(x+3) = (x+3)(x^2 + x - 2) = (x+3)(x^2 + 2x - x - 2) = (x+3)\{x(x+2) - (x+2)\} = (x+3)\{x+2)(x-1)\} = (x+3)(x+2)(x-1)$.

Умноженіе и дѣленіе многочленовъ съ буквенными коэффиціентами.

58. Если въ данныхъ для умноженія многочленахъ встрѣчаются члены, содержащіе одинаковыя степени главной буквы, то такіе члены разсматриваютъ какъ подобные по отношенію къ главной буквѣ и соединяютъ въ одинъ, вынося за скобку общую степень главной буквы, а многочленный множитель, такимъ

образомъ полученный, считаютъ коэффиціентомъ этой степени. Пусть, напр., требуется умножить

$$ax^3+bx^3-a^2x^2+a^3x-3abx^2-b^2x^2+b^3x-a^4+3b^4 \text{ на}$$
$$ax^2+a^2x-b^2x-bx^2+a^3-2b^3.$$

Сдѣлавъ вынесеніе за скобки, представимъ первый многочленъ въ видѣ

$$(a+b)x^3-(a^2+3ab+b^2)x^2+(a^3+b^3)x-a^4+3b^4,$$

а второй въ видѣ

$$(a-b)x^2+(a^2-b^2)x+a^3-2b^3.$$

Разсматриваемъ первый многочленъ какъ четырехчленъ, а второй какъ трехчленъ; $a+b, a^2+3ab+b^2$ и a^3+b^3—какъ коэффиціенты при степеняхъ x перваго многочлена, $-a^4+3b^4$ какъ свободный членъ этого многочлена; $a-b$ и a^2-b^2 — какъ коэффиціенты, и a^3-2b^3 — какъ свободный членъ втораго многочлена.

Чтобы многочлены уписались въ одной строкѣ, скобки замѣняютъ вертикальною чертою, справа отъ которой пишутъ степень буквы x, а слѣва одинъ подъ другимъ члены коеффиціента, каждый съ его знакомъ. Дѣйствіе располагаютъ слѣдующ. образ.

a	x^3	$-a^2$	x^2	$+a^3$	x	$-a^4$	
$+b$		$-3ab$		$+b^3$		$+3b^4$	. . . . множимое
		$-b^2$					

a	x^2	$+a^2$	x	$+a^3$	
$-b$		$-b^2$		$-2b^3$	. . . . множитель

a^2	x^5	$-a^3$	x^4	$+a^4$	x^3	$-a^5$	x^2	$-a^6$	x	$-a^7$	Произведеніе до приведенія.
$-b^2$		$-2a^2b$		$-a^3b$		$+a^4b$		$+a^4b^2$		$+2a^4b^3$	
		$+2ab^2$		$+ab^3$		$+3ab^4$		$+3a^2b^4$		$+3a^3b^4$	
		$+b^3$		$-b^4$		$-3b^5$		$-3b^6$		$-6b^7$	
		$+a^3$		$-a^4$		$+a^5$		$+a^6$			
		$+a^2b$		$-3a^3b$		$-a^3b^2$		$-a^3b^3$			
		$-ab^2$		$+3ab^3$		$+a^2b^3$		$-2b^6$			
		$-b^3$		$+b^4$		$-b^5$					
				$+a^4$		$-a^5$					
				$+a^3b$		$-3a^4b$					
				$-2ab^3$		$-a^3b^2$					
				$-2b^4$		$+2a^2b^3$					
						$+6ab^4$					
						$+2b^5$					

a^2	x^5	$-a^2b$	x^4	$+a^4$	x^3	$-a^5$	x^2	$+a^4b^2$	x	$-a^7$	Произведеніе по приведеніи.
$-b^2$		$+ab^2$		$-3a^3b$		$-2a^4b$		$-a^3b^3$		$+2a^4b^3$	
				$+2ab^3$		$-2a^3b^2$		$+3a^2b^4$		$+3a^3b^4$	
				$-2b^4$		$+3a^2b^3$		$-5b^6$		$-6b^7$	
						$+9ab^4$					
						$-2b^5$					

Сперва умножаютъ всѣ члены множимаго на ax^2, потомъ на $-bx^2$, затѣмъ на $+a^2x$ и т. д., располагая и произведеніе вертикальными колоннами по сте-

пенямъ буквы x; соединивъ, наконецъ, подобные члены въ каждой колоннѣ, получаютъ окончательное произведенie.

59. Пусть требуется раздѣлить многочленъ съ многочленными коэффиціентами на другой такого же рода. Дѣйствіе располагаютъ какъ обыкновенно, съ тою разницею, что вмѣсто скобокъ употребляютъ вертикальныя черты. Дѣленія коэффиціентовъ совершаютъ отдѣльно, называя эти дѣйствія частными дѣленіями. Все это указано въ нижеслѣдующемъ примѣрѣ.

$$
\begin{array}{r|l|l|l||r|l}
a^4 & x^3 \quad +a^4 & x^2 \quad +4a^3 & x \quad +4a^2 & a^2 & x \quad +2a \\
-a^3b & \qquad +2a^3 & \qquad +10ab^2 & \qquad -9b^2 & -ab & \qquad +3b \\
+ab^3 & \qquad +a^2b^2 & & & +b^2 & \\
-b^4 & \qquad +3a^2b & & & & \\
 & \qquad -2ab^2 & & & & \\
 & \qquad -3b^3 & & & & \\
 & \qquad +b^4 & & & & \\
a^4 & x^3 \quad +2a^3 & x^2 & & & \\
-a^3b & \qquad +3a^2b & & & & \\
+ab^3 & \qquad -2ab^2 & & & & \\
-b^4 & \qquad -3b^3 & & & & \\
\hline
 & a^4 & x^2 \quad +4a^3 & x \quad +4a^2 & & \\
 & +a^2b^2 & \qquad +10ab^2 & \qquad -9b^2 & & \\
 & +b^4 & & & & \\
 & a^4 & x^2 \quad +2a^3 & x & & \\
 & +a^2b^2 & \qquad +5a^2b & & & \\
 & +b^4 & \qquad +5ab^2 & & & \\
 & & \qquad +3b^3 & & & \\
\hline
 & & 2a^3 & x \quad +4a^2 & & \\
 & & -5a^2b & \qquad -9b^2 & & \\
 & & +5ab^2 & & & \\
 & & -3b^3 & & & \\
 & & 2a^3 & x \quad +4a^2 & & \\
 & & -5a^2b & \qquad -9b^2 & & \\
 & & +5ab^2 & & & \\
 & & -3b^3 & & & \\
\hline
 & & & 0. & &
\end{array}
$$

Частное:

$$
\begin{array}{r|l|l}
a^2 & x^2 \quad +a^2 & x \quad +2a \\
-b^2 & \qquad +ab & \qquad -3b \\
 & \qquad +b^2 &
\end{array}
$$

Частныя дѣленія, служащія для опредѣланія коэффиціентовъ частнаго:

1-ое частное дѣленіе.

$$
\begin{array}{r|l}
a^4 - a^3b + ab^3 - b^4 & a^2 - ab + b^2 \\
\cline{2-2}
a^4 - a^3b + a^2b^2 & a^2 - b^2 \\
\cline{1-1}
-a^2b^2 + ab^3 - b^4 & \\
-a^2b^2 + ab^3 - b^4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

2-ое частное дѣленіе.

$$
\begin{array}{r|l}
a^4 \qquad + a^2b^2 \qquad + b^4 & a^2 - ab + b^2 \\
\cline{2-2}
a^4 - a^3b + a^2b^2 \qquad & a^2 + ab + b^2 \\
\cline{1-1}
a^3b \qquad\qquad + b^4 & \\
a^3b - a^2b^2 + ab^3 \qquad & \\
\cline{1-1}
a^2b^2 - ab^3 + b^4 & \\
a^2b^2 - ab^3 + b^4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

3-ье частное дѣленіе.

$$\begin{array}{l|l} 2a^3-5a^2b+5ab^2-3b^3 & a^2-ab+b^2 \\ \underline{2a^3-2a^2b+2ab^2} & \overline{2a-3b} \\ \quad -3a^2b+3ab^2-3b^3 & \\ \quad \underline{-3a^2b+3ab^2-3b^3} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

60. Задачи.

Разложить на множители выраженія:

1. $15a^3b^5x^3y^2+27a^4b^2x^4y^3-12a^5x^5y^2$.
2. $12a^5x^5y^2-15a^4bx^4y^3-48a^2b^3x^2y^5+60ab^4xy^6$.
3. $24a^3b^2(a^2-b^2)x^3-15a^2b^3(a+b)^2x^2y-18ab^5(a+b)xy^2$.
4. $(a+b)(a^2+ab+b^2)-(a^3+b^3)$.
5. $x^3+y^3-(x^2-y^2)x+(x+y)x^2$.
6. $x(x^3+y^3)-x^2(x^2-y^2)$.
7. $(a^2-b^2)(x^4-y^4)+(a-b)^2(x^3-y^3)x-a(a-b)(x^2-y^2)x^2$.
8. $a(a^3-b^3)(x^4-y^4)-[(a^2+b^2)^2-a^2b^2](x^2-y^2)^2+(a^2+ab+b^2)(x^6-y^6)$.
9. $(a^2-b^2)(x^6-y^6)+(a^4-b^4)(x^4-y^4)+(a^6-b^6)(x^2-y^2)$.
10. $(ac+c^2)^2+(a^2+ac)^2$.
11. $(x^3+ax^2+bx)^2+(ax+b)(x^2+ax+b)^2$.
12. $\frac{1}{9}x^2-25$.
13. $(3x+2y-4z)^2-(2x-5y-7z)^2$.
14. $(a+b-c+d)^2-(a-b+c+d)^2$.
15. $(1+ab+a+b)^2-(1-ab+a-b)^2$.
16. $(a^2+ab)^2-(b^2+ab)^2$.
17. $a^2-c^2+b(2a+b)$.
18. $(a^2+b^2)^2-(c^2-2ab)^2$.
19. $[a^2x^2-c^2y^2+b^2(x^2-y^2)]^2-4b^2(ax^2-cy^2)^2$.
20. $4x^4y^4-(x^4+y^4-x^2y^2)^2$.
21. $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$.
22. $a^8+a^4b^4+b^8$.

23. Разложить на два множителя, цѣлыхъ и раціональныхъ относительно a и b, выраженіе a^8+b^8, и на пять множителелей $a^{16}-x^{16}$.

24. Разложить $a^{32}-b^{32}$ на девять множителей, цѣлыхъ и раціональныхъ относительно a и b.

25. Разложить x^9+1 и x^9-1.

26. $(a^2+b^2+c^2-d^2-2ab)^2-4c^2(a-b)^2$.

27. $ac+bd+ad+bc$.

28. $ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$.

29. $a^2c^2+b^2d^2-a^2d^2-b^2c^2$.

30. a^2+bc-b^2-ac.

31. $ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)$.

32. $ac(a+c)-bc(b+c)+ab(a-b)$.

33. $b(a^2+c^2)-ac(a+c)-b^2(b+c)+bc(a+b)$.

34. $bcd(b-c)(c-d)(d-b)+abd(a-b)(b-d)(d-a)-abc(a-b)(b-c)(c-a)$.

35. $a\{(b-d)(c^2-d^2)-(c-d)(b^2-d^2)\}-b\{(a-d)(c^2-d^2)-$
$(c-d)(a^2-d^2)\}+c\{(a-d)(b^2-d^2)-(b-d)(a^2-d^2)\}$.

36. $(a+b)\{(a^2+c^2)(a^3+d^3)-(a^2+d^2)(a^3+c^3)\}$
$-(a+c)\{(a^2+b^2)(a^3+d^3)-(a^2+d^2)(a^3+b^3)\}$
$+(a+d)\{(a^2+b^2)(a^3+c^3)-(a^2+c^2)(a^3+b^3)\}$.

37. $a[(b^2+d^2)(c^2-d^2)-(c^2+d^2)(b^2-d^2)]$
$-b[(a^2+d^2)(c^2-d^2)-(c^2+d^2)(a^2-d^2)]$
$+c[(a^2+d^2)(b^2-d^2)-(b^2+d^2)(a^2-d^2)]$.

38. $a[ac(a^2+b^2)-ab(a^2+c^2)]-b[bc(a^2+b^2)-ab(b^2+c^2)]$
$+c[bc(a^2+c^2)-ac(b^2+c^2)]$.

39. $1+ab+x(a+b)-(a+b)-x(1+ab)$.

40. x^2+3x+2.
41. x^2-5x+6.

42. $x^2+10x+21$.
43. $x^2-8x+15$.

44. $4x^2+8x+3$.
45. $4x^2+11x-3$.

46. $6x^2+5x-4$.
47. a^3-7a+6.

48. $x^2+x(y-z)-yz$.
49. $x^4+3y^2x^2-4y^4$.

50. $12a^4+a^2x^2-x^4$.
51. $9x^2y^2-3xy^3-6y^4$.

52. $x^6-5x^3y^3+7x^2y^4-3y^6$.
53. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

54. Доказать, что полномъ

$$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

можно представить въ видѣ произведенія

$$(x^4+1)(x^2+1)(x+1).$$

55. $a^mb^{m+1}c^{m+2}+b^mc^{m+1}a^{m+2}+c^ma^{m+1}b^{m+2}-a^{m+2}b^{m+1}c^m-b^{m+2}c^{m+1}a^m$ $-c^{m+2}a^{m+1}b^m$ представить въ видѣ: $a^mb^mc^m(a-b)(b-c)(c-a)$.

56. Показать, что полиномъ

$$x^7-x^6-x^5+x^4-x^3+x^2+x-1$$

можно представить въ видѣ

$$(x^4-1)(x^3-x^2-x+1) \text{ или } (x^2+1)(x+1)^2(x-1)^3.$$

57. $(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2-c^2-d^2)$ представить въ видѣ $(ad+bc)$ $(ac+bd)$.

58. $a^3bcd+b^3acd+c^3abd+d^3abc+a^2c^2d^2+a^2b^2d^2+a^2b^2c^2+b^2c^2d^2$ представить въ видѣ $(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)$.

59. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$ представить въ видѣ $3(b+c)(c+a)(a+b)$.

60. Полиномъ $x^3+ax^2-bx^2+cx^2-abx-bcx+acx-abc$ представить въ видѣ произведенія трехъ множителей.

61. $(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$ представить въ видѣ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$.

62. Разложить на два множителя выраженіе

$$x^{p+q} - x^q y^r + x^p y^s - y^{r+s}.$$

63. Выраженіе: $(a+b+c)^4 - (a+b)^4 - (b+c)^4 - (c+a)^4 + a^4 + b^4 + c^4$ представить въ видѣ $12abc(a+b+c)$.

Перемножить полиномы:

64. $(a+b)x^3 + (a^2+ab+b^2)x^2 + (a^3+a^2b+ab^2+b^3)x + a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$ на $(a-b)x^2 + (a^2+b^2)x + a^3 - b^3$.

65. $(a+b)x^4 + (a^2+ab+b^2)x^3 + (a^3+a^2b+ab^2+b^3)x^2 + (a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)x + a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$ на $(a-b)x^2 + (a^2-ab+b^2)x + a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, и провѣрить дѣйствіе, положивъ $a=2$, $b=1$, $x=1$.

66. $x^3 + (a-b)x^2 + (a^2+3ab+b^2)x + a^3 - 4a^2b - 2ab^2 - b^3$ на $(a+b)x^2 + (a^2-b^2)x + 2a^3 + b^3$.

67. $(a+b)x^2 - (a^2+b^2)x + a^3 + b^3$ на $(a-b)x^2 - (a^2-b^2)x + a^3 - b^3$.

68. $x^3 - 5x^2(a-b) + x(a^2-b^2) - 3a^3$ на $x^3 + 2x^2(b-a) - x(a^2+b^2) - 2b^3$.

69. $x^3 + x^2(y-z)(a+b) - x(y^2+z^2)(a^2-b^2) + (y^3-z^3)(a^3+b^3)$ на $x^3 - x^2(y+z)(a-b) + x(y^2-z^2)(a^2+b^2) - (y^3+z^3)(a^3-b^3)$.

Раздѣлить:

70. $x^4 - \{a(a+2) + b(b+2)\}x^3 + \{2(a+b)(a^2+b^2) + (a+b)^2 + ab\}x^2 - \{(a+b)^2(a^2+b^2) + ab(a^2+b^2+a+b)\}x + ab(a+b)(a^2+b^2)$ на $x^2 - (a+b)x + ab$.

71. $(a^3-3a^2+3a-1)x^5 + (3a^4-5a^3+2a^2-3a+3)x^4 + (a^4-4a^3-2a^2+3a+4)x^3 - (3a^6-a^5-10a^3+3a^2-a+5)x^2 + (a^7+a^5+2a^4-6a^3-2a^2+2a+1)x - 3a^5 + 2a^4 + 3a^2 - 2a$ на $(a^2-2a+1)x^3 + (2a^3-4)x^2 - (a^4+a^2-1)x + 3a^2 - 2a$.

72. $(a^3-1)x^3 - (a^3+a^2-2)x^2 + (4a^2+3a+2)x - 3a - 3$ на $(a-1)x^2 - (a-1)x + 3$.

73. $(a^3-b^3)x^3 - (2a^3b-2b^4)x^2 + (a^3b^2+a^2b^3-2b^5)x - a^6 - a^5b + ab^5 + b^6$ на $(a^2+ab+b^2)x^2 + (a^3-b^3)x + a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$.

74. $20(a+b)^5 - 46(a+b)^4x + 84(a+b)^3x^2 - 78(a+b)^2x^3 + 64(a+b)x^4 - 32x^5$ на $5(a+b)^3 - 4(a+b)^2x + 5(a+b)x^2 - 4x^3$.

ГЛАВА VII.

О дѣлимости на биномы вида $x \pm a$. — Основанія способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. — Различныя приложенія предыдущихъ теоремъ. — Задачи.

Безу

61. Т е о р е м а I. — *Если раціональный цѣлый относительно буквы* x *полиномъ, расположенный по убывающимъ степенямъ этой бук-*

вы, раздѣлимъ на биномъ x — a, *то въ остаткѣ получимъ результатъ подстановки въ этотъ полиномъ буквы* a *вмѣсто* x.—

Приводимъ *доказательство д' Аламбера.*—

Всякій полиномъ, цѣлый и раціональный относительно x, можно представить въ видѣ

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots\ldots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0,$$

разумѣя подъ m какое нибудь цѣлое положительное число, а подъ A_m, A_{m-1}, ... A_1, A_0 — нѣкоторые коэффиціенты, т. е. выраженія — не содержащія буквы x. Если такой многочленъ раздѣлить на $x - a$, то окончательный остатокъ долженъ быть выраженіемъ, не содержащимъ буквы x; въ самомъ дѣлѣ, если допустить, что остатокъ содержитъ букву x хотя только въ первой степени, то можно бы было продолжать дѣленіе, потому что дѣлитель содержитъ также букву x въ первой степени. Означивъ этотъ, не содержащій буквы x, окончательный остатокъ черезъ R, постараемся опредѣлить R. Назвавъ для этого частное, которое, какъ и дѣлимое, должно быть многочленомъ, расположеннымъ по нисходящимъ степенямъ буквы x, черезъ Q, и замѣтивъ, что дѣлимое = произведенію дѣлителя на частное, сложенному съ остаткомъ, получимъ

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots\ldots + A_1 x + A_0 = (x - a).\ Q + R.$$

Замѣчая, что обѣ части этого равенства представляютъ лишь различныя формы одного и того же выраженія, убѣждаемся этимъ, что равенство наше есть ничто иное какъ *тождество*, т. е. равенство, справедливое при всякой величинѣ входящихъ въ него буквъ. Слѣдовательно, оно будетъ справедливо и тогда, когда, въ частности, положимъ $x = a$. Но при такой подстановкѣ первая часть приметъ видъ

$$A_m a^m + A_{m-1} a^{m-1} + \ldots\ldots + A_1 a + A_0 \quad \ldots\ldots (1),$$

и слѣд. не будетъ содержать буквы x, такъ какъ и коэффиціенты A_{m-1} ....., A_1, A_0 не содержатъ x. Что касается второй части, то въ выраженіи Q буква x также исчезнетъ; разность $x - a$, при подстановкѣ a вмѣсто x, обратится въ $a - a$ или въ ноль, а слѣд. и произведеніе $Q(x - a)$, котораго одинъ множитель равенъ 0, также обратится въ 0. Во второй части останется, поэтому, только выраженіе R, которое не измѣнится отъ указанной подстановки, такъ какъ совсѣмъ не содержитъ буквы x. Итакъ, дѣлая $x = a$, мы вмѣсто прежняго равенства получимъ слѣдующее

$$A_m a^m + A_{m-1} a^{m+1} \ldots\ldots + A_1 a + A_0 = R,$$

которое и доказываетъ, что остатокъ имѣетъ форму даннаго многочлена, въ которомъ буква x замѣнена буквою a.

62. Если бы дѣлитель былъ $x + a$, то этотъ случай легко привести къ разсмотрѣнному, замѣтивъ, что $x + a$ можно представить въ видѣ разности $x - (-a)$. Отсюда прямо вытекаетъ

Теорема II, служащая дополненіемъ первой: *Если цѣлый раціональный относительно буквы* x *полиномъ раздѣлимъ на биномъ* x + a,

то въ остаткѣ получимъ результатъ подстановки въ этотъ полиномъ буквы (— a) *вмѣсто* x.

Примѣры. I. Найти остатокъ отъ раздѣленія многочлена

$$3x^5 - 4x^4 - 2x^2 + 7$$

на $x - 2$.

Подставляя въ данный полиномъ 2 вмѣсто x, находимъ окончательный остатокъ

$$R = 3.2^5 - 4.2^4 - 2.2^2 + 7 = 96 - 64 - 8 + 7 = 31.$$

II. Найти остатокъ отъ раздѣленія тринома

$$x^2 - 8x + 15$$

на $x + 5$.

Подставляя въ данный триномъ (— 5) вмѣсто x, получимъ $(-5)^2 - (8.- -5) + 15 = 25 + 40 + 15 = 80$. Окончательный остатокъ $= 80$.

63. Изъ доказанныхъ теоремъ вытекаютъ такія слѣдствія.

Слѣдствіе I. — Если многочленъ обращается въ ноль послѣ замѣны въ немъ буквы x буквою a, то онъ дѣлится на $x - a$; если многочленъ обращается въ ноль послѣ замѣны буквы x буквою $(-a)$, то онъ дѣлится на $x + a$.

Въ самомъ дѣлѣ, многочленъ, полученный послѣ замѣны буквы x буквою a или $(-a)$, есть ничто иное какъ окончательный остатокъ отъ раздѣленія даннаго многочлена въ первомъ случаѣ на $x - a$, во второмъ—на $x + a$. Но если окончат. остатокъ равенъ нулю, то это значитъ, что многочленъ дѣлится безъ остатка — въ первомъ случаѣ на $x - a$, во второмъ на $x + a$.

Слѣдствіе II, обратное предыдущему. Если многочленъ дѣлится на $x - a$ или на $x + a$, то результатъ подставки въ него — въ первомъ случаѣ буквы a, а во второмъ $(-a)$ вмѣсто x, долженъ быть равенъ нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, по условію, многочленъ дѣлится на $x - a$ или $x + a$, то остатокъ въ обоихъ случаяхъ долженъ быть равенъ нулю; но этотъ остатокъ есть результатъ подстановки вмѣсто x буквы a или $(-a)$; стало быть этотъ результатъ долженъ быть равенъ нулю.

Примѣры. I. Трехчленъ $x^2 - 2x + 1$ обращается въ 0, если вмѣсто x подставить 1; слѣд. онъ дѣлится на $x - 1$.

II. Многочленъ $4ax^3 - 7a^2x^2 - 6a^3x + 9a^4$ обращается въ 0 при $x = a$, а потому онъ дѣлится на $x - a$.

III. Триномъ $x^2 + 5x + 6$ обращается въ 0 при $x = -3$, слѣд. онъ дѣлится на $x + 3$.

64. Законъ составленія частнаго отъ раздѣленія цѣлаго относительно буквы x полинома на биномъ $x - a$.

Легко вывести законъ, по которому составляется частное дѣленія многочлена $A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots\ldots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$ на $x - a$.

Въ самомъ дѣлѣ, совершая на самомъ дѣлѣ дѣленіе, найдемъ:

$$\begin{array}{l|l}
A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0 & x - a \\
\hline
- A_m x^m + A_m a x^{m-1} & A_m x^{m-1} + \begin{array}{l} A_m a \\ + A_{m-1}\end{array} \Big| x^{m-2} + \begin{array}{l} A_m a^2 \\ + A_{m-1}a \\ + A_{m-2}\end{array} \Big| x^{m-3} \\
\quad \begin{array}{l} + A_m a \\ + A_{m-1}\end{array} \Big| x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \ldots & + \ldots + Px^{k-1} + \begin{array}{l} Pa \\ + A_{k-1}\end{array} \Big| x^{k-2} + \ldots \\
\quad \begin{array}{l} \mp A_m a \\ \mp A_{m-1}\end{array} \Big| x^{m-1} \pm \begin{array}{l} A_m a^2 \\ \pm A_{m-1}a\end{array} \Big| x^{m-2} & \\
\qquad \begin{array}{l} + A_m a^2 \\ + A_{m-1}a \\ + A_{m-2}\end{array} \Big| x^{m-2} + A_{m-3}x^{m-3} + \ldots & \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad\quad Px^k + A_{k-1}x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \ldots & \\
\qquad\quad - Px^k \pm Pax^{k-1} & \\
\qquad\qquad \begin{array}{l} + Pa \\ + A_{k-1}\end{array} \Big| x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \ldots &
\end{array}$$

Найдя первые три члена частнаго, замѣчаемъ, что частное есть полиномъ степени $m-1$, причемъ:

Коэффиціентъ перваго члена частнаго равенъ коэффиціенту 1-го члена дѣлимаго;

Коэффиціентъ 2-го члена частнаго равенъ произведенію предшествующаго коэффиціента на a, сложенному со вторымъ коэффиціентомъ дѣлимаго;

Коэффиціентъ третьяго члена частнаго равенъ произведенію предшествующаго коэффиціента на a, сложенному съ третьимъ коэффиціентомъ дѣлимаго.

Докажемъ, что этотъ законъ общій. Пусть, слѣдуя обыкновенному правилу дѣленія, мы нашли въ частномъ членъ Px^{k-1}. Онъ получился отъ раздѣленія перваго члена соотвѣтствующаго остатка на x; сл. первый членъ остатка есть Px^k, а потому весь остатокъ будетъ $Px^k + A_{k-1}x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \ldots$ Умножая членъ частнаго Px^{k-1} на дѣлителя и вычитая это произведеніе изъ сказаннаго остатка, въ новомъ остаткѣ получимъ

$$(Pa + A_{k-1})x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \ldots\ldots$$

Раздѣливъ первый членъ этого остатка на x, находимъ слѣдующій членъ частнаго

$$(Pa + A_{k-1}).x^{k-2}.$$

Коэффиціентъ его равенъ произведенію предшествующаго коэффиціента на a, сложенному съ коэффиціентомъ того же порядка дѣлимаго. Общность закона коэффиціентовъ такимъ образомъ доказана.

Если окажется, что дѣлимый полиномъ *неполный*, т. е. въ немъ недостаетъ членовъ съ какими либо промежуточными степенями главной буквы, то для приложенія предыдущаго правила слѣдуетъ возстановить недостающіе члены, внося ихъ съ коэффиціентомъ 0.

65. Если дѣлитель будетъ $x + a$, то разсматривая его какъ $x - (-a)$, заключаемъ, что для нахожденія частнаго нужно только въ частное § 64 вмѣсто a подставить $(-a)$; сдѣлавъ это, найдемъ

$$\begin{array}{l|l|l} A_m x^{m-1} - A_m a & x^{m-2} + A_m a^2 & x^{m-3} \ldots\ldots \\ \quad + A_{m-1} & \quad - A_{m-1} a & \\ & \quad + A_{m-2} & \end{array}$$

66. Примѣры. I. Найти частное и остатокъ отъ раздѣленія

$$5x^4 - 23x^2 + 3x - 58 \text{ на } x - 2.$$

Дополняя данный полиномъ членомъ съ x^3, имѣемъ

$$5x^4 + 0.x^3 - 23x^2 + 3x - 58.$$

Коэфф. 1-го чл. частнаго	$= 5$	а 1-й чл. частнаго	$= 5x^3$
« 2-го « «	$= 5.2 + 0$ т. е. $+10$	« 2-й « «	$+10x^2$
« 3-го «	$+10.2 - 23$ т. е. -3	« 3-й « «	$= -3x$
« 4-го «	$= (-3).2 + 3,\quad -3$	« 4-й « «	$= -3$

Искомое частное, поэтому, $= 5x^3 + 10x^2 - 3x - 3$.

Остатокъ $R = 5.2^4 - 23.2^2 + 3.2 - 58 = 80 - 92 + 6 - 58 = -64$.

Итакъ: $\frac{5x^4 - 23x^2 + 3x - 58}{x-2} = 5x^3 + 10x^2 - 3x - 3 + \frac{-64}{x-2}$.

II. Такимъ же образомъ найдемъ

$$\frac{x^4 - x^3 + 1}{x+1} = x^3 - 2x^2 + 2x - 2 + \frac{3}{x+1}.$$

III. Найти частное и остатокъ отъ раздѣленія

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \text{ на } 2x - 3.$$

Для приложенія нашего правила нужно дѣлимое расположить по степенямъ $2x$, разсматривая $2x$ какъ главную букву. Множа и дѣля первый членъ на 8, изображаемъ его въ видѣ $\frac{1}{8}(2x)^3$; множа и дѣля второй членъ на 4, пишемъ его въ видѣ $\frac{3}{4}(2x)^2$. Дѣлимое так. обр. будетъ

$$\frac{1}{8}(2x)^3 - \frac{3}{4}(2x)^2 + (2x) - 1.$$

Затѣмъ, прилагая правило, найдемъ

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{2x - 3} = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} - \frac{\frac{11}{8}}{2x-3}.$$

Примѣчаніе I. — Пріемомъ, указаннымъ въ § 61, докажемъ, что остатокъ отъ раздѣленія цѣлаго раціональнаго по буквѣ x полинома на биномъ вида $px + q$ есть результатъ подстановки въ данный полиномъ количества $\left(-\frac{q}{p}\right)$ вмѣсто x. Слѣдуетъ лишь замѣтить, что вынеся p за скобки, получимъ $px + q = p\left(x + \frac{q}{p}\right)$.

Примѣчаніе II.—Отсюда непосредственно вытекаетъ: 1) если полиномъ обращается въ ноль по замѣнѣ въ немъ буквы x количествомъ $-\frac{q}{p}$, то онъ

дѣлится на $px+q$; и 2) если полиномъ дѣлится на $px+q$, то результатъ подстановки въ него количества $\left(-\frac{q}{p}\right)$ вмѣсто x равенъ нулю.

67. Теорема III. — *Для того чтобы цѣлый относительно* x *полиномъ дѣлился на* x — a *или на* x + a, *необходимо чтобы нисшій* (свободный) *членъ его дѣлился на* a. —

Въ самомъ дѣлѣ, если полиномъ P дѣлится, напр., на $x-a$, то

$$P=(x-a).Q,$$

гдѣ Q — цѣлый относительно x полиномъ; изъ этого равенства слѣдуетъ, что нисшій членъ полинома P, какъ произведенія, равенъ произведенію a на нисшій членъ частнаго Q, а слѣд. долженъ дѣлиться на a.

68. Теорема IV. — *Если полиномъ* P, *цѣлый относительно* x, *дѣлится на каждый изъ биномовъ* x — a, x — b, x — c, *гдѣ* a, b *и* c *неравны, въ отдѣльности, то онъ дѣлится и на ихъ произведеніе.*

По условію полиномъ P дѣлится на $x-a$; пусть частное будетъ Q, гдѣ Q есть также цѣлый относительно x полиномъ; въ такомъ случаѣ

$$P=(x-a).Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Но полиномъ P, по условію, дѣлится и на $x-b$; сл. при $x=b$ онъ обращается въ ноль. И такъ, если въ предыдущее равенство вмѣсто x подставимъ b, то первая часть его обратится въ ноль; слѣд. и вторая, при подстановкѣ въ нее b вмѣсто x, должна обратиться въ ноль, т. е. должно быть

$$(b-a).Q_b=0,$$

гдѣ Q_b означаетъ выраженіе Q, въ которомъ x замѣненъ буквою b. Мы имѣемъ произведеніе двухъ множителей: $b-a$ и Q_b, равное 0; для этого необходимо, чтобы по крайней мѣрѣ одинъ изъ нихъ былъ нулемъ. Но множитель $b-a$ не есть 0, ибо по условію b неравно a; слѣд. Q_b должно быть нулемъ. Итакъ, Q обращается въ ноль при $x=b$, сл. оно дѣлится на $x-b$. Означивъ частное этого дѣленія черезъ Q', гдѣ Q' есть цѣлый относит. x полиномъ, имѣемъ

$$Q=(x-b).Q' \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Вставляя вмѣсто Q его величину въ равенство (1), получаемъ

$$P=(x-a)(x-b)Q' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

По условію P дѣлится на $x-c$, сл. полиномъ P, при $x=c$, обращается въ ноль; поэтому и вторая часть равенства (3), при $x=c$, должна обращаться въ ноль, т. е. должно быть:

$$(c-a)(c-b)Q'_c=0.$$

гдѣ Q'_c есть значеніе полинома Q' при $x=c$. Но разности $c-a$ и $c-b$ неравны нулю, ибо, по условію, a, b и c различны, слѣд. чтобы произведеніе было нулемъ, нужно чтобы было $Q'_c=0$. Это значитъ, что Q' дѣлится на $x-c$; обозначивъ частное этого дѣленія черезъ Q'', имѣемъ

$$Q'=(x-c).Q''$$

Внося величину Q' въ равенство (3), получаемъ

$$P=(x-a)(x-b)(x-c).Q''.$$

Теорема такимъ образомъ доказана.

Примѣръ. Доказать, что полиномъ

$$x^q y^r + y^q z^r + z^q x^r - x^r y^q - y^r z^q - z^r x^q$$

дѣлится на произведеніе $(x-y)(x-z)(y-z)$.

Подставляя въ данный полиномъ y вмѣсто x, находимъ, что онъ обращается въ 0; слѣд. онъ дѣлится на $x-y$. Такимъ же образомъ убѣждаемся, что какъ при $x=z$, такъ и при $y=z$, полиномъ обращается въ 0; сл. дѣлится какъ на $x-z$, такъ и на $y-z$. Дѣлясь на каждый изъ биномовъ $x-y$, $x-z$, $y-z$ въ отдѣльности, онъ, въ силу теоремы IV, дѣлится и на ихъ произведеніе.

69. Предыдущія теоремы служатъ для нахожденія цѣлыхъ дѣлителей вида $x-a$ нѣкотораго даннаго цѣлаго относительно x полинома. При помощи теоремы III можно опредѣлить, какіе цѣлые биномы этого вида *могутъ быть* дѣлителями, а при помощи теоремы II, слѣдствіе I, опредѣляемъ тѣ изъ нихъ, которые въ самомъ дѣлѣ служатъ дѣлителями даннаго полинома.

Очевидно, что число дѣлителей полинома не можетъ превышать его степени; иначе, въ силу теоремы IV, онъ долженъ бы былъ дѣлится на полиномъ, котораго степень выше его собственной, а это невозможно.

Приводимъ примѣры.

I. Найти всѣхъ цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей полинома

$$x^4 - 17x^3 + 98x^2 - 232x + 192.$$

если таковые имѣются.

Находимъ дѣлителей числа 192; это будутъ числа 2,3,4,6,8, и т. д. По теоремѣ третьей, искомые дѣлители, если только они существуютъ, будутъ вида $x \pm 2$, $x \pm 3$, $x \pm 4$, $x \pm 6$, ...

Подставляя въ данный полиномъ вм. x число 2, легко убѣдимся, что полиномъ обращается въ ноль; стало быть онъ дѣлится на $x-2$.

Подставляя вм. x число -2, убѣдимся, что полиномъ не обращается въ ноль; слѣд. $x+2$ не есть его дѣлитель.

Подставляя вмѣсто x число 3, убѣдимся, что полиномъ обращается въ ноль; сл. дѣлится на $x-3$.

Подставивъ вмѣсто x число -3, замѣтимъ, что полиномъ не обращается въ ноль, сл. не дѣлится на $x+3$.

Продолжая такимъ же образомъ, найдемъ, что данный полиномъ имѣетъ дѣлителями $x-4$ и $x-8$.

Мы уже нашли четыре дѣлителя: $x-2, x-3, x-4, x-8$; другихъ цѣлыхъ дѣлителей не можетъ быть, такъ какъ данный полиномъ — четвертой степени.

II. Найти цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей полинома

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc,$$

если таковые существуютъ.

Въ силу теоремы III, искомыми дѣлителями могутъ быть только

$$x-a,\ x-b,\ x-c;\ x+a,\ x+b,\ x+c.$$

Но при $x=a$ полиномъ обращается въ

$$a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+ac+bc)a - abc,$$

что, какъ легко видѣть, приводится къ нулю. Слѣд. $x-a$ есть искомый дѣлитель.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что $x-b$ и $x-c$ также суть дѣлители даннаго полинома.

Нашъ полиномъ — третьей степени; мы нашли трехъ дѣлителей; другихъ не можетъ быть; *сл.* задача рѣшена.

70. Такимъ же образомъ, какъ мы доказали теорему IV, докажемъ, что если полиномъ дѣлится въ отдѣльности на каждый изъ биномовъ $px+q$, $p'x+q'$, $p''x+q''$, при условіи, что значенія x : $-\frac{q}{p}, -\frac{q'}{p'}, -\frac{q''}{p''}$, при которыхъ эти дѣлители обращаются въ ноль, всѣ различны, то онъ дѣлится и на ихъ произведеніе.

71. Слѣдствія теоремы IV.

I. Если полиномъ P, цѣлый относитально x, m-й степени:

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots + A_1 x + A_0$$

обращается въ ноль при m различныхъ значеніяхъ буквъ x : a, b, c, ... h, i, $к$, то онъ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$A_m(x-a(x-b,(x-c)\ \ldots\ldots\ (x-i)(x-k).$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть полиномъ четвертой степени

$$P = A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

обращается въ ноль при четырехъ различныхъ значеніяхъ x: a, b, c, и d. Въ такомъ случаѣ, по теоремѣ IV, онъ дѣлится на произведеніе

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

которое само четвертой степени; стало быть частное не содержитъ x и есть численное, а сл. оно сводится къ частному отъ раздѣленія A_4x^4 на высшій членъ x^4 дѣлителя; это частное равно, слѣдов., A_4. Приравнявъ дѣлимое произведенію дѣлителя на частное имѣемъ

$$P = A_4(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

II. *Опредѣленіе.* Если цѣлый относительно x полиномъ обращается въ ноль при всякомъ значеніи x, то говорятъ что онъ *тождественно равенъ нулю.*

Докажемъ, что если цѣлый относительно x полиномъ, m-ой степени обращается въ нуль при нѣсколькихъ значеніяхъ x, число которыхъ превышаетъ m, то онъ тождественно равенъ нулю (т. е. равенъ нулю при всякомъ x).

Пусть, напр., полиномъ

$$P = A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

обращается въ ноль при пяти различныхъ значеніяхъ x: a, b, c, d, e. Мы доказали, что если полиномъ P обращается въ ноль при четырехъ значеніяхъ x: a, b, c, и d, то онъ беретъ видъ

$$P = A_4(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ \ldots\ldots\ (1)$$

Но, по условію, P обращается въ ноль также и при $x=e$; слѣд.

$$A_4(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)=0;$$

но какъ множители $e-a$, $e-b$, . . . отличны отъ нуля, то чтобы произведе-

ніе равнялось нулю, необходимо, чтобы A_4 равнялось нулю. Но если $A_4=0$, то изъ (1) видно, что каково бы ни было x, всегда будетъ $P=0$.

Итакъ, P равно 0 при всякомъ x, т. е. тождественно равняется нолю.

72. Теорема V. *Чтобы цѣлый относительно* x *полиномъ тождественно (т. е. при всякомъ значеніи* x) *равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы всѣ коэффиціенты его равнялись нулю.*

Пусть дано, что полиномъ

$$P=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

равенъ нулю при всякомъ x; стало быть, въ частности, онъ будетъ равенъ нулю и при $x=0$. Но при $x=0$ всѣ члены, содержащіе x, обращаются въ 0, сл. равенство

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2 Dx+E=0 \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

обращается въ

$$E=0 \; . \; . \; . \; . \; (II).$$

Откинувъ въ равенствѣ (I)E, какъ количество, равное 0, а въ остальныхъ членахъ вынеся за скобки x, получимъ равенство

$$P=x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=0.$$

Для того, чтобы P равнялось 0 при всякомъ x, необходимо, чтобы, множитель Ax^3+Bx^2+Cx+D равнялся нулю при всякомъ x, кромѣ, можетъ быть, x-са равнаго нулю, ибо при $x=0$, для того чтобы P равнялось 0 — нѣтъ необходимости, чтобы второй множитель равнялся нулю, потому-что первый (x) уже $=0$. Но такъ какъ Ax^3+Bx^2+Cx+D равенъ 0 для числа значеній x, превышающаго степень этого полинома, заключаемъ, на основаніи § 71, II, что полиномъ этотъ равенъ нулю и при всякомъ x, сл. и при $x=0$. Но положивъ въ немъ $x=0$, обратимъ его въ D, а равенство Ax^3+Bx^2+ $+Cx+D=0$ въ

$$D=0 \; . \; . \; . \; . \; (III).$$

Откинувъ въ полиномѣ P члены Dx и E, какъ равные 0, а въ остальныхъ вынеся за скобки x^2, получимъ произведеніе

$$P=x^2(Ax^2+Bx+C),$$

которое должно быть равно 0 при всякомъ x. Отсюда, подобно предыдущему, докажемъ, что

$$C=0 \; . \; . \; . \; . \; (IV)$$

и т. д. Такимъ образомъ всѣ коэффиціенты полинома P должны быть равны 0. Доказали, что это условіе необходимо. Но оно и достаточно, потому-что если всѣ коэффиціенты равны, 0, то и полиномъ P равенъ нулю.

73. Теорема VI. *Если два цѣлые относительно* x *полинома остаются равными при всякомъ значеніи* x, *то они тождественны.*

Пусть полиномы

$$Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$$
$$\text{и } ax^3+bx^2+dx+e$$

имѣютъ одинаковую численную величину при всякомъ x; тогда ихъ разность будетъ тождественно равна нулю. Но эта разность есть

$$Ax^5+Bx^4+(C-a)x^3+(D-b)x^2+(E-d)x+(F-e);$$

слѣд., по теоремѣ V, имѣемъ;

$$A=0;\ B=0;\ C=a;\ D=b;\ E=d;\ F=e.$$

Изъ того, что $A=0$ и $B=0$, заключаемъ, что члены Ax^5 и Bx^4 исчезаютъ, такъ-что число членовъ въ обоихъ полиномахъ одинаково; а какъ $C=a$, $D=b$, $E=d$ и $F=e$, то коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x равны. Оба полинома ничѣмъ не отличаются одинъ отъ другаго, или что тоже, тождественны.

Примѣчаніе. Теоремы V и VI служатъ основаніемъ *способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ,* имѣющаго многочисленнѣйшія и разнообразнѣйшія приложенія въ алгебрѣ. Изобрѣтеніе этого способа приписываютъ знаменитому французскому математику и философу Декарту (Cartesius).

Различныя приложенія предыдущихъ теоремъ.

74. *Приложеніе I.*—Выведемъ условія дѣлимости суммы или разности одинаковыхъ степеней двухъ количествъ на сумму или разность основаній.

1. Пусть требуется раздѣлить x^m-a^m на $x-a$. Подставивъ въ дѣлимое букву a вмѣсто x, найдемъ окончательный остатокъ; онъ будетъ $=a^m-a^m$ или 0, откуда заключаемъ, что дѣленіе совершается безъ остатка.

Для нахожденія частнаго представляемъ дѣлимое въ видѣ полнаго многочлена m-ой степени;

$$x^m+0.x^{m-1}+0.x^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+0.x-a^m.$$

По правилу § 64, высшій членъ частнаго равенъ x^{m-1}. Второй членъ частнаго содержитъ x^{m-2}; а коэффиціентъ его найдемъ, помноживъ коэффиціентъ перваго члена частнаго на a, что дастъ a, и придавъ сюда второй коэф. дѣлимаго т. е. 0; итакъ, второй членъ частнаго $=ax^{m-2}$. Продолжая такимъ образомъ, найдемъ

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots\ldots\ldots+a^{m-1}\ \ldots(1).$$

2, Раздѣлить x^m+a^m на $x-a$. Подставляя въ дѣлимое вмѣсто x букву a, найдемъ окончательный остатокъ $a^m+a^m=2a^m$. Отсюда заключаемъ, что дѣленіе не совершается безъ остатка. Составляя частное по предыдущему, получимъ

$$\frac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a}\ \ldots(2).$$

3. Раздѣлить x^m-a^m на $x+a$. Подставивъ въ дѣлимое вмѣсто x количество $(-a)$, найдемъ окончат. остатокъ. Онъ будетъ: α) при m четномъ равенъ $(-a)^m-a^m=a^m-a^m=0$. Частное же будетъ въ этомъ случаѣ

$$\frac{x^m-a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots+a^{m-2}x-a^{m-1}\ \ldots\ldots(3).$$

β) при m нечетномъ остатокъ $=(-a)^m-a^m=-a^m-a^m=-2a^m$; частное-же

$$\frac{x^m-a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+xa^{2m-3}-\ldots\ldots\ldots+a^{m-1}-\frac{2a^m}{x+a}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (4).$$

4. Раздѣлить x^m+a^m на $x+a$. Подставляя въ дѣлимое вмѣсто x букву $(-a)$, найдемъ оконч. остатокъ. Онъ будетъ: α) при m четномъ: $(-a)^m+a^m=a^m+$ $+a^m=2a^m$, такъ-что

$$\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots\ldots+a^{m-2}x-a^{m-1}+\frac{2a^m}{x+a}\cdot\ \cdot\ \cdot\ (5).$$

β) при m нечетномъ: $(-a)^m+a^m=-a^m+a^m=0$; слѣд. дѣленіе совершается безъ остатка и частное

$$\frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ \ldots\ldots\ldots\ldots+a^{m-1}\ \ldots\ .\ (6).$$

Отсюда заключаемъ, что 1) x^m-a^m всегда дѣлится на $x-a$; 2) x^m-a^m дѣлится на $x+a$, если m — четное; 3) x^m+a^m никогда не дѣлится на $x-a$, но дѣлится на $x+a$ при m — нечетномъ. Такимъ образомъ нашли тѣже выводы, какіе получили раньше непосредственнымъ дѣленіемъ. Новый пріемъ далъ тѣже результаты быстрѣе.

75. *Приложеніе* II. — Мы видѣли, что x^m-a^m всегда дѣлится на $x-a$; но при m четномъ дѣлится еще на $x+a$. Слѣдовательно, когда m — четное, x^m-a^m, дѣлясь на биномы $x+a$ и $x-a$, дѣлится, по теоремѣ IV, и на ихъ произведеніе $(x-a)(x+a)$, т. е. на x^2-a^2. Итакъ: разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на разность квадратовъ тѣхъ же количествъ. Частное будетъ

$$\frac{x^m-a^m}{x^2-a^2}=x^{m-2}+a^2x^{m-4}+a^4x^{m-6}+\ \ldots\ldots\ldots\ldots+a^{m-4}x^2+a^{m-2}.$$

76. *Приложеніе* III. — 1. При какомъ численномъ значеніи К полиномъ

$$x^3-3x^2+5x+K$$

дѣлится безъ остатка на $x-3$?

Чтобы полиномъ дѣлился на $x-3$, нужно, чтобы результатъ подстановки въ него 3 вмѣсто x обращался въ нуль, т. е. чтобы

$$3^3-3.3^2+5.3+K=0,\ \text{или}\ 15+K=0.$$

Послѣднее равенство возможно только при $K=-15$.

2. При какомъ значеніи К полиномъ

$$x^3-3x^2+5x+K$$

дѣлится на $x+3$?

Нужно, чтобы результатъ подстановки въ этотъ полиномъ числа (-3) вмѣсто x былъ равенъ нулю, т. е. чтобы

$$(-3)^3-3.(-3)^2+5.(-3)+K=0,\ \text{или}\ -69+K=0;$$

а это возможно только при $K=69$.

3. При какомъ значеніи К полиномъ

$$x^3-3x^2+5x+K$$

раздѣлится на $3x-2$?

На осн. § 66, Примѣч. II, заключаемъ, что необходимо, чтобы результатъ подстановки въ данный полиномъ числа $\frac{2}{3}$ вмѣсто x былъ нулемъ, т. е. чтобы

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5 . \frac{2}{3} + K = 0, \text{ или } \frac{62}{27} + K = 0,$$

а это возможно только при $K = -\frac{62}{27}$.

77. *Приложеніе* IV. — Теорема IV, § 68 можетъ быть примѣнена къ разложенію многочленовъ на множители. Методъ разложенія, на ней основанный, называется *методомъ двучленныхъ дѣлителей*, и состоитъ въ слѣдующемъ. Расположивъ многочленъ по степенямъ какой либо буквы, x напримѣръ, стараются открыть двучленныхъ дѣлителей $x-a$, $x-b$, ... , $x-k$; составляютъ изъ нихъ произведеніе $(x-a)(x-b)$ . . . . . $(x-k)$; дѣлятъ на него данный полиномъ P, и если въ частномъ получается выраженіе Q, то

$$P = (x-a)(x-b) \ldots\ldots (x-k). Q.$$

Разложеніе такимъ образомъ будетъ совершено.

Впрочемъ, слѣдуетъ замѣтить, что этотъ методъ не такъ удобенъ въ практическомъ отношеніи, какъ выше указанные методы разложенія; потому-что въ случаѣ большаго числа возможныхъ дѣлителей, придется дѣлать слишкомъ много вычисленій, чтобы выбрать тѣхъ изъ нихъ, которые дѣйствительно служатъ дѣлителями даннаго полинома. Кромѣ того, этотъ методъ и не такъ изященъ какъ тѣ, съ которыми мы уже ознакомились. Поэтому онъ употребляется лишь въ рѣдкихъ, исключительныхъ случаяхъ; практическое значеніе его — руководить въ томъ, какихъ множителей слѣдуетъ искать въ данномъ полиномѣ. Вотъ примѣръ: разложить

$$P = a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c) - a^2b^2d^2(a-b)(a-d)(b-d)$$
$$+ a^2c^2d^2(a-c)(a-d)(c-d) - b^2c^2d^2(b-c)(b-d)(c-d).$$

Легко убѣдиться, что полиномъ P обращается въ ноль при $a=b$, $a=c$, $a=d$, $b=c$ и т. д.; потому онъ дѣлится на $a-b$, $a-c$, $a-d$, $b-c$, и т. д. Попытаемся выдѣлить этихъ множителей. Вынося изъ первыхъ двухъ членовъ $a^2b^2(a-b)$, а изъ двухъ другихъ $c^2d^2(c-d)$, получимъ:

$$P = a^2b^2(a-b)\left\{c^2(a-c)(b-c) - d^2(a-d)(b-d)\right\}$$
$$+ c^2d^2(c-d)\left\{a^2(a-c)(a-d) - b^2(b-c)(b-d)\right\}.$$

Располагая первый членъ въ первыхъ фигурныхъ скобкахъ по убывающимъ степенямъ c, а второй по уб. степ. буквы d; затѣмъ, первый членъ во вторыхъ фигурныхъ скобкахъ — по убывающимъ степенямъ буквы a, а второй — буквы b, имѣемъ:

$$P = a^2b^2(a-b)\left\{c^4 - c^3(a+b) + c^2ab - d^4 + d^3(a+b) - d^2ab\right\}$$
$$+ c^2d^2(c-d)\left\{a^4 - a^3(c+d) + a^2cd - b^4 + b^3(c+d) - b^2cd\right\}$$

или

$$P = a^2b^2(a-b)\left\{c^4 - d^4 - (c^3-d^3)(a+b) + (c^2-d^2)ab\right\}$$
$$+ c^2d^2(c-d)\left\{a^4 - b^4 - (a^3-b^3)(c+d) + (a^2-b^2)cd\right\}$$

Теперь видно, что въ первыхъ фигурныхъ скобкахъ имѣется множитель $c-d$, а во вторыхъ $a-b$; вынося ихъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}&=a^2b^2(a-b)(c-d)\{(c^2+d^2)(c+d)-(c^2+cd+d^2)(a+b)+ab(c+d)\}\\&+c^2d^2(c-d)(a-b)\{(a^2+b^2)(a+b)-(a^2+ab+b^2)(c+d)+cd(a+b)\}\end{aligned}$$

Вынося теперь за скобки $(a-b)(c-d)$, и означивъ третій множитель буквою P', положимъ

$$\mathrm{P}=(a-b)(c-d).\mathrm{P}';$$

гдѣ

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'&=a^2b^2\{(c^2+d^2)(c+d)-(c^2+cd+d^2)(a+b)+ab(c+d)\}\\&+c^2d^2\{(a^2+b^2)(a+b)-(a^2+ab+b^2)(c+d)+cd(a+b)\}\\&=a^2b^2\{(c^2+d^2)(c-a)+d(c^2+d^2)-b(c^2+d^2)-cd(a+b)+ab(c+d)\}\\&+c^2d^2\{(a^2+b^2)(a-c)+b(a^2+b^2)-d(a^2+b^2)-ab(c+d)+cd(a+b)\}\\&=a^2b^2\{(a-c)(bc+bd-c^2-d^2-cd)+d^2(d-b)\}\\&+c^2d^2\{(a-c)(a^2+ab+b^2-ad-bd)-b^2(d-b)\}\\&=(a-c)\{a^2b^2(bc+bd-c^2-d^2-cd)+c^2d^2(a^2+ab+b^2-ad-bd)\}\\&+b^2d^2(d-b)(a^2-c^2).\end{aligned}$$

Вынося $a-c$, положимъ

$$\mathrm{P}'=(a-c)\mathrm{P}'',$$

гдѣ

$$\begin{aligned}\mathrm{P}''&=a^2b^2\{c(b-c)+d(b-c)\}-a^2b^2d^2+c^2d^2a^2+c^2d^2\{a(b-d)+b(b-d)\}\\&\qquad\qquad+b^2d^2(d-b)(a+c)\\&=a^2b^2(b-c)(c+d)-a^2d^2(b^2-c^2)+c^2d^2(b-d)(a+b)+b^2d^2(d-b)(a+c)\\&=a^2(b-c)\{b^2(c+d)-d^2(b+c)\}+d^2(b-d)\{c^2(a+b)-b^2(a+c)\}\\&=a^2(b-c)\{c(b^2-d^2)+bd(b-d)\}+d^2(b-d)\{a(c^2-b^2)+bc(c-b)\}.\end{aligned}$$

Здѣсь мы можемъ вынести за скобки $(b-c)(b-d)$; полагаемъ

$$\mathrm{P}''=(b-c)(b-d)\,\mathrm{P}''',$$

гдѣ

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'''&=a^2\{c(b+d)+bd\}-d^2\{a(b+c)+bc\}\\&=bc(a^2-d^2)+acd(a-d)+abd(a-d)=(a-d)(abc+abd+acd+bcd).\end{aligned}$$

Итакъ, окончательно

$$\mathrm{P}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(abc+abd+acd+bcd).$$

78. *Приложеніе V.* — При какихъ значеніяхъ буквъ a и b полиномъ x^3+8x^2+5x-a дѣлится безъ остатка на x^2+3x-b?

Вопросъ можно рѣшить двоякимъ путемъ.

1-й методъ. Онъ состоитъ въ томъ, что совершаютъ на самомъ дѣлѣ дѣленіе, доводя его до остатка, степень котораго была бы ниже степени дѣлителя; затѣмъ выражаютъ, что остатокъ долженъ быть *тождественно равенъ нулю.*

Выполняемъ дѣленіе:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+8x^2+5x-a & x^2+3x-b \\
-x^3\mp 3x^2\pm bx & x+5 \\
\hline
5x^2+\begin{array}{c|}5\\+b\end{array}\, x-a & \\
-5x^2\mp 15x\pm 5b & \\
\hline
\begin{array}{r|}b\\-10\end{array}\, \begin{array}{l}x-a\\+5b\end{array} &
\end{array}$$

Чтобы дѣленіе совершалось безъ остатка, остатокъ долженъ быть тождественно равенъ нулю; а для этого, по теоремѣ V, § 72, необходимо и достаточно, чтобы

$$b-10=0..(1) \text{ и } 5b-a=0....(2).$$

Равенство (1) возможно только при $b=10$.

Подставляя 10 вмѣсто b въ равенство (2), имѣемъ

$$50-a=0,$$

что возможно только при $a=50$.

Итакъ, искомыя значенія a и b суть: $a=50$, $b=10$.

Не трудно провѣрить, что $x^3+8x^2+5x-50$ дѣлится безъ остатка на $x^2+3x-10$.

2-й методъ (неопредѣленныхъ коэффиціентовъ): — Выражаютъ, что дѣлимое равно произведенію дѣлителя на цѣлый полиномъ, котораго степень равна разности степеней дѣлимаго и дѣлителя, ибо такова должна быть степень частнаго.

Такимъ образомъ пишемъ:

$$x^3+8x^2+5x-a=(x^2+3x-b)(px+q),$$

такъ какъ общій видъ цѣлаго полинома первой степени есть $px+q$.

Располагая вторую часть по степенямъ x, имѣемъ тождество

$$x^3+8x^2+5x-a=p.x^3+\begin{array}{c|}3p\\+q\end{array}\,x^2\begin{array}{c|}-bp\\+3q\end{array}\,x-bq.$$

Отсюда, по теор. VI, § 73, приравнивая между собою коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ буквы x, имѣемъ четыре условія для опредѣленія a, b, p и q; а именно:

$$p=1; \qquad 3p+q=8; \qquad -b.p+3q=5; \qquad bq=a.$$

Подставляя во второе равенство 1 вмѣсто p, находимъ; $3+q=8$, откуда $q=5$. Подставивъ въ третье равенство вмѣсто p и q ихъ величины, имѣемъ: $-b+$ $+15=5$, что возможно только при $b=10$. Наконецъ, вставляя въ четвертое равенство вмѣсто b и q ихъ величины, находимъ: $a=50$.

Итакъ: $a=50$; $b=10$; $p=1$ и $q=5$.

Стало быть дѣленіе безъ остатка возможно только при $a=50$ и $b=10$; а частное $(px+q)$ есть $x+5$.

79. *Приложеніе VI.* — Въ какомъ случаѣ x^m-a^m дѣлится на x^p-a^p?

Выполняемъ дѣйствіе, чтобы найти законъ образованія послѣдовательныхъ остатковъ:

$$\begin{array}{l|l}
x^m - a^m & x^p - a^p \\
\hline
-x^m \pm a^p x^{m-p} & x^{m-p} + a^p x^{m-2p} + a^{2p} x^{m-3p} + \ldots \\
\quad a^p x^{m-p} - a^m & \\
\quad - a^p x^{m-p} \pm a^{2p} x^{m-2p} & \\
\qquad a^{2p} x^{m-2p} - a^m & \\
\qquad - a^{2p} x^{m-2p} \pm a^{3p} x^{m-3p} & \\
\qquad\quad a^{3p} x^{m-3p} - a^m & \\
\qquad\quad \ldots\ldots & \\
\qquad\quad \ldots\ldots & \\
\qquad\quad \ldots\ldots &
\end{array}$$

Итакъ, если h означаетъ нѣкоторое цѣлое число, одинъ изъ остатковъ будетъ имѣть видъ

$$a^{hp} x^{m-hp} - a^m.$$

Поэтому, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая цѣлая величина h, при которой этотъ остатокъ *тождественно равнялся-бы нулю.*

Онъ имѣетъ видъ многочлена, расположеннаго по убывающимъ степенямъ буквы x, и условія тождественности остатка нулю будутъ различны въ зависимости отъ того, будетъ-ли $m - hp$ равно 0, или отлично отъ нуля.

Если $m - hp$ отлично отъ нуля, то коэффиціенты при степеняхъ x должны быть равны нулю, т. е.

$$a^{hp} = 0 \quad \text{и} \quad a^m = 0;$$

это возможно только при $a = 0$. Но такой выводъ не соотвѣтствуетъ задачѣ.

Если $m - hp = 0$, то $x^{m-hp} = 1$; и остатокъ обратится въ ноль, когда

$$a^{hp} = a^m,$$

т. е. когда $m = h.p$.

Итакъ, необходимо и достаточно, чтобы m было кратнымъ числа p.

Въ такомъ случаѣ:

$$\frac{x^m - a^m}{x^p - a^p} = x^{m-p} + a^p x^{m-2p} + a^{2p} x^{m-3p} + \ldots\ldots\ldots + a^{m-2p} x^p + a^{m-p}.$$

80. Задачи.

1. Доказать что полиномъ

$$3x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 10x + 339$$

дѣлится на $x + 3$, и написать частное по правилу § 64.

2. Тотъ же вопросъ для

$$(x^5 - 3bx^4 + 5b^2x^3 - 8b^3x^2 + 6b^4x - 4b^5):(x - 2b).$$

3. Тотъ же вопросъ для

$$(9x^5 + 6x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 15x - 6):(3x - 1).$$

Написать, не совершая дѣленія, частное и остатокъ въ каждомъ изъ слѣдующихъ примѣровъ дѣленія:

4. $3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ на биномы

$$x - 1,\ x + 2,\ 2x - 1,\ 3x + 2.$$

5. $(8x^5 - 7x^3 + 4x^2 + 36x - 1):(x + 3)$

6. $(3x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 4x - 1):(x - 2)$.

7. $(7x^4+8x^3+4):(x-3)$.

8. $(10x^6+4x^3+5x-1):(x+2)$.

9. $(x^3-2ax^2+4a^2x-a^3):(x-a)$.

10. $(x^5-ax^4+3a^3x^2+a^5):(x+2a)$.

11. $(x^8-10a^2x^6+5a^6x^2+a^8):(x+5a)$.

12. $x^5-3cx^4+5c^2x^3-8c^3x^2+6c^4x-4c^5$ на биномы

$$x-2c \quad \text{и} \quad x-2a.$$

13. Доказать, что полиномъ

$$x^my-xy^m-x^mz+xz^m+y^mz-yz^m$$

дѣлится на $(x-y)(x-z)$.

Найти всѣхъ цѣлыхъ двучленныхъ дѣлителей, если такіе существуютъ, для полиномовъ:

14. a^3-7a+6.

15. $x^2+x(y-z)-yz$.

16. $x^4+3x^2y^2-4y^4$.

17. $x^3-4x^2-31x+70$.

18. $x^6-5x^3y^3+7x^2y^4-3y^6$.

19. $a^3-a^2(b-c+d)+a(bd-bc-cd)+bcd$.

20. $x^3-2(a+b)x^2+x[(a+b)^2+ab]-ab(a+b)$.

21. $x^3-x^2(3a-c)+x\left\{3a^2-b^2-2ac+bc\right\}-a(a^2-b^2)-abc+a^2c$.

22. $x^3-x^2(2d+b-c)+x(2db-bc-2cd)+2bcd$.

23. Опредѣлить m подъ условіемъ, чтобы полиномъ $a^3+b^3+c^3-mabc$ дѣлился на $a+b+c$.

24. Доказать, что $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$, и вообще что $(a+b+c)^k-a^k-b^k-c^k$, при нечетномъ k, дѣлится на $(a+b)(b+c)(c+a)$.

25. Дѣлится-ли полиномъ

$$x^4-11x^3+41x^2-61x+30.$$

на $(x-1)(x-2)(x-3)$.

26. Опредѣлить k подъ условіемъ, чтобы $4x^3-6x+k$ дѣлилось на $x+3$.

27. Опредѣлить k подъ условіемъ, чтобы полиномъ

x^4-5x^2+4x-k дѣлился на $2x-1$.

28. Опредѣлить p и q такъ, чтобы триномъ x^4+px^2+q дѣлился на x^2+2x+5.

29. Опредѣлить p, q и r подъ условіемъ, чтобы полиномъ $x^4+3x^3+px^2+qx+r$ дѣлился на $(x^2-1)(x+2)$.

30. Доказать, что полиномъ

$$x^my^nz^p+y^mz^nx^p+z^mx^ny^p-x^py^nz^m-y^pz^nx^m-z^px^ny^m$$

дѣлится на $(x-y)(y-z)(z-x)$.

31. Найти такія значенія для p и q, при которыхъ полиномъ x^4-3x^3+px+q дѣлится безъ остатка на x^2-2x+4.

Рѣшить задачу двумя способами: 1) примѣняя непосредственное дѣленіе; 2) способомъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

32. Тѣми же пріемами опредѣлить, при какихъ значеніяхъ a и b полиномъ x^3+ax^2+bx-3 дѣлится безъ остатка на x^2-x+1.

33. При какомъ a возможно дѣленіе $(x^4+1):(x^2+ax+1)$?

34. При какихъ p и q возможно дѣленіе $(x^4+1):(x^2+px+q)$?

35. Указать условія, при которыхъ возможно дѣленіе на-цѣло въ выраженіяхъ:

$$\frac{x^m+a^m}{x^2+a^2};\qquad \frac{x^m+a^m}{x^3+a^3};\qquad \frac{x^m-a^m}{x^3-a^3}.$$

36. Найти условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы триномъ $Ax^4+2Bx^2y^2+Cy^4$ былъ полнымъ квадратомъ.

37. Найти условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы частное

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

имѣло величину, независящую отъ x.

38. Опредѣлить p и q такъ, чтобы полиномъ

$$x^4+3x^3-5x^2+px+q$$

дѣлился на $(x-1)(x+2)$.

39. Опредѣлить p и q такъ, чтобы полиномъ x^4+3x^2+px+q дѣлился на x^2-x-1

40. Въ какомъ случаѣ x^m+a^m дѣлится безъ остатка на x^p+a^p?

41. Какое соотношеніе должно существовать между m и p (гдѣ m и p — числа четныя), для того чтобы полиномъ

$$x^m-x^{m-1}+x^{m-2}-x^{m-3}+\ldots\ldots+1$$

дѣлился безъ остатка на полиномъ

$$x^p-x^{p-1}+x^{p-2}-x^{p-3}+\ldots\ldots+1.$$

42. При какомъ условіи полиномъ

$$x^m+x^{m-1}+\ldots\ldots+x+1$$

дѣлится безъ остатка на полиномъ

$$x^k+x^{k-1}+\ldots\ldots+x+1?$$

43. Опредѣлить значенія m и n, при которыхъ триномъ x^3+mx+n дѣлится безъ остатка на $(x-a)(x-b)$.

44. Опредѣлить, какія соотношенія должны существовать между коэффиціентами полинома.

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E,$$

для того чтобы онъ дѣлился безъ остатка на x^2-a^2.

45. Доказать, что

$$nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$$

дѣлится на $(x-1)^2$, и найти частное.

Приложеніе: $n=5$.

46. $(x+1)^4-x^4=65$, и x есть число цѣлое. Найти x?

47. Произведеніе четырехъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, уменьшенное ихъ суммою, даетъ 818. Найти эти числа.

48. Произведеніе трехъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, увеличенное суммою ихъ квадратовъ, даетъ 320. Найти эти числа.

ГЛАВА VIII.

Общій наибольшій дѣлитель и наименьшее кратное алгебраическихъ выраженій.

81. *Дѣлителемъ* цѣлаго алгебраическаго выраженія называется такое другое цѣлое выраженіе, на которое первое дѣлится на-цѣло. Такъ, $4x^2y$ есть дѣлитель выраженія $48x^3y^2z$; $x-1$ есть дѣлитель тринома x^2-2x+1; x^4-a^4 имѣетъ дѣлителями $x-a$, $x+a$, x^2-a^2 и x^2+a^2.

Общимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ выраженій называется такое цѣлое выраженіе, которое дѣлитъ данныя на-цѣло или безъ остатка. Такъ, выраженія $(a-b)^2$ и a^2-b^2 имѣютъ общимъ дѣлителемъ $a-b$. Взявъ выраженія $a^3+a^2b-ab^2-b^3$, $a^3-3ab^2+2b^3$ и $a^3-2a^2b-ab^2+2b^3$, и разложивъ ихъ на множители, находимъ:

$$a^3+a^2b-ab^2-b^3=(a+b)^2(a-b):$$
$$a^3-3ab^2+2b^3=(a-b)^2(a+2b);$$
$$a^3-2a^2b-ab^2+2b^3=(a+b)(a-b)(a-2b);$$

откуда видно, что данные многочлены имѣютъ общимъ дѣлителемъ биномъ $a-b$.

Цѣлыя выраженія, не имѣющія никакихъ общихъ дѣлителей, называются *первыми между собою* или *взаимно простыми*. Такъ, $a+b$ и $a-b$ — выраженія взаимно простыя.

Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій называется произведеніе всѣхъ простыхъ дѣлителей, общихъ даннымъ выраженіямъ. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ, общій наибольшій дѣлитель есть $a-b$, потому-что иныхъ общихъ дѣлителей данныя выраженія и не имѣютъ. Взявъ выраженія x^4-a^4 и $x^3+2ax^2-a^2x-2a^3$ и разложивъ ихъ на множители, находимъ:

$$x^4-a^4=(x+a)(x-a)(x^2+a^2);$$
$$x^3+2ax^2-a^2x-2a^3=(x+a)(x-a)(x+2a);$$

замѣчаемъ, что простые дѣлители, общіе этимъ выраженіямъ, суть: $x+a$ и $x-a$; ихъ произведеніе x^2-a^2 и есть общій наибольшій дѣлитель двухъ данныхъ выраженій.

Очевидно, что если данныя выраженія раздѣлимъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, то черезъ это изъ нихъ исключатся *общіе* ихъ *дѣлители*, а потому частныя не будутъ имѣть уже никакихъ общихъ дѣлителей, т. е. будутъ первыя между собою. Отсюда вытекаетъ другое опредѣленіе общаго наибольшаго дѣлителя: *это есть такой общій дѣлитель, по раздѣленіи на который данныхъ выраженій, получаются частныя первыя между собою.* Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ, раздѣливъ выраженія x^4-a^4 и $x^3+2ax^2-a^2x-2a^3$ на общаго дѣлителя x^2-a^2, получаемъ частныя x^2+a^2 и $x+2a$ — первыя между собою. Заключаемъ, что по опредѣленію, x^2-a^2 и будетъ общій наиб. дѣлитель данныхъ выраженій.

Примѣчаніе I. — Между алгебраическимъ общимъ наиб. дѣлителемъ и общимъ наиб. дѣлителемъ чиселъ (въ ариѳметикѣ) есть существенное различіе. Общій наиб. дѣлитель чиселъ есть такой ихъ общій дѣлитель, который по *величинѣ* больше всѣхъ другихъ общихъ дѣлителей. Отсюда и названіе его — *наибольшій.*

Но алгебраическія выраженія различаются вообще не своею величиною, ибо буквамъ, въ нихъ входящимъ, вообще не приписываютъ частныхъ числовыхъ значеній; общій наиб. дѣлитель алгебраическихъ выраженій, какъ содержащій произведеніе всѣхъ общихъ дѣлителей, очевидно, будетъ *по степени выше* другихъ общихъ дѣлителей; поэтому, лучше было бы дать ему наименованіе *высшаго* общаго дѣлителя. Однакоже, за нимъ удержано названіе общаго *наибольшаго* дѣлителя.

Примѣчаніе II. — Для краткости слова: общій дѣлитель будетъ означать начальными буквами о. д.; также слова: общій наибольшій дѣлитель — буквами о. н. д.

Переходимъ къ изложенію способовъ опредѣленія общаго наиб. дѣлителя алгебраическихъ выраженій.

82. Способъ разложенія на множителей. — Пусть требуетстя найти о. н. д. одночленовъ

$$65a^5b^2c,\ 30a^7b^3 \text{ и } 45a^4b^{11}d,$$

т. е. такихъ выраженій, которыя прямо даны въ формѣ произведеній.

Согласно съ первымъ опредѣленіемъ, нужно составить произведеніе всѣхъ общихъ простыхъ дѣлителей — численныхъ и буквенныхъ. Произведеніе общихъ простыхъ числовыхъ дѣлителей есть о. н. д. коэффиціентовъ, и $=5$. Что касается буквенныхъ производителей, то нужно взять только общія буквы съ наименьшими показателями; общія буквы суть a и b; наименьшій показатель буквы a есть 4, буквы b — 2, сл. о. н. д. $=5a^4b^2$.

Выраженіе, такимъ образомъ составленное, удовлетворяетъ и второму опредѣленію общаго наиб. дѣлителя; въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ на него данные одночлены, получаемъ частныя: $13ac$, $6a^3b$ и $9b^9d$ — первыя между собою. Отсюда *Правило. Для составленія о. н. д. одночленовъ нужно къ общему наиб. дѣлителю коэффиціентовъ приписать всѣ общіе буквенные множители съ наименьшими показателями.*

Что касается многочленовъ, то когда они легко разлагаются на множителей, то и употребляютъ способъ разложенія на производителей, или, что тоже, превращаютъ многочлены въ одночлены и прилагаютъ къ нимъ предыдущее правило. Вотъ примѣры.

I. Найти о. н. д. многочленовъ

$$9a^2x^2 - 36 \text{ и } 12a^2x^2 + 48ax + 48.$$

Разлагая на множители, найдемъ:

$$9a^2x^2 - 36 = 3^2.(ax+2)(ax-2);$$
$$12a^2x^2 + 48ax + 48 = 4.3(ax+2)^2.$$

Взявъ произведеніе общихъ простыхъ множителей, найдемъ

$$\text{о. н. д.} = 3(ax+2).$$

II. Найти о. н. д. многочленовъ

$$x^4y^2 - 3x^3y^3 + 2x^2y^4 \text{ и } x^4y^2 - 4x^2y^4.$$

Разлагая на множители, находимъ:

$$x^4y^2 - 3x^3y^3 + 2x^2y^4 = x^2y^2(x-2y)(x-y),$$
$$x^4y^2 - 4x^2y^4 = x^2y^2(x+2y)(x-2y);$$

слѣд. о. н. д. $= x^2y^2(x-2y)$.

III. Найти об. н. д. полиномовъ

$$x^3+1 \text{ и } x^3+mx^2+mx+1.$$

Разложивъ на множители, получимъ

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$
$$x^3+mx^2+mx+1=(x+1)(x^2-x+mx+1);$$

слѣд. о. н. д. $= x+1$.

IV. Найти о. н. д. полиномовъ

$$3x^2y-3x^3+3zy-3xz \text{ и}$$
$$15x^2y-30xyz+15z^2y-15x^3+30x^2z-15xz^2.$$

По разложеніи на множителей, найдемъ, что

$$\text{1-й полиномъ} = 3(x^2+z)(y-x),$$
$$\text{2-й полиномъ} = 3.5(y-x)(x-z)^2.$$

Отсюда: о. н. д. $= 3(y-x)$.

83. Способъ послѣдовательнаго дѣленія. — Такъ какъ многочлены только въ рѣдкихъ случаяхъ легко поддаются разложенію на простыхъ множителей, то и предыдущій способъ прилагается съ успѣхомъ только въ исключительныхъ случаяхъ. Вообще же, для опредѣленія о. н. д. полиномовъ пользуются общимъ способомъ, который носитъ названіе *способа послѣдовательнаго дѣленія*. Нахожденіе о. н. д. этимъ способомъ основывается на слѣдующихъ теоремахъ.

84. Теорема I. — *О. н. д. двухъ выраженій не измѣнится, если одно изъ нихъ помножимъ или раздѣлимъ на количество, первое съ другимъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, о. н. д. есть произведеніе множителей, *общихъ* тому и другому выраженію, а потому если введемъ (умноженіемъ), или уничтожимъ (дѣленіемъ) въ одномъ изъ нихъ множителя, не входящаго въ составъ другаго выраженія, то отъ этого прибавится къ первому или уничтожится въ немъ множитель, котораго нѣтъ во второмъ, а слѣд. *общіе* множители останутся тѣ-же; значитъ не имѣнится и о. н. д.

Эта теорема облегчаетъ вычисленія, позволяя избѣгать дробныхъ коэффиціентовъ въ частныхъ.

85. Теорема II. *О. н. д. у дѣлимаго и дѣлителя служитъ общимъ дѣлителемъ у дѣлителя и остатка.*

Пусть данные многочлены суть M и N; обозначивъ частное отъ раздѣленія M на N буквою Q, а остатокъ R, и замѣтивъ, что дѣлимое = произведенію дѣлителя на частное, сложенному съ остаткомъ, имѣемъ

$$M = N \times Q + R \ldots\ldots (1)$$

Обозначивъ общаго дѣлителя многочленовъ M и N буквою Δ, раздѣлимъ на Δ обѣ части полученнаго равенства; найдемъ:

$$\frac{M}{\Delta}=\frac{N}{\Delta}\times Q+\frac{R}{\Delta}.$$

Но, по условію, Δ есть общій дѣлитель многочленовъ M и N, слѣд. частныя $\frac{M}{\Delta}$ и $\frac{N}{\Delta}$ суть выраженія цѣлыя; обозначивъ ихъ соотвѣтственно черезъ M' и N', представимъ послѣднее равенство въ видѣ

$$M'=N'\times Q+\frac{R}{\Delta},\ \text{откуда}\ \frac{R}{\Delta}=M'-N'\times Q.$$

Это равенство показываетъ, что $\frac{R}{\Delta}$ есть выраженіе цѣлое, ибо равно цѣлому выраженію $M'-N'\times Q$, значитъ R дѣлится на-цѣло на Δ.

Итакъ, мы доказали, что *всякій* дѣлитель, общій дѣлимому и дѣлителю, служитъ общимъ дѣлителемъ у дѣлителя и остатка; а слѣд. и общій наиб. дѣлитель дѣлимаго и дѣлителя служитъ также общимъ дѣлителемъ у дѣлителя и остатка.

86. Теорема III, обратная. *О. н. д. у дѣлителя и остатка служитъ также общимъ дѣлителемъ у дѣлимаго и дѣлителя.* —

Пусть Δ_1 будетъ общимъ дѣлителемъ выраженій N и R. Раздѣливъ обѣ части равенства (1) на Δ_1, получимъ

$$\frac{M}{\Delta_1}=\frac{N}{\Delta_1}\cdot Q+\frac{R}{\Delta_1};$$

но, по условію, $\frac{N}{\Delta_1}$ есть цѣлое выраженіе, равно какъ и $\frac{R}{\Delta_1}$; обозначивъ ихъ буквами N' и R', получимъ

$$\frac{M}{\Delta_1}=N'\times Q+R'.$$

Это равенство показываетъ, что $\frac{M}{\Delta_1}$ равно суммѣ двухъ цѣлыхъ выраженій; значитъ Δ_1 есть дѣлитель многочлена M.

Итакъ, мы доказали, что *всякій* дѣлитель, общій дѣлителю и остатку, служитъ также общимъ дѣлителемъ у дѣлимаго и дѣлителя; а слѣд. и общій наиб. дѣлитель дѣлителя и остатка служитъ общимъ дѣлителемъ у дѣлимаго и дѣлителя.

Изъ этихъ двухъ теоремъ выводится слѣдующая

87. Теорема IV. — *О. н. д. дѣлимаго и дѣлителя равенъ о. н. дѣлителю дѣлителя и остатка.*

Обозначимъ о. н. д. многочленовъ M и N (т. е. дѣлимаго и дѣлителя) буквою D; а о. н. д. у N и R (т. е. у дѣлителя и остатка) буквою D'. Въ силу теоремы II, выраженіе D должно быть общимъ дѣлителемъ многочленовъ N и R, слѣд. оно должно дѣлить безъ остатка выраженіе D' — общаго наиб. дѣлителя многочленовъ N и R. А, по теоремѣ III, выраженіе D' должно дѣлить на-цѣло количества M и N, а слѣд. и ихъ общаго наиб. дѣлителя D. Такимъ образомъ

D и D′ должны дѣлить другъ друга на-цѣло; но это возможно только тогда, когда они равны. Итакъ

$$D = D',$$

и теорема доказана.

88. На послѣдней теоремѣ и основанъ способъ послѣдовательнаго дѣленія.

Пусть данные многочлены суть M и N. Ихъ общій наиб. дѣл. можетъ содержать производителей одночленныхъ и многочленныхъ. Начинаютъ съ того, что отдѣляютъ въ многочленахъ M и N одночленныхъ производителей отъ многочленныхъ. Одночленный производитель многочлена M есть общій множитель всѣхъ членовъ этого многочлена; вынося его за скобки, и означая черезъ α, а многочленъ, заключающійся въ скобкахъ, черезъ A, имѣемъ:

$$M = \alpha . A.$$

Такъ же точно, вынося за скобки общаго множителя β всѣхъ членовъ многочлена N, и обозначая выраженіе, заключающееся въ скобкахъ, буквою B, получимъ:

$$N = \beta . B.$$

Производили — одночлены, общіе многочленамъ M и N, заключаются въ α и β; а производители — многочлены, общіе многочленамъ M и N, содержатся въ A и B. Такъ — какъ о. п. д. многочленовъ M и N есть произведеніе всѣхъ ихъ общихъ простыхъ множителей или дѣлителей, то очевидно, мы его найдемъ, если общаго наиб. дѣлителя количествъ α и β помножимъ на о. н. д. многочленовъ A и B. Обозначимъ о. н. д. многочленовъ M и N буквою Δ; о. н. д. одночленовъ α и β — буквою d; и о. н. д. многочленовъ A и B — буквою D. На основаніи сказаннаго имѣемъ:

$$\Delta = d . D.$$

Пусть, напримѣръ:

$$M = 9ab^2x^5 - 30ab^2x^3 + 45ab^2x + 24ab^2;$$
$$N = 6a^4b^2cx^6 - 12a^4b^2cx^5 - 36a^4b^2cx^4 + 24a^4b^2cx^3 + 78a^4b^2cx^2 + 36a^4b^2cx.$$

Вынося изъ всѣхъ членовъ перваго многочлена за скобки $3ab^2$, а изъ всѣхъ членовъ втораго $6a^4b^2cx$, получимъ:

$$M = 3ab^2(3x^5 - 10x^3 + 15x + 8),$$
$$N = 6a^4b^2cx(x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6).$$

Общ. н. д. d одночленовъ $3ab^2$ и $6a^4b^2cx$ есть $3ab^2$. Теперь намъ слѣдуетъ опредѣлить D, т. е. о. н. д. многочленовъ

$$A = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8 \quad \text{и}$$
$$B = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6.$$

Раздѣлимъ A на B. Если бы A раздѣлилось на B безъ остатка, то B и было бы о. н. д., потому-что тогда всѣ производители B содержались-бы въ A. Но если-бы A не раздѣлилось на B безъ остатка, то все-таки рѣшеніе вопроса подвинется впередъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть дѣленіе A на B даетъ частное Q и остатокъ R; въ такомъ случаѣ

$$A = B \times Q + R \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

причемъ степень главной буквы остатка будетъ ниже чѣмъ въ дѣлителѣ B. За-

мѣтивъ теперь, что, по теоремѣ IV, о. н. д. многочленовъ A и B равенъ о. н. д. многочленовъ B и R, заключаемъ, что вопросъ сводится къ отысканію о. н. д. между прежнимъ дѣлителемъ и остаткомъ, т. е. между многочленами съ меньшими степенями главной буквы, и слѣд. болѣе простыми. Если бы приэтомъ B раздѣлилось на R, тогда R и было бы искомымъ общимъ наиб. дѣлителемъ. Но пусть при дѣленіи B на R получается въ частномъ Q′ и въ остаткѣ R′; тогда

$$B = Q' \times R + R' \quad . \quad . \quad . \quad . \; (2)$$

Хотя дѣленіе B на R и не привело къ окончательному нахожденію о. н. д., но рѣшеніе задачи опять упростилось. Дѣйствительно, мы знаемъ, что о. н. д. между B и R равенъ о. н. д. между R и R′, такъ-что вопросъ приведенъ къ нахожденію о. н. д. между многочленами R и R′, болѣе простыми, ибо показатель главной буквы въ R′ меньше показателя ея въ R.

Пусть R дѣлится безъ остатка на R′ и даетъ въ частномъ Q″, такъ что

$$R = Q'' \times R' \quad . \quad . \quad . \quad . \; (3).$$

Не трудно провѣрить, что послѣдній дѣлитель R′ и есть искомый о. н. д. многочленовъ A и B. Въ самомъ дѣлѣ, равенство (3) показываетъ, что R′ есть о. н. д. для самого себя и R; но о. н. д. остатка и дѣлителя (равенство (2)) равенъ о. н. д. дѣлимаго и дѣлителя, т. е. многочленовъ B и R; а отсюда, въ силу равенства (1) заключаемъ, что R′, будучи о. н. д. для B и R, служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ (по теор. IV) и общ. наиб. дѣлителемъ для A и B; что и требовалось доказать.

При послѣдовательныхъ дѣленіяхъ, здѣсь указанныхъ, возмножны два случая: 1) или мы дойдемъ до остатка равнаго нулю; въ такомъ случаѣ, какъ доказано, послѣдній дѣлитель и будетъ искомымъ о. н. д. многочленовъ A и B; или 2) послѣ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ дѣленій, дойдемъ до остатка, который, не содержа главной буквы, не будемъ, однако же, нулемъ. Что такой случай возможенъ, объясняется тѣмъ, что степень главной буквы въ послѣдовательныхъ остаткахъ постоянно понижается; слѣд. непремѣнно дойдемъ до остатка, не содержащаго главной буквы. Легко доказать, что если этотъ остатокъ не есть ноль, то слѣдуетъ заключить, что многочлены A и B не имѣютъ общаго наиб. дѣлителя, т. е. первые между собою. Дѣйствительно, мы видѣли, что о. н. д. дѣлитъ остатки послѣ каждаго дѣйствія, а потому онъ долженъ бы дѣлить и остатокъ, не содержащій главной буквы. Для этого о. н. д. самъ не долженъ содержать главной буквы; но въ такомъ случаѣ, чтобы онъ могъ раздѣлить безъ остатка многочлены A и B, онъ долженъ дѣлить каждый коэффиціентъ при степеняхъ главной буквы въ этихъ полиномахъ, а это невозможно, ибо общіе дѣлители коэффиціентовъ уже исключены (они заключаются въ α и β).

Приложимъ эту теорію къ нашему примѣру. Дѣлимъ A на B (могли бы, наоборотъ, дѣлить B на A, потому-что въ данномъ случаѣ полиномы — одинаковой степени отн. x.)

$$\begin{array}{l|l}
A = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8 & x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6 = B \\
\quad - 3x^5 \pm 6x^4 \pm 18x^3 \mp 12x^2 \mp 39x \mp 18 & 3 \\
R = \qquad 6x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 24x - 10. &
\end{array}$$

Въ остаткѣ степень буквы x ниже чѣмъ въ дѣлителѣ, поэтому первое дѣленіе окончено; оно показываетъ, что B не есть о. н. д.

Слѣдуя теоріи, теперь нужно дѣлителя раздѣлить на первый остатокъ. Но, замѣчая, что члены остатка имѣютъ общаго множителя 2, перваго съ новымъ дѣлимымъ, мы на основаніи теоремы I, можемъ сократить этотъ остатокъ на 2, не измѣняя этимъ о. н. д. Черезъ это новый дѣлитель упростится и будетъ равенъ

$$3x^4+4x^3-6x^2-2x-5.$$

Для избѣжанія дробныхъ коэффиціентовъ въ частномъ и въ остаткахъ, множимъ новое дѣлимое на 3, что возможно, такъ-какъ 3 есть количество первое съ $3x^4+4x^3-6x^2-2x-5$. Совершаемъ дѣленіе

$$\begin{array}{l|l}
3x^5-6x^4-18x^3+12x^2+39x+18 & 3x^4+4x^3-6x^2-12x-5 \\
\underline{-3x^5\mp 4x^4\pm 6x^3\pm 12x^2\pm 5x} & x,-5 \\
-10x^4-12x^3+24x^2+44x+18 \ldots\ldots \text{остатокъ} & \\
-5x^4-6x^3+12x^2+22x+9 \ldots\ldots \text{остатокъ, по раздѣленіи на 2} & \\
-15x^4-18x^3+36x^2+66x+27 \ldots\ldots \text{» по умноженіи на 3} & \\
\underline{\pm 15x^4\pm 20x^3\mp 30x^2\mp 60x\mp 25} & \\
2x^3+6x^2+6x+2 &
\end{array}$$

Степень главной буквы въ первомъ остаткѣ не ниже чѣмъ въ дѣлителѣ, а это даетъ возможность продолжать дѣленіе. Но такъ какъ коэффиціентъ перваго члена остатка не дѣлится на коэффиціентъ перваго члена дѣлителя, то мы условимся считать второе дѣленіе законченнымъ, и полученный остатокъ — окончательнымъ въ этомъ дѣленіи. Теперь, слѣдуя теоріи, мы должны искать о. н. д. между $3x^4+4x^3-6x^2-12x-5$ и полученнымъ остаткомъ; приэтомъ, остатокъ принимаемъ за дѣлимое, а дѣлителя оставляемъ прежняго. Приступая къ новому дѣленію, сокращаемъ дѣлимое на 2 и умножаемъ его на 3, что позволительно, потому что ни 2, ни 3 не входятъ множителями въ дѣлитель. Чтобы не переписывать дѣлителя, продолжаютъ дѣленіе въ томъ-же столбцѣ, только членъ частнаго (-5) отдѣляютъ отъ частнаго прежняго дѣленія запятою, чтобы этимъ показать, что -5 не принадлежитъ къ числу членовъ одного и того же частнаго, а есть частное новаго, особаго, дѣленія.

Это дѣленіе даетъ остатокъ $2x^3+6x^2+6x+2$, и вопросъ приведенъ къ отысканію о. н. д. между этимъ остаткомъ и дѣлителемъ. Во избѣжаніе дробныхъ коэффиціентовъ въ частномъ и остаткахъ, сокращаемъ дѣлителя на 2, и дѣлимъ

$$\begin{array}{r|l}
3x^4+4x^3-6x^2-12x-5 & x^3+3x^2+3x+1 \\
\underline{-3x^4\mp 9x^3\mp 9x^2\mp 3x} & 3x-5. \\
-5x^3-15x^2-15x-5 & \\
\underline{-5x^3-15x^2-15x-5} & \\
0 &
\end{array}$$

Послѣдній дѣлитель x^3+3x^2+3x+1 и есть о. н. д. многочленовъ A и B.

Итакъ, мы нашли, что $d=3ab^2$, а $D=x^3+3x^2+3x+1$; сл. о. н. д. данныхъ многочленовъ M и N, или

$$\Delta=d.\ D=3ab^2(x^3+3x^2+3x+1)=3ab^2x^3+9ab^2x^2+9ab^2x+3ab^2.$$

89. Приводимъ еще примѣры.

I. Найти о. н. д. многочленовъ:

$$M = 2a^2x^5 - 28a^2x^4 + 142a^2x^3 - 308a^2x^2 + 240a^2x \text{ и}$$

$$N = 3ax^3 - 30ax^2 + 87ax - 60a.$$

Выносимъ за скобки общихъ множителей членовъ каждаго многочлена:

$$M = 2a^2x(x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120),$$

$$N = 3a(x^3 - 10x^2 + 29x - 20).$$

Отсюда имѣемъ: $d = a$.

Ищемъ о. н. д. многочленовъ, заключенныхъ въ скобки.

Первое дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 & x^3 - 10x^2 + 29x - 20 \\ \hline -x^4 \pm 10x^3 \mp 29x^2 \pm 20x & x - 4 \\ \hline -4x^3 + 42x^2 - 134x + 120 & \\ \pm 4x^3 \mp 40x^2 \pm 116x \mp 80 & \\ \hline 2x^2 - 18x + 40 & \end{array}$$

Сокративъ остатокъ на 2, принимаемъ $x^2 - 9x + 20$ за дѣлителя слѣдующаго дѣленія.

Второе дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 10x^2 + 29x - 20 & x^2 - 9x + 20 \\ \hline -x^3 \pm 9x^2 \mp 20x & x - 1 \\ \hline -x^2 + 9x - 20 & \\ -x^2 + 9x - 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Заключаемъ, что $x^2 - 9x + 20$ есть о. н. д. многочленовъ, содержащихся въ скобкахъ. Итакъ,

$$\Delta = d. \quad D = a(x^2 - 9x + 20) = ax^2 - 9ax + 20a.$$

II. Найти о. н. д. многочленовъ

$$M = x^5 - 8x^4 + 13x^3 + 57x^2 - 198x + 135 \text{ и}$$

$$N = 2x^3 - 15x^2 + 37x - 15.$$

Въ этомъ случаѣ, $d = 1$. Постараемся опредѣлить D. Умноживъ предварительно многочленъ M на 2, дѣлимъ:

Первое дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 - 16x^4 + 26x^3 + 114x^2 - 396x + 270 & 2x^3 - 15x^2 + 37x - 15 \\ \hline -2x^5 \pm 15x^4 \mp 37x^3 \pm 15x^2 & x^2, -x, -37 \\ \hline -x^4 - 11x^3 + 129x^2 - 396x + 270, & \text{умноживъ на 2:} \\ -2x^4 - 22x^3 + 258x^2 - 792x + 540 & \\ \pm 2x^4 \mp 15x^3 \pm 37x^2 \mp 15x & \\ \hline -37x^3 + 295x^2 - 807x + 540, & \text{умноживъ на 2:} \\ -74x^3 + 590x^2 - 1614x + 1080 & \\ \pm 74x^3 \mp 555x^2 \pm 1369x \mp 555 & \\ \hline 35x^2 - 245x + 525 & \end{array}$$

Сократив остаток на 35, делим

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-15x^2+37x-15 & x^2-7x+15 \\ -2x^3\pm 14x^2\mp 30x & 2x-1 \\ \hline -x^2+7x-15 & \\ -x^2+7x-15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Итакъ, $D=x^2-7x+15$.

$$\Delta=d.D=x^2-7x+15$$

III. Найти о. н. д. многочленовъ

$$M=x^4+2x^3-3x^2+5x-12, \text{ и}$$
$$N=4x^3+6x^2-6x+5.$$

Умноживъ предварительно M на 4, дѣлимъ

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+8x^3-12x^2+20x-48 & 4x^3+6x^2-6x+5 \\ -4x^4\mp 6x^3\pm 6x^2\mp 5x & x^2+1 \\ \hline 2x^3-6x^2+15x-48, \text{ умноживъ на } 2: & \\ 4x^3-12x^2+30x-96 & \\ -4x^3\mp 6x^2\pm 6x\mp 5 & \\ \hline -18x^2+36x-101 & \end{array}$$

Умноживъ дѣлителя на 9, дѣлимъ его на послѣдній остатокъ:

$$\begin{array}{l|l} 36x^3+54x^2-54x+45 & -18x^2+36x-101 \\ 36x^3-72x^2+202x & -2x-7 \\ \hline +126x^2-256x+45 & \\ 126x^2-252x+707 & \\ \hline -4x-662 & \end{array}$$

Раздѣливъ остатокъ на (-2), дѣлимъ

$$\begin{array}{l|l} 18x^2-36x+101 & 2x+331 \\ -18x^2\mp 2979x & 9x^2-3015 \\ \hline -3015x+101, \text{ умноживъ на } 2: & \\ -6030x+202 & \\ -6030x-997965 & \\ \hline +998167 & \end{array}$$

При послѣднемъ дѣленіи мы нашли остатокъ, не содержащій главной буквы, *не равный нулю*, то заключаемъ, что данные многочлены не имѣютъ никакого общаго дѣлителя.

IV. Найти о. н. д. многочленовъ

$$a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c) \text{ и}$$
$$a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c).$$

Принявъ a за главную букву, посмотримъ, не имѣютъ ли коэффиціенты каждаго многочлена общихъ множителей; и для этого разложимъ коэффиціенты на множителей. Имѣемъ

$$b^2+2bc+c^2=(b+c)^2;$$
$$2b^2+3\,bc+c^2=2b^2+2bc+bc+c^2=2b(b+c)+c(b+c)=(b+c)(2b+c);$$
$$b^2-c^2=(b+c)(b-c);$$
$$2b^2+bc-c^2=b^2+b^2+bc-c^2=b(b+c)+(b+c)(b-c)=(b+c)(2b-c).$$

Такимъ образомъ находимъ, что всѣ члены перваго многочлена имѣютъ общаго множителя $a(b+c)$, всѣ члены втораго: $(b+c)$; слѣд. можемъ представить многочлены въ видѣ:

$$a(b+c)\{(b+c)a^2-b(2b+c)a+b^3\} \text{ и}$$
$$(b+c)\{(b-c)a^2-b(2b-c)a+b^3\}.$$

Отсюда видно, что $d=b+c$. Затѣмъ, сокративъ первый многочленъ на $a(b+c)$, второй на $b+c$, и помноживъ всѣ члены перваго на $b-c$, дѣлимъ

$$\begin{array}{r|l|l||r|l}
+b^2 & a^2-2b^3 & a+b^4 & +b & a^2-2b^2\;a+b^3 \\
-c^2 & \quad\;+b^2c & \quad-b^3c & -c & \qquad+bc \\
 & \quad\;+bc^2 & & \multicolumn{2}{l}{} \\
\hline
 & & & \multicolumn{2}{l}{b+c} \\
\mp b^2 & a^2\pm 2b^3 & a\mp b^4 & & \\
\pm c^2 & \quad\;\pm b^2c & \quad\mp b^3c & & \\
 & \quad\;\mp bc^2 & & & \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{2b^2c.\,a-2b^3c} & &
\end{array}$$

, или, по сокращеніи на $2b^2c$:

$$a-b$$

Затѣмъ, дѣлимъ

$$\begin{array}{r|l|l||r|l}
+b & a^2-2b^2 & a+b^3 & \multicolumn{2}{l}{a-b} \\
-c & \quad\;+bc & & \multicolumn{2}{l}{} \\
\hline
 & & & +b & a-b^2 \\
\mp b & a^2\pm b^2 & a & -c & \\
\pm c & \quad\;\mp bc & & & \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{-b^2.a+b^3} & & \\
\multicolumn{3}{c}{-b^2.a+b^3} & & \\
\hline
\multicolumn{3}{c}{0} & &
\end{array}$$

Итакъ, $D=a-b$. А потому

$$\Delta=d.D=(b+c)(a-b).$$

90. Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующее

Правило. — Чтобы найти о. н. д. двухъ многочленовъ, нужно: Сначала исключить общіе одночленные множители каждаго многочлена; причемъ, если случится, что означенные множители имѣютъ о. н. д., то послѣдній слѣдуетъ впослѣдствіи ввести множителемъ въ составъ искомаго об. н. д.

Затѣмъ высшій многочленъ дѣлятъ на нисшій, преобразовавъ предварительно дѣлимое такъ, чтобы первый членъ его (предполагая, что многочлены расположены по степенямъ одной буквы) дѣлился на первый членъ дѣлителя.

Въ полученномъ отъ дѣленія остаткѣ сокращаютъ всѣхъ множителей, общихъ коэффиціентамъ главной буквы, и дѣлятъ прежняго дѣлителя на этотъ остатокъ, поступая по прежнему.

Затѣмъ дѣлятъ первый остатокъ на второй и т. д., продолжая эти послѣдовательныя дѣленія до тѣхъ поръ, пока: или получится остатокъ нуль, — и тогда послѣдній дѣлитель есть искомый о. н. д.; или въ остаткѣ получится выраженіе, не содержащее главной буквы, — и тогда данныя выраженія суть количества первыя между собою, если не имѣютъ общаго множителя, независящаго отъ главной буквы, и не открытаго еще въ началѣ дѣйствія.

При выполненіи послѣдовательныхъ дѣленій слѣдуетъ умножать промежуточные остатки на такихъ множителей, чтобы первые члены ихъ дѣлились на первый членъ дѣлителя.

91. Общій наибольшій дѣлитель нѣсколькихъ многочленовъ. — Пусть требуется найти о. н. д. нѣсколькихъ многочленовъ P, Q, R и S. Найдемъ о. н. д. между какими-нибудь двумя изъ данныхъ многочленовъ, напр. P и Q, и назвавъ его буквою D, замѣчаемъ, что D есть ничто иное какъ произведеніе всѣхъ множителей, общихъ многочленамъ P и Q. — Если теперь найдемъ о. н. д. между D и R, то, назвавъ его буквою D′, замѣчаемъ, что D′ есть произведеніе всѣхъ множителей, общихъ D и R; а какъ D есть произведеніе всѣхъ множителей, общихъ P и Q, то D′ есть произведеніе всѣхъ множителей, общихъ P, Q и R. Найдя затѣмъ о. н. д. для D′ и S,—пусть онъ будетъ D″,—убѣдимся, что онъ будетъ = произведенію всѣхъ множителей, общихъ многочленамъ P, Q, R и S. Поэтому D″ и будетъ о. н. д. данныхъ многочленовъ.

Отсюда

Правило. — Чтобы найти о. н. д. нѣсколькихъ многочленовъ, находятъ его сперва между какими нибудь двумя многочленами; потомъ между найденнымъ о. н. д. и третьимъ даннымъ многочленомъ; затѣмъ между вновь найденнымъ о. н. д. и четвертымъ многочленомъ и т. д. Послѣдній о. н. д. и будетъ требуемый.

Примѣръ. Найти о, н. д. многочленовъ

$$\begin{aligned} P &= 8x^3 - 12x^2y - 10xy + 15y^2, \\ Q &= 6x^3 + 12x^2 - 9x^2y - 18xy, \\ R &= 6x^2 - 13xy + 6y^2, \\ S &= 4x^2 - 9y^2. \end{aligned}$$

О. н. д. многочленовъ R и S равенъ $2x - 3y$; о. н. д. многочленовъ P и $2x - 3y$ есть $2x - 3y$; наконецъ о. н. д. для Q и $2x - 3y$ есть также $2x - 3y$. Слѣдов. о. н. д. всѣхъ четырехъ многочленовъ есть $2x - 3y$.

92. Наименьшее кратное алгебраическихъ выраженій. — *Кратнымъ* даннаго цѣлаго выраженія наз. такое другое цѣлое выраженіе, которое на данное дѣлится на-цѣло. Такъ $12a^4x^2y$ есть кратное выраженія $2a^2x$. Очевидно, что для даннаго выраженія существуетъ безчисленное множество кратныхъ.

Такъ, для $x - y$ кратными будутъ: $(x-y)^2$, $(x-y)^3$, $(x-y)^4$, ... $x^2 - y^2$, $x^3 - y^3$, $x^4 - y^4$ и т. д.

Общимъ кратнымъ двухъ или нѣсколькихъ цѣлыхъ алгебраическихъ выраженій наз. такое, которое на всѣ данныя дѣлится безъ остатка. Такъ, если данныя выраженія суть:

$$2a^2b, \qquad 3(a-b)^2, \qquad a^2 - b^2;$$

то общими кратными ихъ будутъ:

$$6a^2b\,(a-b)^2(a+b)\ ;$$
$$12a^4b^3(a-b)^4(a+b)\ ;$$
$$72a^4b^2(a-b)^3(a+b)^2;\ \text{и т. д.}$$

Очевидно, что для данныхъ выраженій существуетъ безчисленное множество общихъ кратныхъ.

Наименьшимъ кратнымъ данныхъ выраженій, расположенныхъ по степенямъ одной буквы, называется ихъ общее кратное, нисшей степени относительно этой буквы.

Когда данныя выраженія — одночлены, то для составленія наименьшаго кратнаго нужно перемножить всѣ простые множители, взявъ каждый изъ нихъ съ наибольшимъ показателемъ. Такъ, если даны одночлены $10a^6b^2$, $12a^5b^3$, $6a^4bc^2d$, то, взявъ всѣхъ простыхъ множителей въ высшихъ степеняхъ, т. е. 2^2, 3, 5, a^6, b^3, c^2 и d, найдемъ н. кр. $2^2.3.5.a^6.b^3.c^2.d$ или $60a^6b^3c^2d$.

Такимъ же образомъ составляется и наименьшее кратное многочленовъ, когда послѣдніе легко разлагаются на множителей. Приводимъ примѣры.

I. Найти н. к. для x^2-a^2 и x^3-a^3.

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a);$$
$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+xa+a^2).$$

Н. кр $=(x+a)(x-a)(x^2+xa+a^2)=x^4+ax^3-a^3x-a^4$.

II. Найти н. кр. полиномовъ:

$$x^3+2x^2y-xy^2-2y^3 \quad \text{и} \quad x^3-2x^2y-xy^2+2y^3.$$

По разложеніи на множители, первый даетъ

$$x(x^2-y^2)+2y(x^2-y^2)=(x+2y)(x^2-y^2);$$

а второй

$$x(x^2-y^2)-2y\,(x^2-y^2)=(x-2y)(x^2-y^2).$$

Наим. кр. $=(x^2-y^2)(x+2y)(x-2y)=(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$.

93. Если разложеніе многочленовъ на множители представляетъ затрудненіе, то можно пользоваться слѣдующимъ пріемомъ.

Пусть A и B — данные многочлены, а D — ихъ о. н. д. Назвавъ частныя отъ раздѣленія многочленовъ A и B на D буквами A' и B', получимъ: $A=A'D$ и $B=B'D$. По свойству о. н. дѣлителя, A' и B' суть выраженія первыя между собою, а слѣ. ихъ наим. кр. $=A'B'$. Очевидно, что выраженіе наименьшей степени, дѣлящееся на $A'D$ и $B'D$, есть $A'B'D$. Итакъ, наим. кр. многочленовъ A и B есть $A'B'D$ . . . . (1). Это выраженіе можно также представить въ видѣ $A'B$, если $B'D$ замѣнить черезъ B; или, въ видѣ $B'A$, замѣнивъ $A'D$ черезъ A. Наконецъ, перемноживъ: $A=A'D$ и $B=B'D$ найдемъ, $A'B'D^2=AB$; раздѣливъ обѣ части на D, получимъ: $A'B'D=\frac{AB}{D}\cdot$ Итакъ, наим. кр. можетъ быть представлено въ каждой изъ слѣдующихъ формъ:

$$A'B'D,\qquad AB',\qquad BA'\quad \text{и}\quad \frac{AB}{D}.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило нахожденія наименьшаго кратнаго двухъ

многочленовъ: находятъ ихъ о. н. д; дѣлятъ на него одно изъ данныхъ выраженій, и полученнымъ частнымъ умножаютъ другое; или: произведеніе данныхъ многочленовъ дѣлятъ на ихъ о. н. д.; или: о. н. д. множатъ на частныя, происходящія отъ раздѣленія данныхъ многочленовъ на этого наиб. дѣлителя.

Примѣчаніе. Раздѣливъ н. к. A′B′D на A′D (или A), находимъ въ частномъ B′; а раздѣливъ на B′D (или B), въ частномъ получаемъ A′; но A′ и B′ выраженія первыя между собою, сл. можно дать наименьшему кратному такое опредѣленіе: это есть такое кратное данныхъ выраженій, которое по раздѣленіи на нихъ, даетъ частныя первыя между собою.

Примѣръ. Найти н. к. многочленовъ

$$a^2-ab-12b^2 \quad \text{и} \quad a^2+5ab+6b^2.$$

О. н. д. ихъ $=a+3b$. Раздѣливъ первое выраженіе на $a+3b$, находимъ въ частномъ $a-4b$. Умноживъ второе выраженіе на это частное, найдемъ искомое н. к.

Итакъ, н. к. $=(a^2+5ab+6b^2)(a-4b)=a^3+a^2b-14ab^2-24b^3$.

94. Если M есть н. к. для A и B, то очевидно, что всякое кратное количества M есть общее кратное для A и B.

95. *Всякое общее кратное двухъ алгебраическихъ выраженій есть кратное ихъ наименьшаго кратнаго.*

Пусть A и B — два данныя выраженія, M — ихъ н. к.; и пусть N означаетъ какое либо другое общее кратное. Допустимъ, если возможно, что при дѣленіи N на M получается остатокъ R (при частномъ Q). Въ такомъ случаѣ R = N — Q.M. Но N и M дѣлятся на A, сл. и R дѣлится на A; N и M дѣлятся на B, сл. и R дѣлится на B (§ 85). Но R есть выраженіе *нисшей* степени чѣмъ M; сл. оказывается общее кратное количествъ A и B нисшей степени чѣмъ ихъ н. к. Это — нелѣпость; сл. остатокъ R не существуетъ, т. е. N есть кратное количества M.

96. Пусть требуется найти н. к. нѣсколькихъ многочленовъ, напр. трехъ: A, B и C. Найдемъ н. к. двухъ изъ нихъ, напр. A и B: пусть оно будетъ M. Затѣмъ найдемъ н. к. для M и C: пусть оно будетъ L. Докажемъ, что L и будетъ служить н. к. для A, B и C.

Назовемъ н. кр. A, B и C буквою x. Всякое общее кратное количествъ M и C есть общее кратное и для A, B и C (§ 94); слѣд. L должно дѣлиться на x. Всякое общее кратное A и B есть кратное и для M (§ 95); сл. всякое общее кратное A, B и C есть общее кратное и для M и C; слѣд. x должно дѣлиться на L.

Итакъ, L должно дѣлиться на x, а x на L; поэтому $x = L$, и правило доказано.

Примѣчаніе. — Нахожденіе наим. кр. имѣетъ приложеніе въ приведеніи дробей къ общему знаменателю. О. н. д. въ элементарной алгебрѣ прилагается къ сокращенію дробей; въ Высшей Алгебрѣ онъ имѣетъ другія, важнѣйшія примѣненія, именно въ теоріи уравненій.

97. Задачи.—

Найти о. н. д. способомъ разложенія на множители въ примѣрахъ:

1. $35a^2b^3x^3y^4$ и $49a^2b^4x^4y^3$.

2. $36x^4y^3z^6$ и $48x^6y^5z^4t^2$.

3. $432a^4b^2xy$, $270a^2b^3x^2z$ и $90a^3bx^3$.

4. $7a^2b(m-n)^3$ и $21b^2(m-n)^2$.

5. $x^2+8x+15$ и $x^2+9x+20$.

6. $x^2-15x+36$ и $x^2-9x-36$.

7. x^3+2x^2+2x+1 и x^3-2x-1.

8. $x^4+a^3x-ax^3-a^4$ и x^3-a^3.

9. $4x^3(a+x)^2$ и $10(a^2x-x^3)^2$.

10. $(a^2+a)^2$ и $a^3(a^2-a-2)$.

11. $4(x^3+a^3)$ и $6(x^2-2ax-3a^2)$.

12. $a^3(x^2+12x+11)$ и $a^2x^2-11a^2x-12a^2$.

13. $a^2+2ab+b^2$; a^2-b^2 и $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$.

14. $x^3+ax^2-axy-y^3$ и $x^4+2x^3y-a^2x^2+x^2y^2-2axy^2-y^4$.

15. $ab^2+ab^2cd-abcd^2-ad^2+bcd+b-cd^2-d$ и
$b^2+b^2cd-bcd^2-d^2$.

Найти о. н. д. способомъ послѣдовательныхъ дѣленій:

16. $20x^4+x^2-1$ и $75x^4+15x^3-3x-3$.

17. $3x^4-x^2y^2-2y^4$ и $10x^4+15x^3y-10x^2y^2-15xy^3$.

18. $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$ и
$x^6-x^5+2x^4-x^3+2x^2-x+1$.

19. $7x^3-2x^2y-63xy^2+18y^3$ и
$5x^4-3x^3y-43x^2y^2+27xy^3-18y^4$.

20. $xy+2x^2-3y^2+4yz+xz-z^2$ и
$2x^2-9xz-5xy+4z^2-8yz-12y^2$.

21. $7x^4-10ax^3+3a^2x^2-4a^3x+4a^4$ и
$8x^4-13ax^3+5a^2x^2-3a^3x+3a^4$.

22. $(b-c)x^2+2(ab-ac)x+a^2b-a^2c$ и
$(ab-ac+b^2-bc)x+a^2c+ab^2-a^2b-abc$.

23. $3x^2+(4a-2b)x-2ab+a^2$ и
$x^3+(2a-b)x^2-(2ab-a^2)x-a^2b$.

24. $x^3+(5m-3)x^2+(6m^2-15m)x-18m^2$ и
$x^3+(m-3)x^2-(2m^2+3m)x+6m^2$.

25. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$ и $x^4-(a+b)^2x^2+2ab(a+b)x-a^2b^2$.

26. $ax^6+(a+b)x^5+(a+b+c)x^4+(a+b+c+d)x^3+(b+c+d)x^2$
$+(c+d)x+d$ и $ax^5+(a+b)x^4+(a+b+c)x^3+(a+b+c)x^2$
$+(b+c)x+c$.

27. $3x^3-7x^2y+5xy^2-y^3$; $x^2y+3xy^2-3x^3-y^3$ и $3x^3+5x^2y+xy^2-y^3$.

Найти наим. кр. посредствомъ разложенія на множители:

28. $25a^3b^4c^5$ и $20a^5b^2c^6$.

29. $432a^4b^2xy$, $270a^2b^3x^2z$ и $90a^3bx^3$.

30. $6x^2 - x - 1$ и $2x^2 + 3x - 2$.

31. $3x^2 - 5x + 2$ и $4x^3 - 4x^2 - x + 1$.

32. $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3$ и $x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3$.

33. $x^2 - 4a^2$, $x^3 + 2ax^2 + 4a^2x + 8a^3$ и $x^3 - 2ax^2 + 4a^2x - 8a^3$.

34. $x^2 - (a + b)x + ab$; $x^2 - (b + c)x + bc$; $x^2 - (c + a)x + ca$.

35. $x^2 + 3x + 2$; $x^2 + 4x + 3$ и $x^2 + 5x + 6$.

36. $x^2 - 1$, $x^2 + 1$, $x^4 + 1$ и $x^8 - 1$.

37. $x^2 - 1$, $x^3 + 1$, $x^3 - 1$ и $x^6 + 1$.

Найти н. к. общимъ пріемомъ:

38. $6x^2 + 5x - 6$ и $6x^2 - 13x + 6$.

39. $x^3 + 5x^2 + 7x + 2$ и $x^2 + 6x + 8$.

40. $a^3 - 9a^2 + 23a - 15$ и $a^2 - 8a + 7$.

41. $15x^5 + 10x^4y + 4x^3y^2 + 6x^2y^3 - 3xy^4$ и
$12x^3y^2 + 38x^2y^3 + 16xy^4 - 10y^5$.

42. $x^4 - (p^2 + 1)x^2 + p^2$ и $x^4 - (p + 1)x^2 + 2(p + 1)px - p^2$.

43. $x^2 + 2x - 3$; $x^3 + 3x^2 - x - 3$ и $x^3 + 4x^2 + x - 6$.

44. $a^3 - 6a^2 + 11a - 6$; $a^3 - 9a^2 + 26a - 24$ и $a^3 - 8a^2 + 19a - 12$.

45. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $x^3 - x^2 - x + 1$; $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ и
$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

ГЛАВА IX.

Алгебраическія дроби.

Опредѣленіе. — Основное свойство алгебраической дроби. — Сокращеніе алгебраическихъ дробей и приведеніе къ общему знаменателю. — Четыре основныя дѣйствія надъ дробями. — Задачи.

98. Опредѣленіе. — Мы видѣли, что когда дѣленіе одного алгебраическаго выраженія на другое невозможно, то дѣйствіе только обозначается: дѣлителя пишутъ подъ дѣлимымъ, отдѣляя ихъ горизонтальною чертою. Такимъ образомъ, частное отъ раздѣленія A на B изображается въ формѣ

$$\frac{A}{B}.$$

Такое выраженіе называется *алгебраическою дробью*; причемъ дѣлимое получаетъ названіе *числителя*, а дѣлитель — *знаменателя*. Итакъ: *алгебраическая дробь есть частное отъ раздѣленія числителя на знаменателя.*

Между дробями — ариѳметическою и алгебраическою есть существенная разница; въ самомъ дѣлѣ, числитель и знаменатель ариѳметической дроби суть чис-

ла цѣлыя и абсолютныя; между тѣмъ какъ члены алгебраической дроби могутъ быть какъ цѣлыми, такъ и дробными, какъ положительными, такъ и отрицательными, и вообще какими угодно алгебраическими выраженіями. Такимъ образомъ, понятіе объ алгебраической дроби *общѣе*, нежели объ ариѳметической, а отсюда вытекаетъ необходимость вывода свойствъ алгебраической дроби и доказательства правилъ дѣйствій надъ этими дробями независимо отъ вывода этихъ свойствъ и правилъ для дроби ариѳметической.

Выводъ упомянутыхъ свойствъ и правилъ долженъ вытекать изъ самаго опредѣленія алгебраической дроби, какъ частнаго отъ раздѣленія числителя на знаменателя.

99. Основное свойство алгебраической дроби состоитъ въ томъ, что величина ея не измѣнится, если числителя и знаменателя умножимъ или раздѣлимъ на одно и тоже количество. Докажемъ это.

Пусть величина дроби $\frac{A}{B}$ равна Q:

$$\frac{A}{B}=Q \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Замѣчая, что дѣлимое = произведенію дѣлителя на частное, имѣемъ

$$A=B.Q.$$

Означивъ буквою M какое ниб. количество, умножимъ на него каждую изъ равныхъ величинъ A и B. Q, вслѣдствіе чего получимъ и произведенія равныя:

$$AM=BQM;$$

или, перемѣнивъ мѣста производителей Q и M во второй части,

$$AM=BM\times Q.$$

Это равенство показываетъ, что Q, будучи умножено на BM, даетъ въ произведеніи AM; слѣд. Q есть частное отъ раздѣленія AM на BM; такимъ образомъ:

$$\frac{AM}{BM}=Q.$$

Но Q есть ничто иное какъ $\frac{A}{B}$ (см. (1)); слѣд.

$$\frac{AM}{BM}=\frac{A}{B} \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Это равенство показываетъ, что дробь $\frac{AM}{BM}$ можетъ быть замѣнена дробью $\frac{A}{B}$, т. е. что *величина дроби не измѣнится, если числитель и знаменатель раздѣлимъ на одно и тоже количество.*

На этомъ свойствѣ основано упрощеніе дроби *сокращеніемъ.*

Равенство (2) показываетъ также, что, наоборотъ, дробь $\frac{A}{B}$ можетъ быть замѣнена дробью $\frac{AM}{BM}$, т. е. что *величина дроби не измѣнится, если числитель и знаменатель помножимъ на одно и тоже количество.*

На этомъ свойствѣ основано *приведеніе дробей къ общему знаменателю.* —

100. Сокращеніе. — Для сокращенія дроби нужно ея числителя и знаменателя раздѣлить на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя: отъ этого величина ея не измѣнится, но дробь будетъ приведена въ простѣйшій видъ, такъ-какъ частныя отъ раздѣленія ея членовъ на ихъ о. н. д. будутъ количества первыя между собою.

Приводимъ нѣсколько примѣровъ.

I. Сократить дробь

$$\frac{48a^3b^2x^4z}{60a^2bx^6}.$$

О. н. д. числителя и знаменателя есть $12a^2bx^4$. Раздѣливъ на это количество оба члена дроби, имѣемъ:

$$\frac{4abz}{5x^2}.$$

II. Сократить дробь

$$\frac{36a^5b^2 - 36a^3b^4}{54a^4b^3 - 108a^3b^4 + 54a^2b^5}.$$

Когда ч. и з. суть многочлены, легко поддающіеся разложенію на множители, то о. н. д. для нихъ находимъ этимъ способомъ:

$$\frac{36a^5b^2 - 36a^3b^4}{54a^4b^3 - 108a^3b^4 + 54a^2b^5} = \frac{36a^3b^2(a^2 - b^2)}{54a^2b^3(a^2 - 2ab + b^2)} = \frac{18a^2b^2(a - b).2a(a + b)}{18a^2b^2(a - b).3b(a - b)}.$$

Замѣчая, что о. н. д. членовъ дроби равенъ $18a^2b^2(a - b)$, мы, раздѣливъ на него числителя и знаменателя, получимъ:

$$\frac{2a(a + b)}{3b(a - b)}.$$

III. Сократить дробь

$$\frac{x^{12} + a^{12}}{x^5 + ax^4 + a^4x + a^5}.$$

Знаменатель $= x^4(x + a) + a^4(x + a) = (x + a)(x^4 + a^4)$.
Числитель $= (x^4)^3 + (a^4)^3 = (x^4 + a^4)[(x^4)^2 - x^4a^4 + (a^4)^2] = (x^4 + a^4)(x^8 - x^4\ a^4 + a^8)$.

По раздѣленіи обоихъ членовъ дроби на о. н. д. $x^4 + a^4$, находимъ:

$$\frac{x^8 - x^4a^4 + a^8}{x + a}.$$

Въ этомъ примѣрѣ о. н. д. былъ $x^4 + a^4$, ибо $x^8 - x^4a^4 + a^8$, не обращаясь въ ноль при $x = -a$, не дѣлится на $x + a$.

IV. Сократить дробь

$$\frac{bc(b - c) - ac(a - c) + ab(a - b)}{b^2c^2(b - c) - a^2c^2(a - c) + a^2b^2(a - b)}.$$

Числитель $= c\{b(b - c) - a(a - c)\} + ab(a - b) = c(a - b)(c - a - b) + ab(a - b) = (a - b)\{c(c - a) - bc + ab\} = (a - b)(a - c)(b - c)$.

Въ § 57, 4, мы видѣли, что знаменатель $= (a-b)(a-c)(b-c)(ab + ac + bc)$. Итакъ, видно, что о. н. д. числителя и знаменателя есть $(a-b)(a-c)(b-c)$; раздѣливъ на него оба члена дроби, получимъ

$$\frac{1}{ab + ac + bc}.$$

V. Сократить дробь

$$\frac{(x+y)^5-(x^5+y^5)}{(x+y)^3-(x^3+y^3)}.$$

Оба члена числителя и оба члена знаменателя дѣлятся на $x+y$; раздѣливъ ихъ на этотъ биномъ, получимъ дробь

$$\frac{(x+y)^4-(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)}{(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)}.$$

Раскрывъ скобки въ числителѣ и знаменателѣ и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ

$$\frac{5x^3y+5x^2y^2+5xy^3}{3xy},\text{ или, сокративъ на } xy,\ \frac{5}{3}(x^2+xy+y^2).$$

VI. Сократить дробь

$$\frac{2x^3-15x^2+37x-15}{x^5-8x^4+13x^3+57x^2-198x+135}.$$

Въ этомъ примѣрѣ разложеніе числителя и знаменателя на множители представляетъ затрудненія; поэтому опредѣляемъ о. н. д. способомъ послѣдовательныхъ дѣленій. Такимъ образомъ найдемъ, что о. н. д. $=x^2-7x+15$. Сокративъ дробь, найдемъ

$$\frac{2x-1}{x^3-x^2-9x+9}.$$

101. Приведеніе дробей къ общему знаменателю. — Здѣсь слѣдуетъ различать тѣже случаи какъ и въ ариѳметикѣ:

1. Если знаменатели дробей суть выраженія взаимно-простыя, нужно числителя и знаменателя каждой дроби помножать на произведеніе знаменателей прочихъ дробей. Черезъ это общимъ знаменателемъ всѣхъ дробей будетъ произведеніе всѣхъ знаменателей или ихъ наименьшее краткое, т. е. общій знаменатель будетъ имѣть простѣйшую форму.

Поступая сказаннымъ образомъ надъ дробями

$$\frac{3}{2a},\ \frac{m}{3b^2}\text{ и }\frac{n}{a+b},$$

знаменатели которыхъ — количества взаимно-простыя, найдемъ:

$$\text{вмѣсто первой дроби } \frac{3.3b^2(a+b)}{2a.3b^2(a+b)} \text{ или } \frac{9b^2(a+b)}{6ab^2(a+b)};$$

$$\text{вмѣсто второй дроби } \frac{m.2a(a+b)}{3b^2.2a(a+b)} \text{ или } \frac{2am(a+b)}{6ab^2(a+b)};$$

$$\text{вмѣсто третьей дроби } \frac{n.2a.3b^2}{2a.3b^2(a+b)} \text{ или } \frac{6ab^2n}{6ab^2(a+b)}.$$

2. Когда знаменатели данныхъ дробей имѣютъ общихъ множителей, то наименьшее кратное знаменателей опять принимаемъ за общаго знаменателя; затѣмъ дѣлимъ это наим. кр. на знаменателя каждой дроби и полученнымъ частнымъ множимъ числителя и знаменателя соотвѣтствующей дроби. Приводимъ примѣры.

I. Привести къ общему знаменатетю дроби:

$$\frac{a}{4(1-x^2)},\ \frac{b}{8(1-x)},\ \frac{c}{2(1+x)},\ \frac{d}{1+x^2}.$$

Разлагая знаменателей на простые множители, получимъ:

$$4(1-x^2)=2^2.(1-x)(1+x);\quad 8(1-x)=2^3.(1-x);$$

остальные два знаменателя остаются въ данной формѣ.

Наим. кр. знаменателей или об. знам. $=2^3.(1+x)(1-x)(1+x^2)$ или $8(1-x^4)$.

Раздѣливъ об. зн. на знаменателя первой дроби, и умноживъ полученнымъ частнымъ $2(1+x^2)$ оба члена первой дроби, получимъ

$$\frac{2a(1+x^2)}{8(1-x^4)}.$$

Раздѣливъ об. зн. на знаменателя второй дроби и помноживъ полученнымъ частнымъ $(1+x)(1+x^2)$ оба члена ея, найдемъ

$$\frac{b(1+x)(1+x^2)}{8(1-x^4)}.$$

Поступая подобнымъ же образомъ съ двумя остальными дробями, вмѣсто нихъ получимъ:

$$\frac{4c(1-x)(1+x^2)}{8(1-x^4)} \text{ и } \frac{8d(1-x^2)}{8(1-x^4)}.$$

II. Привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{1}{x^2-4},\ \frac{1}{x^2-3x+2},\ \frac{1}{x^2+3x+2}.$$

Разлагая знаменателей на множители, найдемъ:

$$x^2-4=(x+2)(x-2);$$
$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$
$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1).$$

Наим. краткое знаменателей $=(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$ или $(x^2-4)(x^2-1)$. Поступая какъ въ примѣрѣ I, найдемъ слѣдующія, соотвѣтственно равныя даннымъ, дроби:

$$\frac{x^2-1}{(x^2-4)(x^2-1)},\ \frac{(x+2)(x+1)}{(x^2-4)(x^2-1)},\ \frac{(x-2)(x-1)}{(x^2-4)(x^2-1)}.$$

III. Привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)},\ \frac{b}{(b-c)(b-d)(b-a)},\ \frac{c}{(c-d)(c-a)(c-b)},\ \frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Здѣсь знаменатели уже даны въ формѣ произведеній простыхъ множителей. Замѣтивъ, что $a-b$, $a-c$, $a-d$ и т. д. получаются изъ $b-a$, $c-a$, $d-a,\ldots$ умноженіемъ на -1, замѣняемъ данныя дроби слѣдующими:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)},\ \frac{-b}{(b-c)(b-d)(a-b)},\ \frac{c}{(c-d)(a-c)(b-c)},\ \frac{-d}{(a-d)(b-d)(c-d)}.$$

Общій знаменатель $=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$. Дѣля его на знаменателя каждой дроби поочередно, и умножая частнымъ оба члена соотвѣтствующей дроби, найдемъ искомыя дроби:

$$\frac{a(b-c)(b-d)(c-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)};\ \frac{-b(a-c)(a-d)(c-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)};$$

$$\frac{c(a-b)(a-d)(b-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)};\ \frac{-d(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}.$$

3. Можетъ случиться, что одинъ изъ знаменателей дѣлится на всѣхъ остальныхъ, т. е. служитъ наим. кратнымъ всѣхъ знаменателей: онъ и будетъ общимъ знаменателемъ.

Примѣръ. Привести къ общему знаменателю дроби:

$$\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{b}{a^2-b^2},\ \frac{c}{a^4-b^4}.$$

Замѣчая, что $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$, находимъ, что знаменатель третьей дроби есть наим. кр. всѣхъ знаменателей; онъ и будетъ общимъ знаменателемъ. Третью дробь, какъ уже имѣющую общаго знаменателя, оставляемъ безъ перемѣны, а первыя двѣ приводимъ къ общему знаменателю пріемомъ, указаннымъ въ пунктѣ 2. Такимъ образомъ найдемъ, что данныя дроби могутъ быть замѣнены слѣдующими:

$$\frac{a(a^2-b^2)}{a^4-b^4},\ \frac{b(a^2+b^2)}{a^4-b^4},\ \frac{c}{a^4-b^4}.$$

102. Сложеніе и вычитаніе дробей. — Различаемъ два случая:

1. Сложить или вычесть дроби съ равными знаменателями:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}.$$

Положимъ, что

$$\frac{a}{m}=q_1;\ \frac{b}{m}=q_2,\ \frac{c}{m}=q_3.$$

Зная, что дѣлимое = произведенію дѣлителя на частное, имѣемъ

$$a=mq_1,\qquad b=mq_2,\qquad c=mq_3.$$

Придавая къ равнымъ (a и mq_1) равныя количества (b и mq_2), получимъ и суммы равныя; слѣд.

$$a+b=mq_1+mq_2;$$

вычитая изъ равныхъ ($a+b$ и mq_1+mq_2) равныя, найдемъ и остатки равные; слѣд.

$$a+b-c=mq_1+mq_2-mq_3,$$

или, выводя за скобки m,

$$a+b-c=(q_1+q_2-q_3).m;$$

откуда

$$q_1+q_2-q_3=\frac{a+b-c}{m}.$$

Замѣняя q_1, q_2 и q_3 ихъ величинами, находимъ:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

Отсюда *правило: чтобы сложить или вычесть дроби съ равными знаме-*

нателями, надо сложить или вычесть числители и подъ результатомъ подписать общаго знаменателя.

2. Когда данныя дроби имѣютъ различныхъ знаменателей, то сперва приводятъ ихъ къ общему знаменателю, а затѣмъ поступаютъ по предыдущему правилу.

Примѣры. I. Найти сумму дробей

$$\frac{a^2-ab}{a+b}+\frac{a^2+ab}{a-b}+\frac{a^2-b^2}{a}.$$

По приведеніи къ общему знаменателю, имѣемъ

$$\frac{(a^2-ab)(a-b)\,a+(a^2+ab)(a+b)a+(a^2-b^2)(a+b)(a-b}{(a+b)(a-b)a}=$$

$$\frac{a^4-2a^3b+a^2b^2+(a^4+2a^3b+a^2b^2)+(a^4-2a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)a}=\frac{3a^4+b^4}{a^3-ab^2}.$$

II. Выполнить вычисленія

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)(x-3)}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$

По приведеніи къ общему знаменателю $(x^2-1)(x^2-4)(x-3)$, имѣемъ послѣдовательно:

$$\frac{x(x+1)(x-2)-(x^2-4)(x-3)+(x^2-1)(x+2)}{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}=$$

$$\frac{x^3-x^2-2x-(x^3-3x^2-4x+12)+(x^3+2x^2-x-2)}{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}=\frac{x^3+4x^2+x-14}{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}.$$

Числитель не обращается въ ноль при $x=1, -1, +2, -2$ и $+3$, сл. не дѣлится ни на одного множителя знаменателя, а потому результатъ не подлежитъ дальнѣйшему упрощенію.

III. Упростить выраженіе

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

Общій знаменатель $=(a-b)(b-c)(c-a)$; дѣля его на каждаго изъ знаменателей по-порядку, получаемъ частныя:

$$-(b-c),\quad -(c-a),\quad -(a-b).$$

По приведеніи къ общему знаменателю, получимъ

$$\frac{-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Полагая въ числителѣ послѣдовательно $a=b$, $b=c$, и $c=a$, замѣчаемъ, что онъ въ каждомъ случаѣ обращается въ ноль, а потому дѣлится на $(a-b)(b-c)(c-a)$. Это произведеніе открываемъ въ числителѣ разложеніемъ на множители:

$a^3c-a^3b-b^3c+ab^3-c^3(a-b)=c(a^3-b^3)-ab(a^2-b^2)-c^3(a-b)=$ $=(a-b\{c(a^2+ab+b^2)-ab(a+b)-c^3\}=(a-b)\{(a^2-c^2)c-ab(a-c)$ $-b^2(a-c)\}=(a-b)(a-c)\{(a+c)c-ab-b^2\}=(a-b)(a-c)\{a(c-$ $-b)+(b+c)(c-b)\}=(a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c)=(a-b)(b-c)$ $(c-a)(a+b+c)$.

Итакъ, данное выраженіе равно

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=a+b+c.$$

IV. Упростить выраженіе

$$4b+\frac{(a-b)^2}{a}.$$

Если дробь соединена (плюсомъ или минусомъ) съ цѣлымъ выраженіемъ, то, помноживъ цѣлое и раздѣливъ на знаменателя дроби, получимъ сумму или разность двухъ дробей. Такъ, данное выраженіе умноженіемъ и дѣленіемъ $4b$ на a превращаемъ въ

$$\frac{4ab}{a}+\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{4ab+(a-b)^2}{a}=\frac{4ab+a^2-2ab+b^2}{a}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a}=\frac{(a+b)^2}{a}.$$

103. Умноженіе дробей. — Перемножить дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Положивъ

$$\frac{a}{b}=p \text{ и } \frac{c}{d}=q,$$

имѣемъ отсюда

$$a=bp \text{ и } c=dq.$$

Помноживъ равныя количества a и bp на равныя c и dq, найдемъ и произведенія равныя; слѣд.

$$ac=bp.dq.$$

Перемѣнивъ во второй части мѣста сомножителей, получимъ

$$ac=bd.pq,$$

откуда

$$p.q=\frac{ac}{bd},$$

или, подставивъ $\frac{a}{b}$ вмѣсто p, и $\frac{c}{d}$ вмѣсто q,

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\cdot\cdot\cdot\cdot(1).$$

Отсюда правило: *чтобы умножить дробь на дробь, надо числителя первой дроби помножить на числителя второй, знаменателя первой на знаменателя второй, и первое произведеніе раздѣлить на второе.*

Если въ равенствѣ (1) положимъ $d=1$, оно обратится въ

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b\times 1};$$

замѣтивъ, что $\frac{c}{1}$ есть тоже что c, а $b\times 1$ равно b, имѣемъ:

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}.$$

Итакъ, *чтобы умножить дробь на цѣлое выраженіе, надо числителя умножить на это цѣлое, и произведеніе раздѣлить на знаменателя дроби.*

Положивъ въ равенствѣ (1) $b=1$, получимъ

$$\frac{a}{1}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{1\times d}, \text{ или } a\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{d},$$

откуда правило: *для умноженія цѣлаго выраженія на дробь, надо цѣлое помножить на числителя дроби, и произведеніе раздѣлить на ея знаменателя.*

Примѣры. I. $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\frac{a-b}{a^2+ab}=\frac{(a^4-b^4)(a-b)}{(a^2-2ab+b^2)(a^2+ab)}=$ $\frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)(a-b)}{(a-b)^2a(a+b)}$. Сокративъ дробь на $(a+b)(a-b)^2$, получимъ искомое произведеніе:

$$\frac{a^2+b^2}{a}.$$

II. $\frac{3b}{a^2-b^2}\times(a+b)=\frac{3b(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{3b}{a-b}$.

III. $(a^4-b^4)\times\frac{2a}{a^2+b^2}=\frac{(a^4-b^4).2a}{a^2+b^2}=\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2).2a}{a^2+b^2}=(a^2-b^2).2a.$

Примѣчаніе. — Доказанное правило распространяется на какое угодно число дробей; такъ

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh};$$

въ самомъ дѣлѣ, по доказанному: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; умноживъ эту дробь на $\frac{e}{f}$ найдемъ $\frac{ace}{bdf}$; помноживъ эту дробь на четвертую $\frac{g}{h}$, найдемъ окончательное произведеніе

$$\frac{aceg}{bdfh}.$$

Примѣръ. Вычислить

$$\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\times\frac{x-y}{x+y}\times\frac{(x+y)^5-x^5-y^5}{3x^2y-3xy^2}.$$

Прилагая предыдущее правило, найдемъ

$$\frac{(x^3+y^3)(x-y)[(x+y)^5-x^5-y^5]}{(x^3-y^3)(x+y)(3x^2y-3xy^2)}$$

Замѣтивъ, что $(x+y)^5-x^5-y^5=(x+y)^5-(x^5+y^5)=$
$(x+y)(5x^3y+5x^2y^2+5xy^3)=(x+y).5xy.(x^2+xy+y^2)$,

представляемъ произведеніе въ видѣ

$$\frac{5xy(x^3+y^3)(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)}{3xy(x^3-y^3)(x+y)(x-y)}$$

откуда, по сокращеніи, найдемъ

$$\frac{5(x^3+y^3)}{3(x-y)}.$$

104. Дѣленіе дробей. — Пусть требуется раздѣлить $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$.

Положивъ $\frac{a}{b}=p$ и $\frac{c}{d}=q$, имѣемъ отсюда

$$a=bp \quad \text{и} \quad c=dq.$$

Раздѣливъ равныя величины (a и bp) на равныя (c и dq), получимъ равныя; слѣд.

$$\frac{a}{c}=\frac{bp}{dq}.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на $\frac{d}{b}$, найдемъ

$$\frac{ad}{cb}=\frac{bpd}{dqb}.$$

Сокративъ вторую дробь на bd, найдемъ

$$\frac{ad}{bc}=\frac{p}{q}.$$

Подставивъ вмѣсто p и q ихъ величины, получимъ

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \quad \ldots\ldots (1).$$

Отсюда правило: *чтобы раздѣлить дробь на дробь, надо числителя первой дроби умножить на знаменателя второй, а знаменателя первой на числителя второй, и первое произведеніе раздѣлить на второе.*

Полагая въ равенствѣ (1) $d=1$, найдемъ

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a\times 1}{bc} \text{ или } \frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *для раздѣленія дроби на цѣлое выраженіе надо: числителя раздѣлить на произведеніе знаменателя на цѣлое выраженіе.*

Положивъ въ равенствѣ (1) $b=1$, получимъ

$$\frac{a}{1}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{1\times c} \text{ или } a:\frac{c}{d}=\frac{ad}{c} \quad \ldots\ldots (2)$$

Слѣд., *чтобы раздѣлить цѣлое выраженіе на дробь, надо цѣлое умножить на знаменателя дроби и произведеніе раздѣлить на числителя.*

Примѣчаніе I. — Двѣ величины A и B называются *взаимно-обратными*, если ихъ произведеніе равно 1. Итакъ, когда $A.B=1$, то A есть количество обратное величинѣ B, а B обратно количеству A. Изъ равенства $AB=1$ находимъ

$$A=\frac{1}{B} \quad \text{и} \quad B=\frac{1}{A},$$

откуда заключаемъ, что обратная данной величины равна частному отъ раздѣленія 1 на эту величину.

Очевидно, что дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{A}$ взаимно-обратны, потому-что

$$\frac{A}{B}\times\frac{B}{A}=\frac{AB}{AB}=1.$$

Имѣя въ виду это замѣчаніе, можемъ правило дѣленія на дробь выразить въ слѣдующей формѣ. Изъ правила умноженія дробей слѣдуетъ, что $\frac{ad}{bc}$ и $\frac{ad}{c}$ можно представить въ видѣ произведеній: $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ и $a\times\frac{d}{c}$; а потому равенства (1) и (2) можно написать въ видѣ:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c} \quad \text{и} \quad a:\frac{c}{d}=a\times\frac{d}{c};$$

отсюда видно, что для раздѣленія цѣлаго или дробнаго выраженія на дробь надо дѣлимое умножить на величину обратную дѣлителю.

Примѣчаніе II. — Мы нашли, что

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Величина дроби $\frac{ad}{bc}$ не измѣнится, если числителя и знаменателя раздѣлимъ на cd; сдѣлавъ это найдемъ:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{ad}{cd}}{\frac{bc}{cd}}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}.$$

Слѣд. при дѣленіи дроби на дробь можно поступать еще слѣдующимъ образомъ: числителя первой дроби раздѣлить на числителя второй, а знаменателя первой на знаменателя второй, и первое частное раздѣлить на второе.

Очевидно, что этотъ пріемъ слѣдуетъ примѣнять только тогда, когда числит. и знамен. дѣлимаго дѣлятся на-цѣло на числ. и знам. дѣлителя.

Примѣры I. $\frac{2a(ab-b^2)}{(a+b)^2}:a(a^2-b^2)=\frac{2ab(a-b)}{(a+b)^2a(a-b)(a+b)}=\frac{2b}{(a+b)^3}.$

II. $7ax:\frac{14ax}{5by}=\frac{7\,.\,5axby}{14ax}=\frac{5by}{2}.$

III. $\frac{x^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}:\frac{(x+a)^2}{(x-a)^3}=\frac{(x-a)^4(x+a)}{(x-a)^2(x+a)^2}=\frac{(x-a)^2}{x+a}.$

IV. $\frac{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3}{x^3-y^3}:\frac{(a+x)^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{(a+x)^3}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}:\frac{(a+x)^2}{x^2+xy+y^2}.$

Здѣсь числитель и знаменатель первой дроби дѣлятся соотвѣтственно на числ. и знам. второй, сл. частное $=$

$$\frac{(a+x)^3:(a+x)^2}{[(x-y)(x^2+xy+y^2)]:(x^2+xy+y^2)}=\frac{a+x}{x-y}.$$

105. Приводимъ еще нѣсколько примѣровъ дѣйствій надъ дробями.

I. Упростить выраженіе

$$\frac{a-\frac{a-b}{1+ab}}{1+\frac{a(a-b)}{1+ab}}$$

Умножаемъ прежде всего числителя и знаменателя данной дроби на $1+ab$, чтобы привести ихъ къ цѣлому виду; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{a(1+ab)-(a-b)}{1+ab+a(a-b)}$$

Раскрывъ скобки въ числителѣ и знаменателѣ и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ

$$\frac{a^2b+b}{1+a^2},\ \text{или}\ \frac{b(1+a^2)}{1+a^2},\ \text{или}\ b.$$

Данное выраженіе равно, слѣдовательно, b.

II. Упростить выраженіе

$$\frac{\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\left(a^2-\frac{a^3+ab^2}{a+b}\right)}{1-\frac{a}{a+b}}$$

Чтобы привести оба члена дроби къ цѣлому виду, множимъ ихъ на $a(a+b)$; причемъ въ числителѣ первый множитель умножаемъ на a, второй на $a+b$. Такимъ образомъ найдемъ

$$\frac{(a^2-b^2)(a^3+a^2b-a^3-ab^2)}{a(a+b)-a^2}=\frac{(a^2-b^2)ab(a-b)}{ab}=(a^2-b^2)(a-b).$$

III. Помножить

$$\frac{4x^3y^2}{5a^3}-\frac{3x^2y^3}{2a^2b}+\frac{2xy^4}{3ab^2}-\frac{y^5}{b^3} \text{ на } \frac{2x^2y}{3a^2}-\frac{3xy^2}{5ab}-\frac{3y^3}{2b^2},$$

гдѣ оба сомножителя расположены по нисходящимъ степенямъ x.

$$\begin{array}{l}
\frac{4x^3y^2}{5a^3}-\frac{3x^2y^3}{2a^2b}+\frac{2xy^4}{3ab^2}-\frac{y^5}{b^3} \\
\frac{2x^2y}{3a^2}-\frac{3xy^2}{5ab}-\frac{3y^3}{2b^2} \\
\hline
\frac{8x^5y^3}{15a^5}-\frac{x^4y^4}{a^4b}+\frac{4x^3y^5}{9a^3b^2}-\frac{2x^2y^6}{3a^2b^3} \\
\qquad -\frac{12x^4y^4}{25a^4b}+\frac{9x^3y^5}{10a^3b^2}-\frac{2x^2y^6}{5a^2b^3}+\frac{3xy^7}{5ab^4} \\
\qquad\qquad -\frac{12x^3y^5}{10a^3b^2}+\frac{9x^2y^6}{4a^2b^3}-\frac{xy^7}{ab^4}+\frac{3y^8}{2b^5} \\
\hline
\frac{8x^5y^3}{15a^5}-\frac{37x^4y^4}{25a^4b}+\frac{13x^3y^5}{90a^3b^2}+\frac{71x^2y^6}{60a^2b^3}-\frac{2xy^7}{5ab^4}+\frac{3y^8}{2b^5}.
\end{array}$$

IV. Провѣримъ полученный результатъ: это будетъ примѣръ дѣленія дробныхъ многочленовъ, расположенныхъ по степенямъ главной буквы.

$$\begin{array}{l|l}
\frac{8x^5y^3}{15a^5}-\frac{37x^4y^4}{25a^4b}+\frac{13x^3y^5}{90a^3b^2}+\frac{71x^2y^6}{60a^2b^3}-\frac{2xy^7}{5ab^4}+\frac{3y^8}{2b^5} & \frac{4x^3y^2}{5a^3}-\frac{3x^2y^3}{2a^2b}+\frac{2xy^4}{3ab^2}-\frac{y^5}{b^3} \\
\cline{2-2}
-\frac{8x^5y^3}{15a^5}\pm\frac{x^4y^4}{a^4b}\mp\frac{4x^3y^5}{9a^3b^2}\pm\frac{2x^2y^6}{3a^2b^3} & \frac{2x^2y}{3a^2}-\frac{3xy^2}{5ab}-\frac{3y^3}{2b^2}. \\
\hline
\quad -\frac{12x^4y^4}{25a^4b}-\frac{3x^3y^5}{10a^3b^2}+\frac{37x^2y^6}{20a^2b^3}-\frac{2xy^7}{5ab^4} & \\
\quad \pm\frac{12x^4y^4}{25a^4b}\mp\frac{9x^3y^5}{10a^3b^2}\pm\frac{2x^2y^6}{5a^2b^3}\mp\frac{3xy^7}{5ab^4} & \\
\hline
\qquad -\frac{6x^3y^5}{5a^3b^2}+\frac{9x^2y^6}{4a^2b^3}-\frac{xy^7}{ab^4}+\frac{3y^8}{2b^5} & \\
\qquad -\frac{6x^3y^5}{5a^3b^2}+\frac{9x^2y^6}{4a^2b^3}-\frac{xy^7}{ab^4}+\frac{3y^8}{2b^5} & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Опредѣленіе членовъ частнаго:

1. $\frac{8x^5y^3}{15a^5}:\frac{4x^3y^2}{5a^3}=\frac{8x^5y^3:4x^3y^2}{15a^5:5a^3}=\frac{2x^2y}{3a^2}.$

2. $-\frac{12x^4y^4}{25a^4b}:\frac{4x^3y^2}{5a^3}=-\frac{12x^4y^4:4x^3y^2}{25a^4b:5a^3}=-\frac{3xy^2}{5ab}$

3. $-\frac{6x^3y^5}{5a^3b^2}:\frac{4x^3y^2}{5a^3}=-\frac{6x^3y^5:4x^3y^2}{5a^3b^2:5a^3}=-\frac{3y^3}{2b^2}.$

106. Задачи.

Сократить дроби:

1. $\frac{108a^2b^2c^2d^2}{96a^3bc^2d}$.

2. $\frac{84m^3n^2p}{35m^4np^2}$.

3. $\frac{39a^2b^3 - 36ab^3}{65a^3bc - 60a^2bc}$.

4. $\frac{m^3a^2 + n^3a^2}{a(m^2 + n^2) - man}$.

5. $\frac{x(x^3 + y^3)(x - y)}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - xy)}$.

6. $\frac{(m^2 - 4a^2)(m^2 + am - 2a^2)}{(m^2 - a^2)(m^2 - am - 2a^2)}$.

7. $\frac{a^3 - a^2x - ax^2 - 2x^3}{a^5 - 2a^4x - ax^4 + 2x^5}$.

8. $\frac{x^4 + 3x^3 + x + 3}{x^3 - 8x + 3}$.

9. $\frac{3a^4c + 5a^3bc - 2a^3c^2}{2ab^2c^2 - 3a^2b^2c - 5ab^3c}$.

10. $\frac{21a^5b^5c^3 - 35a^5b^3c^5 - 49a^3b^5c^5}{35a^2b^4c^6 - 15a^4b^4c^4 + 25a^4b^2c^6}$.

11. $\frac{ac + bx + ax + bc}{ay + 2bx + 2ax + by}$.

12. $\frac{2az^2 + 2bz^2 + 3a^3 + 3a^2b}{ab^2 + b^3 - 2ax^2 - 2bx^2}$.

13. $\frac{5ac^2 - 4ab^2 - 12b^2x + 15c^2x}{8a^3 - 4ab^2 + 24a^2x - 12b^2x}$.

14. $\frac{14a^3x^5 + 9a^2b^6 - 6b^4x^4 - 21a^5b^2x}{12a^4b^4 - 28a^7x + 21a^3bx^4 - 9b^5x^3}$.

15. $\frac{a^3 + (1 + a)ab + b^2}{a^3 + (1 - 3c^2)ab - 3a^3c^2}$.

16. $\frac{6a^2c^2 - 2a^4 + 18bc^2 - 6a^2b}{4a^4 + 2a^2c^2 + 12a^2b + 6bc^2}$.

17. $\frac{x^4 - y^2}{x^3 + xy}$.

18. $\frac{9x^5 - 4x}{6x^2y^2 - 4y^2}$.

19. $\frac{35a^5 + 24a^2b^2 - 21a^3b + 15a^3b^2 - 40a^4b - 9ab^3}{28a^3b^2 - 42a^4 - 18a^2b^2 - 32a^2b^3 + 48a^3b + 12ab^4}$.

20. $\frac{x^4y^4 - a^8}{15x^2y^2 - 15a^2xy}$.

21. $\frac{243x^{10}y^2z^4 - 48x^2y^{14}}{21x^4y^5z^4 + 14x^2y^8z^3}$.

22. $\frac{135a^5b^4(a^4 - b^4)(a^3 + b^3)}{153a^2b^6(a^2 + b^2)(a^6 - b^0)}$.

23. $\frac{15a^2 - 27ab}{25a^2 - 90ab + 81b^2}$.

24. $\frac{3a^4x + 6a^3x^2 + 3a^2x^3}{5a^3x^2 + 15a^2x^3 + 15ax^4 + 5x^5}$.

25. $\frac{x^2 - (a - b)x - ab}{x^3 + bx^2 + ax + ab}$.

26. $\frac{x^2 + (b - c - a)x - (b - c)a}{x^2 - b^2 + 2bc - c^2}$.

27. $\frac{ax^2 + (bc - ab - ac)x + abc - b^2c}{b^2c^2 - 2abc^2 + a^2c^2 - a^2x^2}$.

28. $\frac{a^2bc - b^3c + 2b^2c^2 - bc^3}{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$.

29. $\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz}{x^2 - y^2 - z^2 - 2yz}$.

30. $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$.

31. $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$.

32. $\frac{x^2 - x - 20}{x^2 + x - 30}$.

33. $\frac{2a^2 - ab - 3b^2}{2a^2 - 5ab + 3b^2}$.

34. $\frac{3x^2 - 10xy + 8y^2}{5x^2 - 13xy + 6y^2}$.

35. $\frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}$.

36. $\frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$.

37. $\frac{a^2(b^2 - c^2) - ab(2b^2 + bc - c^2) + b^3(b + c)}{a^3(b^2 + 2bc + c^2) - a^2b(2b^2 + 3bc + c^2) + ab^3(b + c)}$.

38. $\frac{(c - d)a^2 + 6(bc - bd)a + 9(b^2c - b^2d)}{(bc - bd + c^2 - cd)a + 3(b^2c + bc^2 - b^2d - bcd)}$.

39. $\frac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)}$.

40. $\frac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{4x^2 - 1}$.

41. $\frac{a^9 - ax^8 + a^8x - x^9}{a^5 - ax^4 + a^4x - x^5 + \sqrt{2}(a^4x - a^2x^3 + a^3x^2 - ax^4)}$.

42. $\dfrac{2x^2-7x+3}{2x^3-11x^2+17x-6}$.

43. $\dfrac{a^3-a(b^2+c^2)+2abc}{2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4}$.

44. $\dfrac{x^3-3x^2-4x+12}{x^3-10x^2+31x-30}$.

45. $\dfrac{x^4-x^3-32x^2-12x-144}{x^3-7x+6}$.

46. $\dfrac{x^2-3xy+2y^2+xz-2yz}{x^2+2yz-y^2-z^2}$.

47. $\dfrac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}$.

Привести къ общему знаменателю дроби:

48. $\dfrac{2x^2y}{3a^3}, \dfrac{3x^3}{4a^2b}, \dfrac{4y^3}{5ab^2}, \dfrac{5xy^2}{6b^3}$.

49. $\dfrac{1}{4a^3(a+x)}, \dfrac{1}{4a^3(a-x)}, \dfrac{1}{2a^2(a^2-x^2)}$.

50. $\dfrac{x}{x^2-y^2}, \dfrac{xy}{x^3-y^3}, \dfrac{x^2y^2}{(x+y)(x^4-y^4)}$.

51. $\dfrac{a}{a+b}, \dfrac{b}{b+c}, \dfrac{c}{c+a}, \dfrac{(a+b+c)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

52. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}, \dfrac{b}{(b-c)(b-a)}, \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

53. $\dfrac{a^2}{b^2c^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \dfrac{b^2}{a^2c^2(b^2-a^2)(b^2-c^2)}, \dfrac{c^2}{a^2b^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$.

Сдѣлать сложеніе и вычитаніе въ слѣдующихъ примѣрахъ:

54. $\dfrac{a-b}{ab}+\dfrac{c-a}{ac}+\dfrac{b-c}{bc}$.

55. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}$.

56. $\dfrac{1}{4(1+x)}+\dfrac{1}{4(1-x)}+\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

57. $\dfrac{5}{2(x+1)}-\dfrac{1}{10(x-1)}-\dfrac{24}{5(2x+3)}$.

58. $\dfrac{1}{1+x}-\left\{\dfrac{6}{1-x}-\left(\dfrac{2}{1+2x}-\dfrac{16}{2x-1}\right)\right\}$.

59. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

60. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

61. $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ac(b+d)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$.

62. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$.

63. $\dfrac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{ab}+\dfrac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{bc}+\dfrac{(a+c)(a^2+c^2-b^2)}{ac}$.

64. $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2}-\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}-2$.

65. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)}$
$+\dfrac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}$.

66. $\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)} + \frac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(b^2-c^2)}$.

67. $\frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)} + \frac{a^2b^2d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)} + \frac{a^2c^2d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)}$
$+ \frac{b^2c^2d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}$.

68. $\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} + \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}$.

69. $\frac{2}{x+4} - \frac{x-3}{x^2-4x+16} + \frac{x^2}{x^3+64}$.

70. $\frac{2a}{a^4-a^2+1} - \frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{a^2+a+1}$.

71. $\frac{1}{a^2-7a+12} + \frac{2}{a^2-4a+3} - \frac{3}{a^2-5a+4}$.

72. $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} - \frac{2a^2+a-3}{6a^2+5a-6} + \frac{2b-2ab}{3a^2-2a-3ab+2b} - \frac{a+6ab-3b}{9a^2-6a-9ab+6b}$.

73. $\frac{x+3}{2x-1} - \frac{x^2-5}{4x^2-4x+1} - \frac{2x^3-x-3}{8x^3-12x^2+6x-1}$.

74. $\frac{z^4-2z^2-3}{15z^6-17z^2-18+25z^4} - \frac{z^2-4z+1}{12z^4-z^2-6}$.

75. $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1} + \frac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1} - \frac{x^3}{x^4-1}$.

Сдѣлать умноженіе дробей:

76. $\frac{5a^3b^2}{7m^2n^4} \times \frac{14a^9m^7}{25n^5b^{11}} \times \frac{5n^{11}m^6}{6a^{15}b^{13}} \times \frac{6am}{b^3n}$.

77. $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2} \times \frac{x-y}{x^2+xy}$.

78. $\frac{a^6-b^6}{a^4+2a^2b^2+b^4} \times \frac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2} \times \frac{a+b}{a^3-b^3}$.

79. $\frac{x^2-(m+n)x+mn}{x^2-(m+p)x+mp} \times \frac{x^2-p^2}{x^2-n^2}$.

80. $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right)$.

81. $\frac{a^2-x^2}{a+b} \times \frac{a^2-b^2}{ax+x^2} \cdot \left(a + \frac{ax}{a-x}\right)$.

82. $\left(\frac{a}{bc} - \frac{b}{ac} - \frac{c}{ab} - \frac{2}{a}\right) \cdot \left(1 - \frac{2c}{a+b+c}\right)$.

83. $\frac{x^2+4x+3}{x^2+10x+21} \times \frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+15}$.

84. $\frac{1}{(p+q)^2} \cdot \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{2}{(p+q)^3} \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$.

85. $\left(\frac{a+x}{a-x} + \frac{b-x}{b+x}\right) \cdot \left(\frac{a-x}{a+x} + \frac{b+x}{b-x}\right)$.

86. $\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.

87. $(x^2-1)\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1\right]$.

88. $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\times\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\times\frac{x^2-4}{x^2-1}$.

89. $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\times\frac{x-y}{x+y}\times\frac{(x+y)^5-x^5-y^5}{3x^2y+3xy^2}$.

Сдѣлать дѣленіе въ слѣдующихъ примѣрахъ:

90. $\frac{14a^2b^3c}{39d^2f^5g^6}:\frac{35d^7f^4g^8}{9a^4b^5c^2}$.

91. $\frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{z^2-x^2-y^2+2xy}:\frac{x+y+z}{y+z-x}$.

92. $\frac{a^4-3a^3x+3a^2x^2-ax^3}{a^3b-b^4}:\frac{a^4-2a^3x+a^2x^2}{a^2b^2+ab^3+b^4}$.

93. $\left\{\frac{5a^2x}{b}-\frac{5aby}{c}+5ad-ax+\frac{b^2y}{c}-bd\right\}:\left(\frac{ax}{b}-\frac{by}{c}+d\right)$.

94. $\left(\frac{m^5}{32n^{10}}-\frac{32p^5}{243}\right):\left(\frac{m}{2n^2}-\frac{2}{3}p\right)$.

95. $\frac{a^2b^2}{c}:\left\{\frac{a^2c^2}{b}:\left[\frac{b^2c^2}{a}\cdot\frac{ac}{b^2}\right]:\left[\frac{ab}{c^2}:\frac{bc}{a^2}\right]\right\}$.

96. $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$.

97. $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$.

98. $\left(a-\frac{a^2+ab}{a-b}\right)\cdot\left(a-\frac{2a^2+ab}{a+b}\right):\left(ab+\frac{ab^3}{a^2-b^2}\right)$.

99. $\frac{x^2+1}{2x-1}-\frac{x}{2}:\frac{x(2+x)}{1-2x}$.

100. $\left(x^2+2x+1-\frac{1}{x^2}\right):\left(x+\frac{1}{x}+1\right)$.

101. Провѣрить равенство

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}:\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}}=\frac{2c}{a+c-b}-1.$$

102. Упростить выраженіе:

$$a+\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{b}}}.$$

103. Упростить выраженіе

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{a}{1+a+\cfrac{2a^2}{1-a}}}.$$

104. Упростить $\dfrac{3abc}{bc+ca-ab}-\dfrac{\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{b-1}{b}+\dfrac{c-1}{c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$

105. Упростить $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\cdot\left\{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}$.

106. Упростить

$$\frac{\left[\frac{(a+b)^2}{4ab}-1\right]\left[\frac{(a-b)^2}{4ab}+1\right]}{(a+b)^3-3a^2b-3ab^2}\times\frac{[(a+b)^2-ab][(a-b)^2+ab]}{(a-b)^3+3ab(a-b)}$$

107. $\left\{\frac{1}{x}:\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right\}+\left\{\frac{1}{y}:\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\right\}-\left\{\frac{1}{x^2}:\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)\right\}$.

108. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\times\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c+a}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c+a}}\times\dfrac{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a+b}}$.

109. $\dfrac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$.

110. Опредѣлить дробь, имѣющую свойство не измѣнять своей величины отъ прибавленія къ ея числителю 6, а къ знаменателю 15. Обобщить вопросъ.

111. Доказать, что если къ обоимъ членамъ дроби придать поровну, то она увеличится, когда она <1, и уменьшится, если величина ея >1.

112. Если квадраты двухъ сторонъ треугольника пропорціальны проэкціямъ этихъ сторонъ на третью, то доказать, что данный треугольникъ есть или равнобедренный, или прямоугольный.

ГЛАВА X.

Возвышеніе въ степень.

Опредѣленіе.— Правила: знаковъ и показателей. — Степень произведенія и дроби. — Возвышеніе одночлена въ степень.—Квадратъ и кубъ многочлена.—Задачи.

107. Опредѣленіе. — Въ этой главѣ мы разсмотримъ возвышеніе въ цѣлую положительную степень.

Возвысить количество въ цѣлую положительную степень значитъ повторить его множителемъ столько разъ, сколько въ показателѣ степени находится единицъ.

Такъ: $a^2=a.a$; $a^3=a.a.a$; $a^n=a.a.a\ldots\ldots$ (n разъ).

Такимъ образомъ, возвышеніе въ степень есть частный случай умноженія, — случай, когда всѣ производители равны. Количество, возвышаемое въ степень, называется *основаніемъ* степени. Такъ, въ формулѣ a^3, a есть основаніе; въ выраженіи x^n основаніе есть x.

108. Правило знаковъ. Правило знаковъ при возвышеніи въ степень вытекаетъ непосредственно изъ правила знаковъ при умноженіи; но послѣднее остается одинаковымъ, будутъ-ли производители даны съ ихъ окончательными знаками, или же окончательные ихъ знаки неизвѣстны, поэтому и правило знаковъ при возвышеніи въ степень въ обоихъ случаяхъ будетъ одно и тоже.

1. *Случай возвышенія въ четную степень.* Пусть требуется количества $+a$ и $-a$ возвысить въ четную степень $2n$; это значитъ — то и другое основаніе надо повторить множителемъ $2n$ разъ. $+a$, взятое $2n$ разъ множителемъ дастъ $+a^{2n}$; взявъ $(-a)$ множителемъ $2n$ разъ, можемъ все произведеніе разбить на n паръ, изъ которыхъ каждая дастъ знакъ $+$, а потому и искомая степень имѣетъ знакъ $+$:

$$\underbrace{(-a)(-a)}_{+}.\ \underbrace{(-a)(-a)}_{+}.\ \underbrace{(-a)(-a)}_{+}\ \ldots\ldots\ldots\ \underbrace{(-a)(-a)}_{+},$$

слѣд. $(-a)^{2n}=+a^{2n}$. Итакъ

$$(\pm a)^{2n}=+a^{2n},$$

т. е. *четная степень всегда даетъ знакъ $+$, будетъ-ли передъ основаніемъ знакъ $+$ или $-$.*

2. *Случай возвышенія въ нечетную степень.* Если передъ основаніемъ находится знакъ $+$, то изъ правила знаковъ при умноженіи прямо слѣдуетъ, что и произведеніе будетъ имѣть тотъ же знакъ, слѣд.

$$(+a)^{2n+1}=+a^{2n+1}\ \ldots\ldots\ (1)$$

Если передъ основаніемъ будетъ знакъ $-$, то возвышая $-a$ въ нечетную степень $2n+1$, мы получимъ произведеніе $2n+1$ множителей, изъ которыхъ составится n паръ, дающихъ знакъ $+$, и останется одинъ множитель $(-a)$, вслѣдствіе чего произведеніе будетъ имѣть знакъ $-$:

$$\underbrace{(-a)(-a)}_{+}.\ \underbrace{(-a)(-a)}_{+}.\ \underbrace{(-a)(-a)}_{+}\ \ldots\ldots\ldots\ \underbrace{(-a)(-a)}_{+}.\ (-a),$$

Итакъ:
$$(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}\ \ldots\ldots\ (2).$$

Изъ (1) и (2) слѣдуетъ, что *нечетная степень имѣетъ такой же знакъ какъ и основаніе.* —

Примѣры. $(-3)^2=+9$; $(+5)^4=+625$; $(+4)^3=+64$; $(-4)^3=-64$; $(\pm a)^4=+a^4$; $(+a)^5=+a^5$; $(-a)^5=-a^5$, и т. д.

109. Правило показателей. — Пусть требуется a^m возвысить въ степень p, гдѣ a — какое угодно количество, а m и p — числа цѣлыя и положительныя. Возвысить a^m въ степень p значитъ повторить это выраженіе множителемъ p разъ; слѣд.

$$(a^m)^p=a^m.\ a^m.\ a^m.\ a^m\ \ldots\ldots\ldots\ a^m\ (p\ \text{разъ}).$$

Но при умноженіи показатели складываются, слѣд. вторую часть равенства

можно представить въ видѣ $a^{m+m+m+\cdots\cdots}$, гдѣ m берется слагаемымъ p разъ; m, повторенное слагаемымъ p разъ, даемъ mp; слѣд.

$$(a^m)^p = a^{mp}.$$

Отсюда правило: *для возвышенія степени въ новую степень нужно показателя возвышаемаго количества помножить на показателя новой степени.*— Такъ: $(a^4)^5 = a^{20}$; $(a^{m-1})^{m+1} = a^{m^2-1}$ и т. д.

110. Возвышеніе произведенія въ степень. — Пусть требуется произведеніе abc возвысить въ m-ую степень; это значитъ — повторить abc множителемъ m разъ; слѣд.

$(abc)^m = abc.\ abc.\ abc \ldots\ldots\ldots abc$ (гдѣ abc взято m разъ); перемѣняя мѣста производителей, имѣемъ

$$abc.\ abc \ldots\ldots abc = aaa \ldots\ldots a \times bbb \ldots\ldots b \times ccc \ldots\ldots c;$$

здѣсь каждая изъ буквъ a, b и c берется множителемъ m разъ, слѣд. послѣднее выраженіе въ сокращенномъ видѣ $= a^m b^m c^m$. Итакъ

$$(abc)^m = a^m b^m c^m.$$

Отсюда правило: *чтобы возвысить въ степень произведеніе должно каждаго множителя отдѣльно возвысить въ требуемую степень и результаты перемножить.* —

111. Возвышеніе въ степень дроби. — Пусть требуетстя дробь $\frac{a}{b}$ возвысить въ m-ую степень; это значитъ — дробь $\frac{a}{b}$ повторить множителемъ m разъ. По правилу умноженія дробей имѣемъ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\cdots\frac{a}{b}\,(m \text{ разъ}) = \frac{a.a.a.\ldots\ldots\ a(m \text{ разъ})}{b.b.b.\ldots\ldots\ b(m \text{ разъ})} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Итакъ
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m},$$

т. е. *для возвышенія дроби въ степень слѣдуетъ возвысить въ данную степень числителя и знаменателя отдѣльно, и степень числителя раздѣлить на степень знаменателя.* —

По этому правилу найдемъ: $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3^3}{7^3} = \frac{27}{343}$ и т. п.

112. Возвышеніе одночлена въ степень. — Пусть требуется одночленъ $2a^3b^5c^md$ возвысить въ пятую степень. Для этого надо каждаго изъ множителей 2, a^3, b^5, c^m и d возвысить въ данную степень и результаты перемножить, причемъ при возвышеніи степени въ данную степень — показателей перемножить. Такимъ образомъ, послѣдовательно найдемъ:

$$(2a^3b^5c^md)^5 = 2^5.(a^3)^5.(b^5)^5.(c^m)^5.d^5 = 32a^{15}b^{25}c^{5m}d^5.$$

Итакъ, *чтобы возвысить въ степень одночленъ, должно возвысить въ данную степень его коэффиціентъ, а показателя каждаго изъ буквенныхъ множителей умножить на показателя степени.* —

При возвышеніи въ степень дроби нужно такимъ образомъ поступать съ числителемъ и знаменателемъ. Такъ, напр., послѣдовательно получимъ

$$\left(\frac{4a^3b^2c^{m-2}}{7df^4}\right)^3 = \frac{(4a^3b^2c^{m-2})^3}{(7df^4)^3} = \frac{64a^9b^6c^{3m-6}}{343d^3f^{12}}.$$

113. Для возвышенія многочлена въ какую угодно степень служитъ особая формула, извѣстная подъ именемъ формулы Ньютона. Она будетъ выведена впослѣдствіи; въ этой главѣ мы ограничимся выводомъ чаще употребляемыхъ формулъ квадрата и куба многочлена.

114. Квадратъ многочлена. — Мы видѣли, что каковы бы ни были количества a и b по знаку, всегда имѣемъ

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

Взявъ триномъ $a+b+c$ и разсматривая на-время $a+b$ какъ одинъ членъ, найдемъ послѣдовательно

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+b^2+2ab+$$
$$2ac+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Послѣдняя формула показываетъ, что квадратъ тринома состоитъ изъ алгебраической сумы: квадратовъ всѣхъ его членовъ и удвоенныхъ произведеній каждаго члена на каждый, за нимъ слѣдующій. Докажемъ *общность* этого закона, т. е. что онъ справедливъ для многочлена, состоящаго изъ скольких угодно членовъ; а для этого, *допустивъ, что законъ вѣренъ для многочлена, состоящаго изъ n членовъ, докажемъ, что онъ останется вѣренъ и для многочлена, содержащаго однимъ членомъ больше.*

Итакъ, допускаемъ, что замѣченный для квадрата тринома законъ вѣренъ для полинома $a+b+c+d+\ldots\ldots+i+h$, состоящаго изъ n членовъ, и возьмемъ полиномъ $a+b+c+d+\ldots\,+i+h+k$, содержащій $n+1$ членъ. Принявъ на-время сумму $a+b+\ldots\,+i+h$ первыхъ n членовъ за одинъ членъ, а весь многочленъ $a+b+\ldots+i+h+k$ за двучленъ, по формулѣ квадрата бинома напишемъ: $[(a+b+c+d+\ldots\ldots+i+h)+k]^2$ $=(a+b+c+d+\ldots\,+i+h)^2+2(a+b+c+\ldots+i+h)k+k^2$.

Но, по допущенію, $(a+b+c+d+\ldots\ldots+i+h)^2$ состоитъ изъ: 1) суммы квадратовъ всѣхъ членомъ отъ a до h включительно, т. е. изъ a^2+ $+b^2+c^2+d^2+\ldots\ldots+i^2+h^2$; и 2) суммы удвоенныхъ произведеній каждаго изъ членовъ $a, b, c, \ldots\ldots i, h$ на каждый, за нимъ слѣдующій, т. е. $2ab+2ac+2ad+\ldots\ldots 2ai+2ah+2bc+2bd+\ldots\ldots+2ih$. Всѣ эти члены написаны во второй части равенства (A) влѣво отъ вертикальной черты. Прибавивъ сюда $2(a+b+\ldots\,+h)k$, т. е. алгебраическую сумму удвоенныхъ произведеній первыхъ n членовъ на добавленный членъ k, и квадратъ k^2 этого новаго члена, получимъ:

$$\text{(A)}\quad (a+b+c+d+\ldots+i+h+k)^2=\begin{array}{r|l r}
a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots+i^2+h^2 & +k^2\ldots\ldots & \alpha)\\
+2ab+2ac+2ad+\ldots+2ai+2ah & +2ak\ldots\, & \beta)\\
+2bc+2bd+\ldots+2bi+2bh & +2bk\ldots\, & \gamma)\\
+2cd+\ldots+2ci+2ch & +2ck\ldots\, & \delta)\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & .\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & .\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & .\\
+2ih & +2ik & \varkappa)\\
 & +2hk & \lambda)
\end{array}$$

Отсюда видно; что квадратъ новаго многочлена, содержащаго $n+1$ членъ, состоитъ: 1) изъ суммы квадратовъ всѣхъ его членовъ отъ перваго до послѣд-

няго включительно (строка α); 2) изъ алгебраической суммы удвоенныхъ произведеній — перваго члена на каждый за нимъ слѣдующій (строка β), втораго члена на каждый, слѣдующій за нимъ (γ), ... , третьяго члена отъ конца на оба, стоящіе за нимъ ($\varkappa$), и предпослѣдняго на послѣдній (λ). Однимъ словомъ, во второй части равенства (A) находится алгебраическая сумма квадратовъ всѣхъ $n+1$ членовъ новаго многочлена и удвоенныхъ произведеній каждаго его члена на каждый за нимъ слѣдующій.

Такимъ образомъ, допустивъ, что законъ вѣренъ для многочлена, содержащаго n членовъ, мы доказали, что онъ вѣренъ и для полинома, имѣющаго однимъ членомъ больше. Но вначалѣ мы видѣли, что законъ вѣренъ для трехчлена, слѣд., по доказанному, онъ вѣренъ, и для четырехчлена; а будучи вѣренъ для четырехчлена, онъ вѣренъ по доказанному, и для пятичлена, и т. д. — однимъ словомъ, для *всякаго* многочлена. Итакъ: *квадратъ многочлена равенъ алгебраической суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ и удвоенныхъ произведеній каждаго члена на каждый за нимъ слѣдующій.*

Новый методъ доказательства, съ которымъ мы здѣсь впервые встрѣтились, называется *способомъ заключенія отъ* n *къ* n + 1; у англійскихъ математиковъ онъ извѣстенъ подъ именемъ *метода математической* или *демонстративной индукціи*. Изъ предыдущаго видно, что методъ этотъ состоитъ въ слѣдующемъ: сначала справедливость доказываемаго закона подтверждается на частномъ примѣрѣ, какъ напр. у насъ на трехчленѣ; затѣмъ, — и это существенная часть доказательства по этому способу, — доказывается, что если теорема вѣрна для какого либо случая (напр. для n члена), то она вѣрна и для *ближайшаго* случая (въ нашей теоремѣ — для $n+1$-го члена); отсюда слѣдуетъ, что будучи вѣрна въ одномъ случаѣ, она вѣрна въ ближайшемъ къ нему, затѣмъ въ случаѣ — ближайшемъ къ послѣднему и т. д; слѣдовательно, теорема вѣрна и для всѣхъ случаевъ, слѣдующихъ за тѣмъ, съ котораго мы начали.

Изобрѣтеніе этого способа приписываютъ швейцарскому математику *Бернулли*.

115. Сгруппировавъ члены квадрата полинома иначе, можемъ дать ему слѣдующій видъ:

$$(a+b+c+d+\ldots+i+h)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2+2(a+b+c+d)e+e^2+\ldots+h^2.$$

Откуда видно, что квадратъ многочлена равенъ: квадрату 1-го члена, + удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-ой, + квадратъ 2-го, + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-ій, + квадратъ 3-го, + удвоенное произведеніе суммы первыхъ трехъ членовъ на 4-ый, + квадратъ четвертаго, и т. д.

Въ этой формѣ квадратъ многочлена примѣняется при извлеченіи квадратнаго корня изъ многочлена.

116. Примѣръ. Найти $(4a^2x^3-7a^3x^2-6a^4x+a^5)^2$.

Примѣняя первую формулу, найдемъ

$$\begin{aligned}&16a^4x^6+49a^6x^4+36a^8x^2+a^{10}\\ &-56a^5x^5-48a^6x^4+8a^7x^3\\ &+84a^7x^3-14a^8x^2\\ &-12a^9x;\end{aligned}$$

сдѣлавъ приведеніе и расположивъ члены по убывающимъ степенямъ буквы x, получимъ

$$16a^4x^6 - 56a^5x^5 + a^6x^4 + 92a^7x^3 + 22a^8x^2 - 12a^9x + a^{10}.$$

Примѣчаніе. Если сумму квадратовъ членовъ полинома изобразить сокращенно знакомъ Σa^2, а въ суммѣ удвоенныхъ произведеній вынести за скобки 2, выраженіе же въ скобкахъ, равное алгебраической суммѣ произведеній каждаго члена на каждый, за нимъ слѣдующій, изобразить въ формѣ Σab, то формулу квадрата многочлена можно представить въ сокращенной формѣ такъ:

$$(a + b + c + \;.\;.\;.\;.\;.\; + i + h)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab.$$

117. Кубъ многочлена. — Въ § 37, IV мы нашли, что $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. На основаніи этой формулы, взявъ триномъ $a+b+c$ и принявъ на-время $a+b$ за одинъ членъ, имѣемъ:

$$(a+b+c)^3 = [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = a^3$$
$$+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + (3a^2 + 6ab + 3b^2)c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 =$$
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc.$$

Такимъ-же образомъ, взявъ четырехчленъ, и возвысивъ его въ кубъ, нашли-бы.

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3 = {} & a^3 + b^3 + c^3 + d^3\\ & + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d\\ & + 3b^2a + 3b^2c + 3b^2d\\ & + 3c^2a + 3c^2b + 3c^2d\\ & + 3d^2a + 3d^2b + 3d^2c\\ & + 6abc + 6abd + 6acd\\ & + 6bcd.\end{aligned}$$

Изъ этихъ частныхъ случаевъ видно, что кубъ взятыхъ въ нихъ полиномовъ состоитъ изъ алгебраической суммы: кубовъ всѣхъ членовъ, утроенныхъ произведеній квадрата каждаго члена на каждый изъ остальныхъ, и ушестеренныхъ произведеній этихъ членовъ, взятыхъ по три.

Докажемъ теперь, что если этотъ законъ вѣренъ для полинома объ n членахъ $a+b+c+d+\;.\;.\;.\;.\;+g+i+h$, то онъ будетъ вѣренъ и для полинома объ $n+1$ членахъ $a+b+c+d\;.\;.\;.\;.\;+g+i+h+k$. Принявъ на-время $a+b+c+\;.\;.\;.\;.\;+i+h$ за одинъ членъ, по формулѣ куба бинома получимъ

$$(a+b+c+d+\ldots\ldots+g+i+h+k)^3 = (a+b+c+d+\ldots\ldots+i+h)^3 + 3(a+b+c+\ldots\ldots+h)^2k$$
$$+ 3(a+b+c+d+\ldots\ldots+i+h)k^2 + k^3 \ldots\ldots(1)$$

Но по допущенію, $(a+b+c+d+\;.\;.\;.\;.\;.\;+i+h)^3$ состоитъ изъ: 1) суммы кубовъ всѣхъ членовъ отъ a до h включительно, 2) суммы утроенныхъ произведеній квадрата каждаго члена a, b, . . . , h на каждый изъ остальныхъ, и 3) ушестеренныхъ произведеній этихъ членовъ, взятыхъ по три. Всѣ эти члены написаны ниже влѣво отъ вертикальной черты; вправо-же отъ нея прибавлены раскрытыя произведенія:

$$3(a+b+\;.\;.\;.\;.\;+h)^2k + 3(a+b+c+\;.\;.\;.\;.\;+h)k^2 + k^3.$$

Такимъ образомъ получимъ:

$$(a+b+c+d+\ldots\ldots\ldots+g+i+h+k)^3=$$

$$\begin{array}{llllll|l r}
a^3 & +\,b^3 & +\,c^3 & +\ldots & +\,i^3 & +\,h^3 & +\,k^3 & \alpha) \\
+\,3a^2b & +\,3a^2c & + & \ldots\ldots & & +\,3a^2h & +\,3a^2k & \beta) \\
+\,3b^2a & +\,3b^2c & + & \ldots\ldots & & +\,3b^2h & +\,3b^2k & \gamma) \\
+\,3c^2a & +\,3c^2b & + & \ldots\ldots & & +\,3c^2h & +\,3c^2k & . \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\
+\,3h^2a & +\,3h^2b & + & \ldots\ldots & & +\,3h^2i & +\,3h^2k & \varkappa) \\
 & & & & & & +\,3k^2a+3k^2b+3k^2c+\ldots+3k^2h & \lambda) \\
+\,6abc & +\,6abd & + & \ldots\ldots & & +\,6gih & +\,6abk+6ack+\ldots+6ihk & \mu)
\end{array}$$

Отсюда видно, что кубъ новаго многочлена объ $n+1$ членахъ содержитъ: 1) сумму кубовъ всѣхъ членовъ отъ a до k включительно (строка α); 2) алгбераическую сумму утроенныхъ произведеній квадрата каждаго члена отъ a до k на каждый изъ остальныхъ (строки β, γ,...., λ); 3) алг. сумму ушестеренныхъ произведеній всѣхъ членовъ a, b, c,....., h, k, взятыхъ по три. Однимъ словомъ, законъ, предположенный вѣрнымъ для многочлена объ n членахъ, оказывается вѣрнымъ и для многочлена, имѣющаго однимъ членомъ больше.

Но прямое возвышеніе въ кубъ показало, что онъ вѣренъ для четырехчлена, слѣд. онъ вѣренъ и для пятичлена; а потому и для шестичлена, и т. д. Общность закона такимъ образомъ доказана.

Сокращенно законъ этотъ выражается формулою:

$$(a+b+c+d+\ldots\ldots+i+h+k)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc.$$

118. Сгруппировавъ иначе члены второй части, можно написать:

$$(a+b+c+\ldots\ldots+i+h+k)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3\,(a+b)^2c+$$
$$+\,3\,(a+b)c^2+c^3+3\,(a+b+c)^2d+\ldots\ldots+k^3.$$

Въ этой формѣ теорема примѣняется при извлеченіи кубичныхъ корней изъ многочленовъ.

119. Примѣръ. Найти $(5x^3-3ax^2+2a^2x-a^3)^3$.

Примѣняя правило § 117, найдемъ:

$$\begin{array}{l}
125x^9-27a^3x^6+8a^6x^3-a^9 \\
-225a\,x^8+150a^2x^7-75a^3x^6 \\
+135a^2x^7+54a^4x^5-27a^5x^4 \\
+60a^4x^5-36a^5x^4-12a^7x^2 \\
+15a^6x^3-9a^7x^2+6ax^8-180a^3x^6+90a^4x^5-60a^5x^4+36a^6x^3.
\end{array}$$

Сдѣлавъ приведеніе и расположивъ члены по убывающимъ степенямъ буквы x, получимъ:

$$125x^9-225ax^8+285a^2x^7-282a^3x^6+204a^4x^5-123a^5x^4+59a^6x^3-21a^7x^2$$
$$+\,6a^8x-a^9.$$

120. Задачи.

Выполнить указанныя дѣйствія въ примѣрахъ:

1. $(2a^2b^3x^4)^7$.
2. $(6a^2bc^3x^5)^3$.
3. $(5a^3b^2x^4)^4$.
4. $(-3a^2b^3x)^4$.

5. $(-3a^2b^3x)^5$.

6. $(-x)^3.(-x)^4$.

7. $(-y)^{2n+1}.(-y)^3$.

8. $(-a)^{2m-1}.(-a)^5$.

9. $(-x)^{2n+1}.(-x)^{2m-1}$.

10. $(-x)^{2m}.(-x)^7$.

11. $(-ab)^{2m}.(-ab)^{2n-1}$

12. $(-xy)^{2n-1}.(-xy)^3$.

13. $\left(-\frac{x}{y}\right)^7.\ \left(-\frac{x}{y}\right)^8$.

14. $\left(-\frac{p}{q}\right)^9\cdot\left(-\frac{q}{p}\right)^{10}$.

15. $\left(-\frac{x}{y}\right)^{2m}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)^{2m-1}$.

16. $\left(-\frac{a}{b}\right)^{2m-1}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)^{2m+1}$.

17. Показать, что при p — четномъ: $(a-b)^p=(b-a)^p$, и $(a-b)^{p+1}=-(b-a)^{p+1}$.

18. $(5x-6y)^p.(25x^2+36y^2)^p.(5x+6y)^p$.

19. $\left(\frac{m+n}{p-q}\right)^x\cdot\left(\frac{p+q}{m+n}\right)^x.\left(\frac{p-q}{m-n}\right)^x$.

20. $\left(\frac{4x^{p+1}}{5y^n}\right)^k\cdot\left(\frac{125y^{n-1}}{8x^p}\right)^k$.

21. $\left(\frac{m-p}{x-y}\right)^8\cdot\left(\frac{y-x}{p-m}\right)^{10}$.

22. $\left(\frac{8-a}{x-y}\right)^4\cdot\left(\frac{x-y}{a-8}\right)^3$.

23. $\left(\frac{c-d}{r-s}\right)^3\cdot\left(\frac{s-r}{d-c}\right)^7$.

24. $\left(\frac{x-y}{a-b}\right)^{2m}\cdot\left(\frac{b-a}{x-y}\right)^{2m+1}$.

25. $\left(\frac{m-n}{x-y}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{y-x}{n-m}\right)^{2n-1}$.

26. $\left(\frac{4-y}{m-1}\right)^{2m+1}\cdot\left(\frac{-5y}{y-4}\right)^{2m}\cdot\left(\frac{1-m}{4-y}\right)^2$.

27. $\left(\frac{a^2-b^2}{x^4-y^4}\right)^5\cdot\left(\frac{x^4-y^4}{b^2-a^2}\right)^7$.

28. $\left(\frac{a^2-b^2}{x^3-y^3}\right)^3\cdot\left(\frac{x^6-y^6}{b^2-a^2}\right)^4$.

29. $\left(\frac{a^4-b^4}{x^6-y^6}\right)^5\cdot\left(\frac{y^3-x^3}{b^2-a^2}\right)^7$.

30. $\left(\frac{m^8-n^8}{x^5-y^5}\right)^{2m}\cdot\left(\frac{y^{10}-x^{10}}{n^4-m^4}\right)^m\cdot\left(\frac{x^5-y^5}{m^4+n^4}\right)^m$.

31. $(7a^2x^{n-2}y^{m+1})^3$.

32. $\left(\frac{3xy^3}{4m^2n^5}\right)^3$.

33. $\left(\frac{4a^nb^{n-1}}{3x^{2n}y^{3n-1}}\right)^3$.

34. $\left(\frac{4a^{n-1}b^2c^{3-m}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2\cdot\frac{3xy^{2n-2}z^4}{2a^nb^2c^{2-m}}$.

35. $\left[\left(\frac{m^5n^3}{p^2q^2}\right)^3\cdot\left(\frac{mq^3}{n}\right)^4\right]:\left[\left(\frac{m^3n}{p^2q^3}\right)^5:\left(\frac{m^2q^3}{n^2p}\right)^6\right]$.

36. $\left[\left(\frac{a^4b^3}{c^2x^3}\right)^5:\left(\frac{ax^3}{bc^4}\right)^4\right]:\left[\left(\frac{ab^3}{c^2x^3}\right)^6:\left(\frac{a^2x^3}{b^2c^3}\right)^5\right]$.

37. $\frac{(64m^2-49n^2)^q}{(8m-7n)^q}$.

38. $\left(\frac{a+b}{c}\right)^{3m+1}\cdot\left(\frac{cd}{a+b}\right)^{2m-2}\ \left(\frac{a+b}{df}\right)^{4m-7}\cdot f^{2m}\Big)$.

39. $(5x^3y - 3x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4)^2$.

40. $(4x^3 + 7x^2y - 5xy^2 + y^3)^2$.

41. $(7a^4 + 3a^3b + 5a^2b^2 - 2ab^3 - 3b^4)^2$.

42. $\left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3}x^4y^2 + \frac{3}{4}x^2y^4 - y^6\right)^2$.

43. $(5ax^3 + 3a^2x^2 + 4a^3x + 2a^4)^2$.

44. $(1 + 3x + 3x^2 + x^3)^2 + (1 - 3x + 3x^2 - x^3)^2$.

45. $(2a^m - 3b^{n+1} - 4c^{2p})^2$.

46. $(x^{2n+1} - 2y^{3m+2} + z^{m+n})^2$.

47. $(1 + 2x + x^2)^3$.

48. $(3a^2 + 4ab - 2b^2)^3$.

49. $(x^2 + px + q)^3$.

50. $(x^3 + 2x^2y - 2xy^2 - y^3)^3$.

ГЛАВА XI.

Извлеченіе корня.

Опредѣленіе.—Правило знаковъ.—Правило показателей.—Корень изъ произведенія и дроби.—Извлеченіе корня изъ одночленовъ.—Задачи.

121. Опредѣленіе. — Мы видѣли, что *корнемъ n-го порядка изъ A называется такое количество r, которое, будучи возвышено въ n-ую степень, дастъ A.* — Выражая это количество знакомъ $\sqrt[n]{A}$, имѣемъ, по опредѣленію, два равенства:

$$\sqrt[n]{A} = r \text{ и } r^n = A,$$

имѣющія одинаковое значеніе.

Символъ $\sqrt[n]{\ }$ называется *радикаломъ порядка n*; n — *показателемъ* корня; если показатель n равенъ 2, его не пишутъ.

Дѣйствіе нахожденія корня называется *извлеченіемъ корня.*

Въ этой главѣ мы займемся выводомъ основныхъ правилъ извлеченія корня *цѣлаго положительнаго порядка.*

122. Правило знаковъ. — Слѣдуетъ разсмотрѣть 4 случая, смотря по тому, будетъ ли подкоренное количество положительное, или отрицательное, а показатель корня — четный или нечетный.

1. *Корень четнаго порядка изъ положительнаго количества имѣетъ два значенія, одинаковыя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знаку.* —

Такъ квадратный корень изъ $+9$ имѣетъ двѣ величины: $+3$ и -3. Та и другая удовлетворяетъ данному выше опредѣленію корня, потому-что какъ $(+3)^2 = +9$, такъ и $(-3)^2 = +9$. Такимъ образомъ можно написать, что $\sqrt{+9} = \pm 3$ (читается: квадр. корень изъ $+9$ равенъ плюсъ или минусъ 3).

Корень четвертаго порядка изъ $+16$ также имѣетъ двѣ величины $+2$ и -2, потому-что какъ $(+2)^4=+16$, такъ и $(-2)^4=+16$. Итакъ $\sqrt[4]{+16}=\pm 2$. Вообще.

$$\sqrt[2n]{+a^{2n}}=\pm a,$$

потому-что и $(+a)^{2n}=+a^{2n}$, и $(-a)^{2n}=+a^{2n}$.

2. *Корень нечетнаго порядка изъ положительнаго количества есть величина положительная.*

Такъ $\sqrt[3]{+8}=+2$, потому-что $(+2)^3=+8$. Также $\sqrt[3]{+125}=+5$, такъ-какъ $(+5)^3=+125$. Очевидно, что первый корень не можетъ равняться -2, а второй -5, ибо эти числа не удовлетворяютъ опредѣленію корня; въ самомъ дѣлѣ, -2 и -5, будучи возвышены въ кубъ, даютъ -8 и -125. Вообще.

$$\sqrt[2n+1]{+a^{2n+1}}=+a,$$

потому-что $(+a)^{2n+1}=+a^{2n+1}$; между тѣмъ какъ $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$.

3. *Корень нечетнаго порядка изъ отрицательнаго количества есть величина отрицательная.*

Такъ $\sqrt[3]{-8}=-2$, потому-что $(-2)^3=-8$; $\sqrt[3]{-64}=-4$, ибо $(-4)^3=-64$. Вообще

$$\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}}=-a,$$

ибо $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$; между тѣмъ какъ $(+a)^{2n+1}=+a^{2n+1}$.

4. *Корень четнаго порядка изъ отрицательнаго количества есть величина мнимая.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется извлечь $\sqrt{-25}$. Искомый корень, еслибъ онъ былъ возможенъ, по абсолютной величинѣ долженъ быть равенъ 5; но ни $+5$, ни -5, будучи возвышены въ квадратъ, не даютъ -25, такъ-что $\sqrt{-25}$ не можетъ быть выраженъ никакимъ положительнымъ, и никакимъ отрицательнымъ числомъ. Такія величины называютъ *мнимыми*. Въ противоположность имъ, обыкновенныя положительныя и отрицательныя количества, съ которыми мы до сихъ поръ имѣли дѣло, называются *дѣйствительными*. —

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что правило знаковъ при извлеченіи корня можетъ быть выражено такъ:

Корень нечетнаго порядка имѣетъ знакъ подкореннаго количества; корень четнаго порядка изъ положительнаго количества имѣетъ двойной знакъ ($\pm$); *корень четнаго порядка изъ отрицательнаго количества есть величина мнимая.*

123. Относительно *двойнаго знака* необходимо замѣтить, что его слѣдуетъ ставить только тогда, когда происхожденіе подкореннаго количества остается неизвѣстнымъ. Напр., $a^2-2ab+b^2$ можетъ явиться какъ результатъ возвышенія въ квадратъ или разности $a-b$, или $b-a$, такъ что $\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\pm(a-b)$. Но если требуется извлечь квадратный корень изъ $(a-b)^2$, то не должно полагать $\sqrt{(a-b)^2}=\pm(a-b)$, но приписывать ему *только одно* значеніе $a-b$. Точно такъ же: $\sqrt{(+a)^2}=$ только $+a$, а $\sqrt{(-a)^2}$ только $-a$.

Относительно правила знаковъ при извлеченіи корня слѣдуетъ еще замѣтить, что данное нами въ предыдущемъ § правило — далеко неполное. Въ теоріи ура-

ненiй мы увидимъ, что кубичный корень изъ даннаго числа имѣетъ *три* различныя величины, корень четвертаго порядка — *четыре*, корень пятаго порядка — *пять* различныхъ значенiй и т. д.; вообще — корень изъ какого угодно числа имѣетъ столько различныхъ алгебраическихъ значенiй, сколько единицъ въ показателѣ корня.

Примѣчанiе. Въ предстоящемъ намъ изложенiи преобразованiй корней мы будемъ разсматривать только такъ называемыя *ариѳметическiя величины корней*, т. е. какъ *подкоренныя количества*, такъ и *самые корни* будемъ брать *положительные.* —

124. Правило показателей. — Пусть требуется извлечь корень n-*го* порядка изъ a^p, гдѣ a — нѣкоторое положительное количество, а n и p, сверхъ того, числа цѣлыя. Искомый корень долженъ представлять нѣкоторую степень буквы a; назвавъ неизвѣстнаго показателя этой степени черезъ x, имѣетъ равенство

$$\sqrt[n]{a^p}=a^x.$$

По опредѣленiю корня, послѣднiй, будучи возвышенъ въ степень, изображаемую показателемъ корня, даетъ подкоренное количество, а потому

$$(a^x)^n=a^p;$$

или, по правилу возвышенiя степени въ степень:

$$a^{xn}=a^p.$$

Чтобы это равенство было возможно, необходимо, чтобы показатели обѣихъ частей были равны, т. е. $xn=p$, откуда

$$x=\frac{p}{n}\cdot$$

Итакъ
$$\sqrt[n]{a^p}=a^{\frac{p}{n}}.$$

Отсюда правило: *для извлеченiя корня изъ степени должно показателя степени раздѣлить на показателя корня.* —

Такъ напр. $\sqrt{a^6}=a^3$; $\sqrt[3]{a^{12}}=a^4$; $\sqrt[4]{(a+b)^8}=(a+b)^2$; и т. д.

125. Корень изъ произведенiя. — Пусть требуется извлечь корень n-*го* порядка изъ произведенiя ABC. Докажемъ, что для этого *должно извлечь корень даннаго порядка изъ каждаго производителя отдѣльно, и результаты перемножить*, т. е. что

$$\sqrt[n]{ABC}=\sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{B}\times\sqrt[n]{C}\ldots.(1)$$

Дѣйствительно, если окажется, что вторая часть равенства, будучи возвышена въ n-*ую* степень, даетъ ABC, то, согласно съ опредѣленiемъ корня, этимъ и будетъ доказано, что она въ самомъ дѣлѣ представляетъ корень n-*го* порядка изъ ABC. Итакъ, возвышаемъ $\sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{B}\times\sqrt[n]{C}$ въ n-*ую* степень; замѣтивъ, что для этого каждаго производителя отдѣльно нужно возвысить въ n-*ую* степень и результаты перемножить, найдемъ

$$(\sqrt[n]{A}\times\sqrt[n]{B}\times\sqrt[n]{C})^n=(\sqrt[n]{A})^n.(\sqrt[n]{B})^n.(\sqrt[n]{C})^n.$$

Но, по опредѣленію корня, $(\sqrt[n]{A})^n = A, (\sqrt[n]{B})^n = B$ и $(\sqrt[n]{C})^n = C$, слѣд.

$$(\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C})^n = ABC,$$

чѣмъ справедливость теоремы (1) и доказана.

Очевидно, что способъ доказательства не зависитъ отъ числа множителей, а потому теорема доказана для какого угодно числа множителей подкореннаго выраженія.

126. Корень изъ дроби. Пусть требуется извлечь корень n-*го* порядка изъ дроби $\frac{A}{B}$. Докажемъ, что *для извлеченія корня изъ дроби должно извлечь его отдѣльно изъ числителя и знаменателя, и первый раздѣлить на второй*, т. е. что

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

Если окажется, что n-*ая* степень второй части равенства равна $\frac{A}{B}$, — этимъ справедливость равенства будетъ доказана. По правилу возвышенія въ степень дроби имѣемъ

$$\left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{A})^n}{(\sqrt[n]{B})^n};$$

но, по опредѣленію корня, $(\sqrt[n]{A})^n = A$, $(\sqrt[n]{B})^n = B$, слѣд. въ самомъ дѣлѣ

$$\left(\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}\right)^n = \frac{A}{B},$$

и испытуемое равенство доказано.

Теоремы о корнѣ изъ произведенія и дроби доказаны не прямымъ путемъ— способомъ повѣрки. Впрочемъ, что касается второй теоремы, то она можетъ быть доказана и прямымъ путемъ. Въ самомъ дѣлѣ пусть

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = x, \quad \ldots \quad (1)$$

возвысивъ обѣ части въ n-*ую* степень, имѣемъ

$$\frac{A}{B} = x^n,$$

откуда

$$A = B.x^n;$$

извлекая изъ обоихъ частей корень n-го порядка, и примѣняя ко второй части теорему § 125, найдемъ

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}.\sqrt[n]{x^n}, \text{ или } \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}.\, x.$$

Послѣднее равенство показываетъ, что x есть частное отъ раздѣленія $\sqrt[n]{A}$ на $\sqrt[n]{B}$, сл.

$$x = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$$

Подставляя вмѣсто x въ равенство (1) его величину, находимъ

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

127. Извлеченіе корня изъ одночлена. — Цѣлый одночленъ есть произведеніе, а потому для извлеченія изъ него корня нужно извлечь корень изъ каждаго производителя и результаты перемножить. Такъ

$$\sqrt[3]{\frac{64}{125}a^{12}b^6(x-y)^{21}}=\sqrt[3]{\frac{64}{125}}\times\sqrt[3]{a^{12}}\times\sqrt[3]{b^6}\times\sqrt[3]{(x-y)^{21}}=\frac{4}{5}a^4b^2(x-y)^7.$$

Отсюда правило: *Чтобы извлечь корень изъ одночлена должно извлечь его изъ коэффиціента, а показателей всѣхъ буквенныхъ множителей раздѣлить на показателя корня.*

При извлеченіи корня изъ дроби слѣдуетъ, примѣняя это правило, извлечь требуемый корень отдѣльно изъ числителя и знаменателя, и первый раздѣлить на второй. Такъ

$$\sqrt[5]{\frac{32a^{10}b^{15}}{(c^2-d^2)^5}}=\frac{\sqrt[5]{32a^{10}b^{15}}}{\sqrt[5]{(c^2-d^2)^5}}=\frac{2a^2b^3}{c^2-d^2}.$$

128. Задачи.

Извлечь квадратный корень изъ:

1. $4a^2b^4c^6$; $49x^4y^6z^2$; $100a^8b^{12}c^{10}$; $\frac{9a^2x^4y^6}{25z^2}$; $\frac{49x^2y^4}{64a^2}$; $\frac{25(x^2-y^2)^{10}}{16a^2c^{12}}$.
2. m^2+n^2-2mn; $1-2x+x^2$; $(-x)^2$; $(-13)^2$; x^4.

Извлечь кубическій корень изъ:

3. $-\frac{8a^3y^6}{27x^9}$; $\frac{64b^6c^9}{125a^{12}}$; $-\frac{216a^3b^3c^{15}}{343}$; -8; -27; $-\frac{1}{512}$.

Извлечь корни, указанные въ слѣдующихъ примѣрахъ:

4. $\sqrt[3]{-(a-b)^3}$; $\sqrt[3]{-(5p-6q)^3}$; $\sqrt[3]{(-a)^3.(-c)^6(-d)^{12}}$; $\sqrt[4]{\frac{16x^4y^8}{625a^{12}}}$; $\sqrt[5]{\frac{32a^5b^{10}}{c^{15}}}$; $\sqrt[6]{\frac{64x^{12}y^6}{729z^{18}}}$.
5. Вычислить $x+\sqrt{x}$, если $x=(+4)^2$, и $x=(-5)^2$.
6. Вычислить $x-\sqrt{x}$ при $x=(-4)^2$ и при $x=(+5)^2$.
7. Вычислить $x-(a+b)\sqrt{x}$ при $x=(b-a)^2$ и при $x=(-2a)^2$.
8. Вычислить $x+\sqrt{25+x}$ при $x=(-14)^2-25$.
9. Вычислить $x+2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)+x}+10ab$ при $x=(b-3a)^2-3(a^2+b^2)$.

ГЛАВА XII.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ чиселъ и многочленовъ.

Опредѣленія; предварительныя теоремы.—Извлеченіе квадратнаго корня: изъ цѣлаго числа и изъ дроби съ точностью до 1 и до $\frac{1}{n}$.— Сокращенный способъ. Задачи. — Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочленовъ; приложенія.—Задачи.

129. Когда число есть квадратъ другаго числа, то первое называется *точнымъ квадратомъ*, а второе *точнымъ квадратнымъ корнемъ* изъ перваго.

Такъ, 49 есть точный квадратъ 7-ми; число же 7 — точный квадратный корень изъ 49.

130. Теорема. *Когда цѣлое число не есть точный квадратъ, то квадратный корень изъ него не можетъ быть выраженъ точнымъ образомъ ни въ цѣлыхъ единицахъ, ни въ какихъ-либо доляхъ единицы.*

Пусть данный неточный квадратъ будетъ N. Такъ какъ цѣлое число N не есть квадратъ другаго цѣлаго числа, то очевидно, что квадратный корень изъ N не можетъ быть равенъ ни какому цѣлому числу. Посмотримъ, нельзя-ли выразить $\sqrt{N}$ точно нѣкоторою дробью $\frac{a}{b}$, которую всегда можно представлять приведенною къ виду *несократимой* дроби. Допустивъ возможность равенства

$$\sqrt{N}=\frac{a}{b}\ .\ .\ .\ .\ (1),$$

мы, возвысивъ обѣ его части въ квадратъ, нашли-бы

$$N=\frac{a^2}{b^2}.$$

Но дробь $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a.a}{b.b}$, сл. числитель ея содержитъ только тѣхъ множителей, которые находятся въ a, а знаменатель только тѣхъ, которые зключаются въ b; но a и b суть числа первыя между собою, слѣдовательно на a^2 и b^2 не имѣютъ общихъ множителей, а потому дробь $\frac{a^2}{b^2}$ несократима. Такимъ образомъ, допущеніе, выражаемое равенствомъ (1), привело къ ложному заключенію, что цѣлое число N равно несократимой дроби $\frac{a^2}{b^2}$, а потому это допущеніе невозможно.

Итакъ, квадратный корень изъ числа, не представляющаго точнаго квадрата, нельзя точно выразить ни повтореніемъ цѣлой единицы, ни повтореніемъ какой-либо ея доли. Такіе корни называютъ *несоизмѣримыми съ единицею*, въ отличіе отъ цѣлыхъ чиселъ и конечныхъ дробей, которыя можно точно выражать въ частяхъ единицы, и которыя называются поэтому *соизмѣримыми съ единицею*.

Такъ квадратные корни изъ чиселъ 2, 7, 10 и т. п. суть корни несоизмѣримые. Далѣе мы увидимъ, что такіе корни можно вычислять съ какою угодно точностью. Когда приближенный корень разнится отъ истинной величины меньше чѣмъ на 1, то онъ называется *точнымъ до единицы*.

131. Опредѣленія. *Квадратный корень изъ цѣлаго числа, точный до единицы, есть корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ этомъ числѣ, или этотъ корень, увеличенный на* 1.

Пусть N есть неточный квадратъ, и A^2 — наибольшій квадратъ, заключающійся въ этомъ числѣ; въ такомъ случаѣ, очевидно, N будетъ содержаться между двумя послѣдовательными квадратами: A^2 и $(A+1)^2$, т. е.

$$(A+1)^2>N>A^2,$$

откуда, извлекая корни, находимъ:

$$A+1>\sqrt{N}>A.$$

Но разность между $A+1$ и A равна единицѣ; а потому разности между $\sqrt{N}$ и A — съ одной стороны, и между $A+1$ и $\sqrt{N}$ — съ другой, меньше 1; слѣдовательно, какъ A, такъ и $A+1$ выражаютъ $\sqrt{N}$ съ точностью до 1. Но A есть квадратный корень изъ A^2, т. е. изъ наибольшаго квадрата, содержащагося въ N, а $A+1$ есть этотъ корень, увеличенный на 1: этимъ данное опредѣленіе оправдывается.

A называется квадратнымъ корнемъ изъ N — *точнымъ до 1 по недостатку*, $A+1$ — *по избытку*.

Такъ, замѣчая, что наибольшій квадратъ, содержащійся въ 109, есть 100, заключаемъ, что квадратный корень изъ 109, точный до 1 по недостатку есть 10, а по избытку — 11.

132. *Остаткомъ* квадратнаго корня называютъ разность между даннымъ числомъ и квадратомъ его корня, точнаго до 1 по неоостатку. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ остатокъ корня будетъ

$$109-10^2 \text{ или } 9.$$

Вообще, если данное число есть N, и корень изъ него, точный до 1 по недостатку, равенъ A, а остатокъ R, то, по опредѣленію остатка, $R=N-A^2$, откуда

$$N=A^2+R.$$

Въ частномъ случаѣ, когда число есть точный квадратъ, остатокъ корня равенъ нулю.

Теорема. *Остатокъ корня не больше удвоеннаго квадратнаго корня изъ даннаго числа, точнаго до 1 по недостатку.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A есть квадратный корень изъ N, точный до 1 по недостатку. Въ такомъ случаѣ N содержится между A^2 и $(A+1)^2$, а потому разность между N и A^2 меньше разности $(A+1)^2-A^2$ или $2A+1$; слѣд.

$$N-A^2<2A+1$$

или

$$N-A^2\leqslant 2A,$$

ибо $N-A^2$ — число цѣлое. Но $N-A^2$ есть ничто иное какъ R; слѣд.

$$R\leqslant 2A.$$

Слѣдствіе. — *Если между цѣлыми числами* N, A *и* R, *имѣютъ мѣсто соотношенія:*

$$N=A^2+R \text{ и } R\leqslant 2A,$$

то это значитъ, что A *есть квадратный корень изъ* N, *точный до* 1 *по недостатку, и что* R *есть остатокъ этого корня.*

Въ самомъ дѣлѣ, равенство доказываетъ, что A^2 содержится въ N, а неравенство доказываетъ, что N не содержитъ въ себѣ $(A+1)^2$, ибо R не составляетъ $2A+1$.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлаго числа съ точностью до единицы.

133. Теорію этого дѣйствія мы подраздѣляемъ на три случая.

134. Первый случай. Данное число меньше 100.

Въ этомъ случаѣ квадратный корень находятъ при помощи таблицы квадратовъ первыхъ девяти чиселъ.

Числа:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Квадраты:	1	4	9	16	25	36	49	64	81.

Пусть, напр., требуется найти квадратный корень изъ 58 съ точностью до 1. Изъ таблицы квадратовъ видимъ, что 58 содержится между 49 и 64, сл. $\sqrt{58}$ заключается между 7 и 8, поэтому искомый корень, точный до 1 по недостатку, равенъ 7, а остатокъ $=58-49$ или 9.

135. Второй случай. — Данное число содержится между 100 и 10000.

Пусть данное число будетъ 7865; оно содержится между 100 и 10000 или между 10^2 и 100^2, а потому квадратный корень изъ 7865 заключается между 10 и 100. Но между этими предѣлами находятся двузначныя числа, а потому искомый корень, точный до 1, состоитъ изъ десятковъ и единицъ: пусть число десятковъ его будетъ d, а простыхъ единицъ u; искомый корень выразится формулою $10d+u$, и если остатокъ корня назовемъ буквою R, то замѣчая, на основаніи § 132, что данное число равно квадрату своего корня, точнаго до 1 по недостатку, $+$ остатокъ, получимъ:

$$7865=(10d+u)^2+R=100d^2+2.10d.u+u^2+R\ldots(1)$$

Чтобы найти цифру (d) десятковъ корня, замѣчаемъ, что слагаемое $100d^2$, какъ цѣлое число, оканчивающееся двумя нулями, есть цѣлое число сотенъ, и потому должно содержаться въ 7800 суммы, а слѣд. d^2 содержится въ 78. Докажемъ, что квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ 78, и дастъ намъ d. Въ самомъ дѣлѣ, изъ таблицы квадратовъ видимъ, что 78 заключается между 64 и 81, или между 8^2 и 9^2.

$$8^2<78<9^2.$$

Помножая эти числа на 100, мы не измѣнимъ неравенствъ; сл.

$$\overline{80}^2<7800<\overline{90}^2$$

Если къ 7800 прибавимъ 65, то этимъ не измѣнимъ смысла неравенствъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $\overline{80}^2$ меньше 7800, то оно и подавно будетъ меньше 7865. Но 7865 будетъ также меньше $\overline{90}^2$. Дѣйствительно 7800 и $\overline{90}^2$ (или 8100) суть два цѣлыя числа сотенъ; и какъ второе больше перваго, то оно превосходитъ первое, по крайней мѣрѣ, на одну сотню. Слѣд. прибавляя къ первому

65 — число меньше 100, получимъ результатъ, во всякомъ случаѣ, меньшій $\overline{90}^2$. Итакъ

$$\overline{80}^2 < 7865 < \overline{90}^2.$$

а отсюда, извлекая квадратный корень, получимъ:

$$80 < \sqrt{7865} < 90.$$

Эти неравенства показываютъ, что искомый корень больше 8 десятковъ, но меньше 9 десятковъ, т. е. что онъ содержитъ *цѣлыхъ десятковъ 8*, и, можетъ быть, нѣсколько простыхъ единицъ, число которыхъ никакъ не больше 9 (ибо величина корня меньше 9 десятковъ). Такимъ образомъ, $d = 8$, т. е. *цифра десятковъ корня равна квадратному корню изъ наибольшаго квадрата, содержащагося въ числѣ сотенъ даннаго числа.* —

Подставляя въ равенство (1) 8 вмѣсто d, найдемъ:

$$7865 = 6400 + 2.80u + u^2 + R,$$

а вычтя изъ обѣихъ частей по 6400:

$$1465 = 2.80u + u^2 + R \ldots\ldots\ldots (2)$$

Постараемся теперь опредѣлить цифру u единицъ корня. Для этого замѣтимъ, что слагаемое 2.80.u суммы 1465, т. е. удвоенное произведеніе 8 десятковъ на простыя единицы u корня, есть цѣлое число, оканчиваещееся нулемъ, и потому представляющее цѣлое число десятковъ. Число $2.80u$ заключается, поэтому, необходимо въ 146 десяткахъ суммы. Но въ составъ этихъ 146 десятковъ могутъ входить также десятки отъ слагаемаго u^2 (квадрата единицъ корня) и отъ возможнаго остатка R. Въ виду этого мы не можемъ утверждать, что членъ $2.80u$ равняется 1460: онъ можетъ быть и меньше числа 1460. Итакъ:

$$2.80u \leqslant 1460.$$

Сокративъ на 10 и раздѣливъ обѣ части на 2×8, получимъ

$$u \leqslant \frac{146}{2.8}.$$

Цифра единицъ u есть число цѣлое, а потому изъ послѣдняго неравенства заключаемъ, что раздѣливъ 146 на 2.8 и взявъ цѣлую часть частнаго, мы найдемъ число — равное цифрѣ единицъ корня, либо ее превышающее: однимъ словомъ, найдемъ высшій предѣлъ цифры единицъ корня. Замѣтивъ, что число 1465 называется первымъ остаткомъ, выводимъ изъ сказаннаго слѣдующее провило для нахожденія цифры единицъ корня: *отдѣливъ въ первомъ остаткѣ правую цифру запятой, и раздѣливъ находящееся влѣво отъ запятой число на удвоенную цифру десятковъ корня, въ цѣлой части частнаго будемъ имѣть высшій предѣлъ цифры единицъ корня.*

Въ данномъ случаѣ, цѣлая часть частнаго отъ раздѣленія 146 на 16 есть 9; заключаемъ, что цифра единицъ корня будетъ или 9, или число меньшее 9. Чтобы испытать, годится ли 9, мы должны корень 89 возвысить въ квадратъ и вычесть изъ даннаго числа: если вычитаніе будетъ возможно, то цифра 9 будетъ требуемая; въ противномъ случаѣ, т. е. если окажется, что $\overline{89}^2$ больше

Итакъ

$$a^2 \leqslant 786581 < (a+1)^2;$$

Помножая эти три числа на 100, найдемъ:

$$(10a)^2 \leqslant 78658100 < [(a+1).10]^2.$$

Придавъ къ среднему числу 43, мы этимъ нарушимъ возможное равенство, обративъ его въ неравенство $(10a)^2 < 78658143$, усилимъ первое неравенство, увеличивъ его большую часть; и, наконецъ, не нарушимъ втораго неравенства. Послѣднее обстоятельство объясняется тѣмъ, что 78658100 и $[(a+1).10]^2$ суть цѣлыя числа сотенъ, и какъ второе больше перваго, то оно превосходитъ первое по меньшей мѣрѣ на одну сотню; слѣдовательно, увеличивъ меньшее число на 43, т. е. менѣе чѣмъ на сотню, получимъ результатъ все-таки меньшій $[(a+1).10]^2$. Такимъ образомъ имѣемъ

$$(10a)^2 < 78658143 < [(a+1).10]^2,$$

откуда, извлеченіемъ квадр. корня, найдемъ

$$10a < \sqrt{78658143} < (a+1).10.$$

Эти неравенства доказываютъ, что искомый корень, будучи больше a десятковъ, содержитъ въ себѣ эти a десятковъ, и однакоже не содержитъ $a+1$ десятка, такъ какъ онъ меньше этого числа десятковъ (въ силу втораго неравенства). Слѣдовательно, опредѣляемый корень состоитъ изъ a десятковъ, и, можетъ быть, нѣсколькихъ простыхъ единицъ, число которыхъ не больше 9; однимъ словомъ, *цѣлыхъ десятковъ въ немъ будетъ* a. Замѣтивъ же, что a есть квадратный корень изъ a^2, т. е. изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ даннаго числа, заключаемъ, что теорема доказана.

139. Итакъ, число десятковъ квадратнаго корня изъ

78658143

есть квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ этого числа, или, что то же, — квадратный корень, точный до 1 по недостатку, изъ 786581.

Число десятковъ этого корня, или, что все равно, число сотенъ перваго, есть, на основаніи теоремы § 138, квадратный корень, точный до 1 по недостатку, изъ 7865.

Число десятковъ этого корня, т. е. число тысячъ перваго, по той же теоремѣ, есть квадратный корень, точный до 1 по недостатку, изъ 78.

Такимъ образомъ, отдѣляя отъ правой руки къ лѣвой по двѣ цифры, мы убѣдились, что искомый корень состоитъ изъ четырехъ цифръ, что для нахожденія старшей его цифры нужно извлечь, съ точностью до 1 по недостатку, квадратный корень изъ первой грани слѣва, и что число граней равно числу цифръ искомаго корня.

Прилагая теорему § 138, мы видимъ, что число сотенъ искомаго корня равно, точному до 1 по недостатку, квадратному корню изъ 7865; находимъ этотъ корень по правилу § 136:

78,65|8143|88
64
168 | 146,5
× 8 | 1344
121

88 есть число десятковъ квадратнаго корня изъ 786581; чтобы найти цифру единицъ этого корня, или, что то же, цифру десятковъ искомаго корня, нужно изъ 786581 вычесть квадратъ 880. Вычитаніе это, по частямъ сдѣланное, дало въ остаткѣ $12100+81$ или 12181 — число, которое находимъ, снеся 81 къ остатку перваго корня. Этотъ остатокъ заключаетъ, слѣдовательно, удвоенное произведеніе 88 десятковъ на единицы и квадратъ единицъ корня изъ 786581. Совершенно такимъ же образомъ, какъ было указано въ § 135, можно доказать, что, раздѣливъ число десятковъ 1218 новаго остатка на удвоенное число 88 десятковъ, т. е. на

$$2.88 \text{ или на } 176$$

мы найдемъ въ цѣлой части частнаго высшій предѣлъ цифры единицъ корня изъ 786581. Этотъ предѣлъ есть 6; для испытанія этой цифры, удвоиваемъ 88, къ 176 приписываемъ справа 6 и множимъ 1766 на 6. Произведеніе $1766 \times 6 = 10596$ не превышаетъ 12181, а потому цифра 6 годится.

Итакъ цифра десятковъ искомаго корня есть 886. Остается найти цифру единицъ. Для этого изъ заданнаго числа слѣдуетъ вычесть $\overline{8860}^2$. Вычитаніе 880 десятковъ въ квадратѣ сдѣлано и дало въ остаткѣ 1218100, который, въ совокупности съ 43 составляетъ 1218143. Вычитая отсюда остальныя двѣ части 8860^2 т. е. 10596 сотенъ, находимъ 158543.

Въ этомъ остаткѣ заключается удвоенное произведеніе 8860 на простыя единицы искомаго корня и квадратъ единицъ. Раздѣливъ число десятковъ этого остатка или 15854 на $2.886 = 1772$, въ цѣлой части этого частнаго будемъ имѣть высшій предѣлъ для цифры простыхъ единицъ искомаго корня. Предѣлъ этотъ есть 8; для испытанія цифры 8, приписываемъ ее къ 1772 и множимъ 17728 на 8. Произведеніе 143824 можно вычесть изъ 158543, сл. 8 есть дѣйствительно цифра единицъ искомаго корня. Итакъ, корень $= 8868$, а остатокъ $=$

$$158543 - 143824 = 16719.$$

Дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$\sqrt{78,65,81,43} = 8868$
64
168 | 146,5 . . . . 1-й частный остатокъ.
× 8 | 1344
1766 | 1218,1 . . . . 2-й » »
× 6 | 10596
17728 | 15854,3 . . . . 3 ій » »
× 8 | 141824
16719 . . . . окончат. остатокъ.

Окончательный остатокъ меньше $2 \times 8868 = 17736$, слѣдовательно 8868 есть дѣйствительно корень изъ даннаго числа, точный до 1 по недостатку.

Отсюда выводимъ

140. ***Правило извлеченія квадратнаго корня точнаго до 1 по недостатку изъ цѣлаго числа.*** —

Раздѣляютъ данное число на грани по двѣ цифры, отъ правой руки къ лѣвой (послѣдняя грань слѣва можетъ имѣть и одну цифру); число граней равно числу цифръ корня.

Чтобы найти первую цифру корня, извлекаютъ квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ первой грани (слѣва).

Чтобы найти вторую цифру корня, вычитаютъ изъ первой грани квадратъ первой цифры корня и къ остатку сносятъ слѣдующую грань: получаютъ такъ называемый первый частный остатокъ. Отдѣляютъ въ немъ одну цифру справа запятой, а стоящее влѣво отъ запятой число дѣлятъ на удвоенную первую цифру корня: частное дастъ или вторую цифру корня, или больше ея. Для повѣрки приписываютъ эту цифру съ правой стороны дѣлителя и полученное число умножаютъ на ту-же цифру: если произведеніе возможно вычесть изъ перваго частнаго остатка, то испытуемая цифра и будетъ второю цифрою корня; въ противномъ случаѣ ее уменьшаютъ на 1, и дѣлаютъ новую повѣрку такимъ же точно образомъ, какъ и первую; продолжаютъ такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока вычитаніе сдѣлается возможнымъ.

Чтобы найти третью цифру корня, къ остатку послѣдняго вычитанія сносятъ третью грань, и получаютъ второй частный остатокъ; отдѣляютъ въ немъ одну цифру справа запятой, а оставшееся влѣво отъ запятой число дѣлятъ на удвоенное число, образуемое первыми двумя цифрами корня: частное дастъ высшій предѣлъ для третьей цифры корня. Провѣряютъ цифру частнаго такимъ же образомъ какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Такимъ образомъ продолжаютъ поступать до тѣхъ поръ, пока не будутъ снесены всѣ грани, и не будетъ опредѣлена послѣднимъ дѣленіемъ цифра простыхъ единицъ корня и окончательный остатокъ.

141. Примѣры.

I. Найти $\sqrt{28164249}$.

$\sqrt{28,16,42,49} = 5307$

```
        25
 103 | 31,6
 ×3  | 30 9
 1060 | 74,2
  ×0  | 00 0
 10607 | 7424,9
    ×7 | 7424 9
              0
```

II. Извлечь $\sqrt{583749876429}$.

$\sqrt{58,37,49,87,64,29} = 764035$

```
          49
 146    | 93,7
 ×6     | 87 6
 1524   | 614,9
 ×4     | 609 6
 152803 | 53876,4
     ×3 | 45840 9
 1528065 | 803552,9
      ×5 | 764032 5
              39520 4
```

Такъ какъ остатокъ меньше удвоеннаго корня, то 764035 есть корень точный до 1 по недостатку; слѣд. 764036 есть корень, точный до 1 по избытку.

142. Опредѣлимъ, который изъ двухъ корней, точныхъ до 1, — корень по недостатку, или по избытку, точнѣе выражаетъ истинную величину несоизмѣримаго корня. Можно доказать, что если, найдя корень точный до 1 по недостатку, окажется, что остатокъ корня не болѣе самаго корня, то этотъ корень ошибоченъ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{2}$; если же остатокъ окажется больше корня, то корень по избытку будетъ ошибоченъ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{2}$.

Пусть данное число есть N; корень, точный до 1 по недостатку, пусть будетъ a; остатокъ выразится разностью $N - a^2$.

Первый случай. — Имѣемъ

$$a^2 < N < (a+1)^2;$$

по условію, остатокъ $N - a^2 \leqslant a$; слѣд. $N - a^2 < a + \frac{1}{4}$, откуда

$$N < a^2 + a + \frac{1}{4};$$

но $a^2 + a + \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$, а потому

$$N < \left(a + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Итакъ

$$a^2 < N < \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$$

откуда

$$a < \sqrt{N} < a + \frac{1}{2}.$$

Такъ какъ разность между крайними величинами равна $\frac{1}{2}$, то разность между $\sqrt{N}$ и a меньше $\frac{1}{2}$. Слѣд. a есть корень, точный до $\frac{1}{2}$ по недостатку, т. е. истинная величина $\sqrt{N}$ отличается отъ a менѣе, чѣмъ отъ $a+1$.

Второй случай. Если окажется, что

$$N - a^2 > a,$$

то заключаемъ отсюда, что $N - a^2 > a + \frac{1}{4}$, потому-что $(N - a^2)$ есть число цѣлое; слѣд.

$$N > a^2 + a + \frac{1}{4} \text{ или } N > \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$$

Итакъ

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 < N < (a+1)^2,$$

откуда

$$a + \frac{1}{2} < \sqrt{N} < a + 1.$$

Но разность между крайними числами равна $\frac{1}{2}$, слѣд. разность между $(a+1)$ и $\sqrt{N}$ меньше $\frac{1}{2}$. Заключаемъ, что $a+1$ отличается отъ корня изъ N меньше нежели на $\frac{1}{2}$, т. е. этотъ корень ближе лежитъ къ $a+1$, чѣмъ къ a.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что *выгоднѣе брать корень по избытку только тогда, когда остатокъ превышаетъ величину корня, взятаго по недостатку.*

Такъ въ примѣрѣ II, § 141, получился остатокъ меньшій корня по недостатку, и потому 764035 точнѣе выражаетъ величину искомаго корня, чѣмъ число 764036. Въ примѣрѣ § 139 остатокъ больше найденнаго корня, и потому число 8869 ближе къ истинной величинѣ корня чѣмъ число 8868.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ дробей съ точностью до 1.

143. Теорема. *Корень квадратный изъ несократимой дроби несоизмѣримъ, если его нельзя извлечь отдѣльно изъ числителя и знаменателя.*

Пусть $\frac{a}{b}$ есть данная несократимая дробь. равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=k,$$

гдѣ k — число цѣлое, невозможно, потому-что, возвысивъ обѣ части въ квадратъ, нашли-бы

$$\frac{a}{b}=k^2,$$

т. е. что несократимая дробь равна цѣлому числу. Итакъ, квадратный корень изъ несократимой дроби не можетъ быть выраженъ цѣлымъ числомъ. Посмотримъ, нельзя-ли его выразить дробью, т. е. не будетъ-ли возможно равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{c}{d},$$

гдѣ подъ $\frac{c}{d}$ всегда можно разумѣть дробь несократимую. Возвысивъ обѣ части испытуемаго равенства въ квадратъ, найдемъ

$$\frac{a}{b}=\frac{c^2}{d^2},$$

гдѣ $\frac{c^2}{d^2}$ есть дробь несократимая, такъ какъ, по условію, c и d — числа взаимно — первыя. Но двѣ несократимыя дроби могутъ быть равны только тогда,

когда числители ихъ равны между собою, а знаменатели — между собою *), т. е. когда $a = c^2$ и $b = d^2$, что означаетъ, что a и b должны быть точными квадратами. Итакъ, корень квадратный изъ несократимой дроби только тогда можетъ быть точно выраженъ дробью, когда *оба члена* данной дроби суть точные квадраты. Въ противномъ случаѣ корень изъ дроби нельзя точно выразить ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ; поэтому онъ будетъ число несоизмѣримое.

Такъ, квадратный корень изъ $\frac{64}{81}$ извлекается точно, потому-что 64 и 81 — точные квадраты. Имѣемъ

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9}.$$

$\sqrt{\frac{4}{5}}$, $\sqrt{\frac{2}{9}}$ и $\sqrt{\frac{5}{7}}$ — несоизмѣримы, потому-что у первой дроби знаменатель, у второй — числитель, а у третьей — оба члена суть неточные квадраты.

144. Теорема. — *Квадратный корень изъ дробнаго числа, точный до 1, есть квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа, или этотъ корень, сложенный съ 1.*

Пусть данное дробное число будетъ $a + b$, гдѣ a — цѣлое число, и b — правильная дробь. Разсмотримъ два случая.

Первый случай: a — точный квадратъ, напр. $a = r^2$; тогда, очевидно, что

$$a + b > r^2.$$

Съ другой стороны: $(a + b) < (r + 1)^2$, ибо, допустивъ противное, т. е. что $a + b \geqslant (r + 1)^2$, нашли бы: $a + b \geqslant r^2 + 2r + 1$; отнимая отъ обѣихъ частей по-ровну — отъ первой a, и отъ второй r^2, получимъ: $b \geqslant 2r + 1$, т. е. что правильная дробь больше 1. Итакъ:

$$(r + 1)^2 > a + b > r^2;$$

откуда, извлеченіемъ корня изъ всѣхъ трехъ чиселъ, находимъ:

$$r + 1 > \sqrt{a + b} > r.$$

---

*) Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{a^1}{b^1}$ будутъ двѣ несократимыя дроби, и посмотримъ, при какихъ условіяхъ возможно равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1} \ldots \text{(1)}.$$

Опредѣляя a, имѣемъ: $a = \frac{a^1 b}{b^1}$; такъ какъ a — число цѣлое, то $a^1 b$ должно дѣлиться на b^1; но a^1 не дѣлится на b^1, сл. b должно дѣлиться на b^1. Опредѣляя изъ (1) a^1, имѣемъ: $a^1 = \frac{ab^1}{b}$, откуда такимъ же точно образомъ заключаемъ, что b^1 должно дѣлиться на b. Но два числа только тогда могутъ дѣлить взаимно другъ друга, когда они равны; слѣд. $b = b^1$. Но въ такомъ случаѣ изъ равенства (1) слѣдуетъ, что и $a = a^1$. Итакъ, чтобы двѣ несократимыя дроби были равны, необходимо, чтобы числители ихъ были равны и знаменатели. Это условіе, очевидно, есть и вполнѣ достаточное.

Разность крайнихъ чиселъ: $r+1$ и r равна 1, а потому

$$\sqrt{a+b}-r<1 \text{ и } (r+1)-\sqrt{a+b}<1,$$

слѣд. какъ r, такъ и $r+1$ выражаютъ величину $\sqrt{a+b}$ съ ошибкою, меньшею 1; но r есть квадратный корень изъ a, а $r+1$ — этотъ корень $+1$, сл. для этого случая теорема доказана.

Второй случай: a — неточный квадратъ, и пусть наибольшій квадратъ, содержащійся въ a, будетъ r^2; въ такомъ случаѣ

$$r^2<a<(r+1)^2.$$

По первому неравенству: $a>r^2$, а потому и подавно

$$a+b>r^2.$$

Въ силу втораго неравенства, изъ двухъ цѣлыхъ чиселъ: $(r+1)^2$ и a, первое больше втораго, сл. оно больше, по крайней мѣрѣ, на 1; а потому разность ихъ больше правильной дроби b:

$$(r+1)^2-a>b, \text{ откуда}$$
$$(r+1)^2>a+b.$$

Итакъ, имѣемъ:

$$(r+1)^2>a+b>r^2;$$

извлекая квадратный корень, находимъ:

$$(r+1)>\sqrt{a+b}>r,$$

откуда опять заключаемъ, что такъ-какъ $(r+1)-r=1$, то

$$(r+1)-\sqrt{a+b}<1 \quad \text{и} \quad \sqrt{a+b}-r<1,$$

а потому числа r и $r+1$ выражаютъ $\sqrt{a+b}$ съ ошибкою, меньшею 1. Но r есть корень изъ цѣлой части a числа $a+b$, точный до 1 по недостатку, а $r+1$ — этотъ корень $+1$, слѣд. теорема доказана и для втораго случая. Отсюда

145. *Правило. Для извлеченія квадратнаго корня изъ дробнаго числа точно до 1, слѣдуетъ отбросить дробь и извлечь, съ точностью до 1, корень изъ цѣлой части.* —

Примѣчаніе. Такъ какъ у правильной дроби цѣлая часть равно нулю, то очевидно изъ предыдущаго, что квадратный корень изъ такой дроби, точный до 1 равенъ: 0 — по недостатку, и 1 — по избытку.

Примѣры I. Найти $\sqrt{72\frac{41}{52}}$ точно до 1.

Откидывая дробь, извлекаемъ $\sqrt{72}$ съ точностью до 1; находимъ, что корень изъ данной дроби, съ требуемой точностью, равенъ: 8 — по недостатку, и 9 — по избытку.

II. Найти $\sqrt{761,215}$ съ точностью до 1.

Откидывая дробь, извлекаемъ $\sqrt{761}$ съ требуемою точностью.

```
        √7,61 = 27
          4
   47 │36,1
   ×7 │329
        32
```

Заключаемъ, что искомый корень равенъ: 27 — по недостатку, и 28 — по избытку.

III. Найти, съ точностью до 1, $\sqrt{\frac{3417,31}{0,452}}$.

Прежде всего нужно выполнить указанное дѣленіе, ограничиваясь нахожденіемъ цѣлой части частнаго, и извлечь изъ нея корень съ точностью до 1. Дѣйствіе располагаютъ такъ:

```
3417310            │452
3164               │75,60 = 86.
 2533               64
 2260        166 │1160
  2731        ×6 │ 996
  2712              164
    190
```

Итакъ, искомый корень равенъ: 86 — по недостатку, и 87 — по избытку.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ цѣлыхъ чиселъ и изъ дробей съ точностью до $\frac{1}{n}$. —

146. Извлечь квадратный корень изъ цѣлаго или дробнаго числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ значитъ найти такую приближенную величину для искомаго корня, которая отличалась-бы отъ его истинной величины менѣе чѣмъ на $\frac{1}{n}$.

Пусть требуется извлечь $\sqrt{A}$, гдѣ A — цѣлое или дробное число, представляющее неточный квадратъ, съ точностью до $\frac{1}{n}$, причемъ дробь $\frac{1}{n}$ называется степенью приближенія. Помноживъ и раздѣливъ $\sqrt{A}$, на n, мы не измѣнимъ его величины, слѣд.

$$\sqrt{A} = \frac{n\sqrt{A}}{n}$$

Но $n = \sqrt{n^2}$; поэтому числителя можемъ представить въ видѣ $\sqrt{n^2} \times \sqrt{A}$, или, по правилу извлеченія корня изъ произведенія, въ видѣ $\sqrt{An^2}$.

Такимъ образомъ

$$\sqrt{A}=\frac{\sqrt{An^2}}{n},$$

гдѣ An^2— неточный квадратъ, потому что таково A. Извлекаемъ, по извѣстнымъ уже намъ правиламъ, $\sqrt{An^2}$ съ точностью до 1; найдемъ двѣ величины — r по недостатку, и $r+1$ по избытку, такъ что

$$r+1>\sqrt{An^2}>r.$$

Раздѣливъ эти три числа на n, и замѣтивъ что $\frac{\sqrt{An^2}}{n}=\sqrt{A}$, найдемъ

$$\frac{r+1}{n}>\sqrt{A}>\frac{r}{n}.$$

Разность между крайними числами, $\frac{r+1}{n}-\frac{r}{n}$, равна $\frac{1}{n}$, слѣд. каждая изъ разностей: $\sqrt{A}-\frac{r}{n}$ и $\frac{r+1}{n}-\sqrt{A}$, меньше $\frac{1}{n}$; это значитъ, что каждая изъ дробей: $\frac{r}{n}$ и $\frac{r+1}{n}$ выражаетъ величину $\sqrt{A}$ съ ошибкою, меньшею $\frac{1}{n}$. Отсюда выводимъ

147. *Правило. Чтобы изъ даннаго цѣлаго или дробнаго числа извлечь квадратный корень съ точностью до $\frac{1}{n}$, нужно умножить это число на квадратъ знаменателя степени приближенія, изъ полученнаго произведенія извлечь квадратный корень съ точностью до 1, и раздѣлить его на знаменателя степени приближенія.*

Примѣры. I. Найти $\sqrt{32\frac{7}{13}}$ съ точностью до $\frac{1}{273}$.

По правилу должны $32\frac{7}{13}$ умножить на $(273)^2$, что даетъ 2425059; извлечь изъ этого числа квадратный корень съ точностью до 1, и раздѣлить его на 273. Квадратный корень изъ 2425059, точный до 1 по недостатку, есть 1557, а по избытку — 1558; раздѣливъ тотъ и другой на 273, найдемъ; $5\frac{192}{273}$ и $5\frac{193}{273}$.

Такимъ образомъ $\sqrt{32\frac{7}{13}}$ заключается между числами $5\frac{192}{273}$ и $5\frac{193}{273}$, отличаясь отъ каждаго изъ нихъ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{273}$.

II. Найти $\sqrt{3}$ съ точностью до 0,001.

Помноживъ 3 на 1000^2 извлекаемъ $\sqrt{3000000}$ до 1; получимъ числа: 1732 и 1733. Раздѣливъ каждое на 1000, найдемъ

$$1{,}732 \text{ и } 1{,}733.$$

Первая дробь выражаетъ $\sqrt{3}$ съ точностью до 0,001 по недостатку, вторая — съ тою же точностью по избытку.

III. Найти

$$\sqrt{\frac{3,1415926}{0,53}}$$

съ точн. до $\frac{1}{100}$.

Помноживъ подкоренное число на 100^2, извлекаемъ квадратный корень изъ $\frac{31415,926}{0,53}$ съ точностью до 1. Цѣлая часть частнаго есть 59275, а корень изъ нея, точный до 1 по недостатку, есть 243, а по избытку 244. Раздѣливъ каждый изъ нихъ на 100, получимъ для искомыхъ приближенiй, точныхъ до $\frac{1}{100}$, числа:

2,43 (по нед.) и 2,44 (по изб.)

Сокращенный способъ извлеченiя квадратнаго корня.

148. Предыдущiя правила показываютъ, что извлеченiе квадратнаго корня всегда приводится къ извлеченiю его изъ цѣлаго числа съ точностью до 1. Это послѣднее дѣйствiе дѣлается тѣмъ сложнѣе, чѣмъ больше цифръ содержитъ подкоренное число; въ такихъ случаяхъ дѣйствiе значительно упрощается при помощи такъ называемаго *сокращеннаго способа*.

Пусть будетъ A цѣлое число, изъ котораго требуется извлечь квадратный корень съ точностью до 1. Искомый корень можетъ имѣть или *нечетное*, или *четное* число цифръ.

1-й случай: корень имѣетъ нечетное число цифръ. Пусть въ немъ находится $2n+1$ цифръ; найдемъ обыкновеннымъ способомъ больше половины его цифръ, въ данномъ случаѣ $n+1$ цифръ, и буквою a обозначимъ число, образуемое этими цифрами, сопровождаемыми столькими нулями, сколько цифръ осталось найти, т. е. n нулями (напр., если корень долженъ содержать 5 цифръ и найденныя три первыя его цифры будутъ 234, то буквою a мы обозначаемъ число 23400); такимъ образомъ, a будетъ число $(2n+1)$ — значное. Далѣе, назовемъ буквою x то, что слѣдуетъ придать къ a, чтобы получить истинный корень (x состоитъ изъ цѣлой части, имѣющей n цифръ и, можетъ быть, еще изъ несоизмѣримой десятичной дроби); полный корень выразится суммою $a+x$. Наша цѣль — дать правило для вычисленiя цѣлой части x-са, т. е. для нахожденiя x съ точностью до 1 сокращеннымъ путемъ.

По опредѣленiю корня имѣемъ:

$$A=(a+x)^2=a^2+2ax+x^2,$$

гдѣ a уже извѣстно; вычтя a^2 изъ обѣихъ частей, и раздѣливъ ихъ на $2a$, найдемъ

$$\frac{A-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

$A-a^2$ есть остатокъ послѣ нахожденiя части a корня (назовемъ его буквою R);

раздѣливъ его, какъ указываетъ формула, ни $2a$, назовемъ частное этого дѣленія буквою q, а остатокъ — r, такъ что

$$\frac{R}{2a}=q+\frac{r}{2a},$$

подставимъ это выраженіе въ первую часть равенства (1); найдемъ;

$$q+\frac{r}{2a}=x+\frac{x^2}{2a},$$

откуда

$$x-q=\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}.$$

Докажемъ, что q и выражаетъ величину x съ ошибкою, меньшею 1. Такъ какъ разница между x и q выражается формулою $\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}$; то и слѣдуетъ доказать, что

$$\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}<1.$$

Дѣйствительно, такъ какъ r есть остатокъ дѣленія, въ которомъ $2a$ есть дѣлитель, а остатокъ меньше дѣлителя, то $\frac{r}{2a}<1$. Съ другой стороны, въ цѣлой части x находится n цифръ, а потому x меньше наименьшаго $(n+1)$ — значнаго числа 10^n; а слѣд. $x^2<10^{2n}$; затѣмъ, a есть $(2n+1)$ — значное число, сл. оно $\geqslant 10^{2n}$, а слѣд. $2a\geqslant 2.10^{2n}$. Составивъ двѣ дроби

$$\frac{x^2}{2a} \text{ и } \frac{10^{2n}}{2\times 10^{2n}},$$

и замѣчая, что числитель первой меньше числителя второй, а знаменатель первой равенъ или больше знаменателя второй, заключаемъ, что первая дробь меньше второй:

$$\frac{x^2}{2a}<\frac{10^{2n}}{2\times 10^{2n}}, \text{ или } \frac{x^2}{2a}<\frac{1}{2}.$$

Итакъ, каждая изъ дробей разности $\frac{r}{2a}-\frac{x^2}{2a}$ меньше 1, слѣд. и самая разность <1, т. е. ошибка, происходящая отъ замѣны x частнымъ q, если только ошибка эта существуетъ, непремѣнно меньше 1, такъ-что $a+q$ есть величина корня, точная до 1

2-й случай: корень имѣетъ четное число цифръ $2n$. — Найдемъ опять обыкновеннымъ способомъ больше половины всѣхъ цифръ корня, т. е. $n+1$ цифръ; остается найти $n-1$ цифръ. Въ цѣлой части x^{ca} находится $(n-1)$ — значное число, а потому x меньше наименьшаго n — значнаго числа, т. е. $x<10^{n-1}$, откуда $x^2<10^{2n-2}$. a есть $2n$ — значное число, слѣд. оно $=$ или $>$ наименьшаго $2n$ — значнаго числа, т. е. $a\geqslant 10^{2n-1}$, откуда $2a\geqslant 2.10^{2n-1}$. Итакъ

$$\frac{x^2}{2a}<\frac{10^{2n-2}}{2\times 10^{2n-1}}, \text{ или } \frac{x^2}{2a}<\frac{1}{2\times 10},$$

и заключеніе относительно q прежнее.

Если цѣлая часть корня, состоя изъ четнаго числа цифръ, имѣетъ первою цифрою 5 или больше 5, то достаточно обыкновеннымъ способомъ найти ровно

половину всѣхъ цифръ корня. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ $x < 10^n$, а потому $x^2 < 10^{2n}$; съ другой стороны a, какъ $2n$ — значное число, начинающееся цифрою 5 или большею, будетъ $\geqslant$ упятереннаго наименьшаго $2n$ — значнаго числа, т. е. $a \geqslant 5 \times 10^{2n-1}$, откуда $2a \geqslant 10.10^{2n-1}$, или $2a \geqslant 10^{2n}$, а слѣдовательно

$$\frac{x^2}{2a} < \frac{10^{2n}}{10^{2n}}, \text{ или } \frac{x^2}{2a} < 1.$$

Прежнее заключеніе относительно q и здѣсь имѣетъ мѣсто.

Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующее

Правило. — Для извлеченія квадратнаго корня изъ цѣлаго числа съ точностью до 1 сокращеннымъ способомъ, находятъ обыкновеннымъ способомъ болѣе половины всѣхъ цифръ корня, или же ровно половину, если, при четномъ числѣ цифръ корня, первая его цифра не меньше 5; остальныя цифры найдемъ, раздѣливъ полный остатокъ на удвоенную найденную часть корня. —

149. — Примѣръ. Найти квадратный корень съ точностью до 1 изъ числа

7316723456713.

Корень имѣетъ семь цифръ; находимъ четыре первыя прямымъ путемъ:

```
        √7,31,67,23,45,67,13 | 2704
         4
   47  | 33,1
   ×7  | 32 9
  5404 | 2672,3
   ×4  | 2161 6
          5107456713 | 5408000
          48672000   | 944
           24025671
           21632000            a = 2704000;
            23936713           R = 5107456713.
            21632000           q = 944.
             2304713           r = 2304713.
```

Найдя первыя четыре цифры корня (2704), находимъ съ точностью до 1 частное отъ раздѣленія полнаго остатка 5107456713 на удвоенный найденный корень 2704000, т. е. на 5408000. Это частное = 944; слѣд. искомый корень, точный до 1, есть

2704944.

150. По величинѣ частнаго q и остатка r дѣленія, можно всегда узнать, будетъ-ли найденный корень $a+q$ точный, имъ приближенный; и въ послѣднемъ случаѣ — опредѣлить, будетъ-ли онъ ошибоченъ по недостатку, или по избытку.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ равенство

$$A - a^2 = R, \text{ откуда } A = a^2 + R;$$

но $R = 2aq + r$, слѣдовательно

$$A = a^2 + 2aq + r.$$

Съ другой стороны

$$(a+q)^2 = a^2 + 2aq + q^2.$$

Отсюда:

1) Если $r > q^2$, то

$$a + 2aq + r > a^2 + 2aq + q^2,$$

или $$A > (a+q)^2,$$

откуда $$\sqrt{A} > a + q,$$

т. е. $a+q$ будетъ приближеніе, точное до 1 по недостатку.

2) Если $r = q^2$, то

$$a^2 + 2aq + r = a^2 + 2aq + q^2,$$

или $$A = (a+q)^2,$$

откуда $$\sqrt{A} = a + q,$$

т. е. $a+q$ есть точный корень изъ A.

3) Если, наконецъ, $r < q^2$, то

$$a^2 + 2aq + r < a^2 + 2aq + q^2,$$

или $$A < (a+q)^2,$$

откуда $$\sqrt{A} < a + q,$$

и потому $a+q$ есть приближеніе, точное до 1 по избытку.

Итакъ: корень $a+q$ будетъ приближенный по недостатку, точный, или же приближенный по избытку, смотря по тому, будетъ-ли остатокъ r дѣленія больше, равенъ или меньше квадрата частнаго.

Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ, остатокъ 2304713 больше квадрата числа 944; поэтому корень 2704944 ошибоченъ менѣе чѣмъ на 1 по недостатку.

151. Опредѣлимъ такъ называемый *остатокъ корня*, предполагая, что для нахожденія корня примѣняется сокращенный способъ; при этомъ различаемъ два случая, смотря потому, имѣетъ-ли найденный этимъ способомъ корень приближеніе по недостатку, или по избытку.

1. *$a+q$ есть приближеніе по недостатку.* Обыкновенный способъ далъ бы ту же величину, а потому, называя остатокъ корня буквою ρ, получимъ

$$\rho = A - (a+q)^2.$$

Замѣтивъ, что

$$A = a^2 + 2aq + r, \quad \text{и} \quad (a+q)^2 = a^2 + 2aq + q^2,$$

вычитая второе равенство изъ перваго, найдемъ:

$$A - (a+q)^2 = r - q^2,$$

т. е. $$\rho = r - q^2.$$

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ: *остатокъ корня равенъ избытку остатка отъ дѣленія надъ квадратомъ частнаго.*

2. *$a+q$ — приближеніе по избытку.* Обыкновенный способъ далъ бы для корня величину

$$a + q - 1.$$

Имѣя равенства

$$A = a^2 + 2aq + r, \quad \text{и} \quad (a+q-1)^2 = a^2 + 2a(q-1) + (q-1)^2,$$

находимъ, что остатокъ отъ обыкновенной операціи былъ бы

$$\rho = A - (a+q-1)^2 = r + 2a - q^2 + 2q - 1$$
$$= r + 2(a+q) - (q^2+1).$$

Заключаемъ, что въ данномъ случаѣ остатокъ корня найдется, если *къ остатку дѣленія придать удвоенный найденный сокращеннымъ способомъ корень, и изъ результата вычесть сумму квадрата частнаго съ единицей.* —

152. Сокращенный способъ, вмѣстѣ съ указанными замѣчаніями, даетъ средство находить сколько угодно цифръ корня. Пусть напр. требуется найти $\sqrt{2}$ съ неограниченнымъ приближеніемъ. Напишемъ справа отъ 2 вдвое больше нулей, чѣмъ сколько желаемъ найти десятичныхъ знаковъ, и вычислимъ три первыя цифры корня обыкновеннымъ способомъ.

```
       2,00.00.00.00.00.00.00.00.00.00.00.00.00.00.00 | 1,41
       1                                              |
  24  |10,0
  ×4  | 96
   281 |400
   ×1  |281
        119
```

Мы нашли 141 въ корнѣ и 119 въ остаткѣ. Такимъ образомъ, 141 суть три первыя цифры корня изъ 200000000; двѣ слѣдующія находимъ сокращеннымъ способомъ. Для этого нужно полный остатокъ, равный 1190000, раздѣлить на удвоенную найденную часть корня, т. е. на 28200

```
119000.0 | 28200
112800   | 42                  42
 62000                        ×42
 56400                         84
  5600                        168
 —1764                       1764
  3836
```

Находимъ въ частномъ 42 и въ остаткѣ 5600. Чтобы узнать, въ какую сторону ошибоченъ корень 14142, нужно полученный остатокъ сравнить съ квадратомъ частнаго: $5600 > 42^2$, сл. 14142 есть приближеніе по недостатку, и потому послѣднюю его цифру (2) уменьшать не слѣдуетъ.

Имѣя пять цифръ корня, можно сокращеннымъ способомъ найти слѣдующія четыре цифры. Для этого надо знать остатокъ, который дала бы обыкновенная операція послѣ нахожденія части 141420000 корня изъ 20000000000000000, т. е. остатокъ корня ρ. Такъ какъ $a + q = 14142$ есть приближеніе по недостатку, то $\rho = r - q^2 = 5600 - 1764 = 3836$. Приписавъ сюда 8 нулей, дѣлимъ полученное число на $2a = 282840000$

```
38360000|0000 |28284|0000          1356
28284                1356          1356
100760                             8137
 84852                            6780
 159080                          4068
 141420                         1356
  176600                        1838736.
  169704
   68960000
  —1838736
   67121264
```

Находимъ въ частномъ 1356, а въ остаткѣ 68960000. Такъ какъ этотъ остатокъ больше 1356^2, корень снова ошибоченъ по недостатку: онъ равенъ 141421356.

Зная девять цифръ корня, можемъ сокращеннымъ способомъ найти слѣдующія восемь; для этого опредѣляемъ остатокъ корня:

$$\rho = 68960000 - (1356)^2 = 67121264.$$

Приписавъ къ остатку корня 16 нулей, а къ удвоенному найденному корню 8 нулей, дѣлимъ

```
6712126400000000|00000000 |282842712|00000000
1055272160                  23730950
 2067440240
   875412560
    2688442400
     1428579920
       143663600
```

Въ частномъ мы нашли 23730950, и какъ остатокъ дѣленія больше квадрата частнаго, найденный результатъ ошибоченъ по недостатку; имѣемъ

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950,$$

съ точностію до 1 шестнадцатаго десятичнаго мѣста. Очевидно, можно продолжать такимъ образомъ находить сколько угодно новыхъ цифръ корня.

153. Извлеченіе квадратнаго корня изъ числа, мало разнящагося отъ 1. —

Возвысивъ въ квадратъ $1 + \frac{\varepsilon}{2}$, найдемъ: $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}$, результатъ, мало разнящійся отъ $1 + \varepsilon$, если ε есть весьма малая дробь; откинувъ $\frac{\varepsilon^2}{4}$, получимъ приблизительное равенство $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon$, откуда, извлекая изъ обѣихъ частей квадратный корень, найдемъ:

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

приблизительно. Опредѣлимъ предѣлъ погрѣшности этого приближенія, т. е. разности

$$\alpha = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sqrt{1+\varepsilon}.$$

Умноживъ и раздѣливъ это выраженіе на сумму

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\sqrt{1+\varepsilon},$$

находимъ:

$$\alpha=\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2-(1+\varepsilon)}{1+\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{1+\varepsilon}}=\frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{1+\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{1+\varepsilon}}.$$

Откинувъ въ знаменателѣ малыя дроби $\frac{\varepsilon}{2}$ и ε (подъ знакомъ корня), мы этимъ знаменателемъ уменьшимъ, а слѣд. выраженіе второй части увеличимъ, такъ-что будетъ

$$\alpha<\frac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{1+\sqrt{1}},\quad \text{или}\quad \alpha<\frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Отсюда заключаемъ, что *для извлеченія квадратнаго корня изъ числа* $1+\varepsilon$, *мало превышающаго 1, достаточно прибавить къ 1 половину избытка* ε: *найдемъ результатъ, точный до* $\frac{\varepsilon^2}{8}$ *по избытку.* —

Примѣръ. Найти приближенно $\sqrt{1,000694}$.

По правилу имѣемъ:

$$\sqrt{1,000694}=1+\frac{0,000694}{2}=1,000347$$

съ точностью до $\frac{7^2}{8.10^8}$ или до $\frac{1}{10^7}$. Заключаемъ, что ошибка не вліяетъ на послѣдній десятичный знакъ приближенія 1,000347.

154. Признаки неточныхъ квадратовъ. — Въ заключеніе укажемъ нѣкоторые признаки неточныхъ квадратовъ.

1. $(2n)^2=4n^2$, т. е. квадратъ всякаго четнаго числа $(2n)$ дѣлится на 4, а слѣд. обратно, четное число только тогда *можетъ быть* квадратомъ, когда оно дѣлится на 4. Само собою разумѣется, что изъ этого не слѣдуетъ, чтобы всякое число, дѣлящееся на 4, было необходимо точнымъ квадратомъ; такъ, 40 есть неточный квадратъ.

2. $(2n+1)^2=4n^2+4n+1$, т. е. всякое нечетное число имѣетъ квадратъ вида $4n^2+4n+1$, т. е. такой, который, будучи уменьшенъ на 1, дѣлится на 4; слѣд. обратно, нечетное число только тогда *можетъ быть* точнымъ квадратомъ, когда оно, уменьшенное на 1, дѣлится на 4.

3. Изъ умноженія цѣлыхъ чиселъ извѣстно, что произведеніе двухъ такихъ чиселъ оканчивается тою же цифрою, какою и произведеніе ихъ простыхъ единицъ. Но квадраты чиселъ 1,2,3, ...,9 оканчиваются цифрами 1,4,5,6,9, но не оканчиваются цифрами 2,3,7 и 8. Изъ этого слѣдуетъ, что всякое цѣлое число, оканчивающееся одною изъ цифръ: 2,3,7 и 8, не можетъ быть точнымъ квадратомъ. Здѣсь опять слѣдуетъ замѣтить, что если число оканчивается одною изъ цифръ: 1,4,5,6 и 9, то оно не есть необходимо точный квадратъ; такъ, 625 есть точный, а 15 — неточный квадратъ.

4. Если число оканчивается 5-ью, его квадратъ долженъ оканчиваться 25-ью. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая число какъ сумму десятковъ и простыхъ единицъ, находимъ, что квадратъ десятковъ оканчивается двумя нулями, удвоенное произведеніе десятковъ на единицы, въ данномъ случаѣ, будетъ оканчиваться также двумя нулями, сл. квадратъ числа, оканчивающагося 5-ью, необходимо оканчивается 25-ью. Слѣд., всякое число, оканчивающееся 5-ью, котораго предпослѣдняя цифра не есть 2, не м. б. точнымъ квадратомъ.

5. Квадратъ числа, оканчивающагося нулями, имѣетъ нулей вдвое больше, т. е. четное число ихъ. Слѣд., число, оканчивающееся нечетнымъ числомъ нулей, не есть точный квадратъ.

155. Задачи.

Извлечь квадратный корень изъ чиселъ:

1. 961. 2. 3136. 3. 4096. 4. 5625. 5. 6889. 6. 8649. 7. 9801. 8. 15376. 9. 45369. 10. 106929. 11. 207936. 12. 622521. 13. 185761. 14. 163216. 15. 40000. 16. 1841449. 17. 846398. 18. 2619761. 19. 2717741. 20. 1019918. 21. 67848169. 22. 6031936. 23. 25482304. 24. 97377424. 25. 150229108836. 26. 1848999439. 27. 15968016. 28. $\frac{1369}{25}$ 29. $\frac{2601}{196}$. 30. $\frac{4624}{1296}$. 31. $\frac{1681}{6889}$. 32. $\frac{5329}{324}$. 33. $\frac{576}{45369}$. 34. $\frac{99856}{784}$. 35. 13,69. 36. 5760,81. 37. 33708,96. 38. 227,7081. 39. 4762,104064. 40. 0,09. 41. 0,2209. 42. 0,013689. 43. 0,00056644. 44. $10955\frac{1}{9}$. 45. $750\frac{19}{25}$. 46. $14121\frac{13}{36}$. 47. $29355\frac{1}{9}$. 48. 0,010816. 49. 0,00008649.

Вычислить квадратный корень изъ слѣдующихъ чиселъ съ указаннымъ приближеніемъ:

50. 38 до $\frac{1}{5}$. 51. 46 до $\frac{1}{4}$. 52. 112 до $\frac{1}{8}$. 53. 95 до $\frac{1}{11}$. 54. 213 до 0,1. 55. 27 до 0,001. 56. 82 до $\frac{1}{100}$. 57. 315 до 0,0001. 58. 61 до 0,001. 59. 75 до 0,0001. 60. 18 до 0,00001.

61. Найти корни изъ чиселъ: α) 3; β) 5; γ) 7; δ) 11; ε) 12 съ пятью десятичными знаками.

62. Найти корни изъ чиселъ: α) $\frac{2}{3}$; β) 5,5; γ) $3\frac{5}{6}$; δ) 0,9; ε) 0,209 съ 6-ью десятичными знаками.

63. 1) $\frac{355}{113}$; 2) $\frac{1}{1719}$; 3) $97\frac{97}{99}$; 4) $\frac{103}{120}$; 5) 317,6; 6) 145,3 съ 5-ю десятичными знаками.

64. Приложить правило § 153 къ нахожденію приближенныхъ корней изъ чиселъ: 1) 1,00004; 2) 1,0003; 3) 1,00118; 4) 1,000708; 5) 1,000000556; 6) 1,00037; 7) 1,00000000013924.

65. Главныя планеты, вращающіяся вокругъ солнца, суть: Меркурій, Венера, Земля, Марсъ, Юпитеръ, Сатурнъ, Уранъ и Нептунъ. Ихъ среднія разстоянія отъ солнца суть: Меркурія — 0,3871; Венеры — 0,7233; земли — 1; Марса — 1,5237; Юпитера — 5,2028; Сатурна — 9,5389; Урана — 19,1826; Нептуна — 30,0370. Продолжительность сидерическаго обращенія земли вокругъ Солнца равно 365,2563744 сутокъ.

Вычислить времена сидерическихъ обращеній другихъ планетъ, зная, что, по третьему закону Кеплера, квадраты этихъ временъ относятся между собою какъ кубы среднихъ разстояній?

Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена.

156. Корень изъ многочлена только въ исключительныхъ случаяхъ извлекомъ, т. е. можетъ быть выраженъ въ формѣ раціональнаго многочлена.

Для возможности извлеченія квадратнаго корня изъ многочлена, послѣдній долженъ содержать не менѣе трехъ неприводимыхъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, если данный многочленъ есть двучленъ, то корень изъ него не м. б. выраженъ точно ни одночленомъ, ни многочленомъ, потому-что квадратъ одночлена есть одночленъ, а квадратъ простѣйшаго многочлена — двучлена, содержитъ три неприводимыхъ члена.

Пусть данный многочленъ будетъ точный квадратъ:

$$25a^2x^6-20a^3x^5+74a^4x^4-48a^5x^3+57a^6x^2-28a^7x+4a^8,$$

расположенный по убывающимъ степенямъ главной буквы x, и пусть

$$p+q+r+s+\ldots\ldots\ldots$$

будетъ квадратный корень изъ него, также расположенный по убывающимъ степенямъ x. Данный многочленъ, какъ квадратъ своего корня, будетъ $=(p+q+$ $+r+s+\ldots)^2$; или, раскрывъ этотъ квадратъ, получимъ равенство

$$25a^2x^6-20a^3x^5+74a^4x^4-48a^5x^3+57a^6x^2-28a^7x+4a^8=p^2+2pq+q^2+$$
$$+2(p+q)r+r^2$$
$$+2(p+q+r)s+s^2+\ldots\quad(1)$$

Вторая часть этого равенства, по раскрытіи скобокъ и по приведеніи, должна давать первую часть, поэтому равенство это есть тождество, а слѣд. высшіе члены въ обѣихъ частяхъ должны быть равны. Но вторая часть есть произведеніе $(p+q+\ldots)(p+q+\ldots)$, а потому высшій членъ ея равенъ произведенію высшихъ членовъ сомножителей, т. е. $=p.p$ или p^2. Итакъ $p^2=$ $=25a^2x^6$, откуда

$$p=\sqrt{25a^2x^6}.$$

Слѣд. *чтобы найти высшій членъ корня, нужно извлечь квадратный корень изъ высшаго члена даннаго полинома.*

$\sqrt{25a^2x^6}=\pm 5ax^3$. Возьмемъ для p его значеніе со знакомъ $+$, т. е. положимъ $p=+5ax^3$. Вычтя изъ первой части равенства (1) $25a^2x^6$, а изъ второй p^2, найдемъ тождество

$$-20a^3x^5+74a^4x^4-48a^5x^3+\ldots=2pq+q^2+2(p+q)r+r^2+\ldots\quad(2),$$

а потому высшіе по буквѣ x члены его должны быть равны; но высшій членъ второй части есть $2pq$, потому-что p и q суть высшіе члены корня. Слѣд. $2pq=-20a^3x^5$, или, такъ какъ $p=5ax^3$, то: $10ax^3.q=-20a^3x^5$, откуда

$$q=-20a^3x^5:10ax^3=-2a^2x^2,$$

Отсюда: *чтобы найти второй членъ корня, нужно вычесть изъ даннаго полинома квадратъ перваго члена корня, и высшій членъ перваго остатка раздѣлить на удвоенный первый членъ корня.*

долженъ-бы быть нулемъ — R, а корень — U; такъ какъ остатокъ получился по вычитаніи изъ P всѣхъ членовъ квадрата многочлена U, то $P - U^2 = R$, откуда

$$P = U^2 + R.$$

Эта формула и служитъ для преобразованія неточнаго квадрата.

Примѣръ I. Возьмемъ полиномъ, расположенный по убывающимъ степенямъ главной буквы, напр.

$$9a^2x^4 - 24a^3x^3 + 46a^4x^2 - 20a^5x + 13a^6.$$

Если этотъ многочленъ есть точный квадратъ, то нисшій членъ корня долженъ быть равенъ $\sqrt{13a^6}$, а слѣдующій затѣмъ остатокъ долженъ быть нулемъ. Если оба эти условія окажутся невыполненными, то должно заключить, что данный полиномъ не есть точный квадратъ. Примѣняемъ правило § 157.

$$\begin{array}{r|l}
9a^2x^4 - 24a^3x^3 + 46a^4x^2 - 20a^5x + 13a^6 & 3ax^2 - 4a^2x + 5a^3 \\
\pm 24a^3x^3 \mp 16a^4x^2 \qquad\qquad\qquad & (6ax^2 - 4a^2x)(-4a^2x) \\
\hline
30a^4x^2 - 20a^5x + 13a^6 & (6ax^2 - 8a^2x + 5a^3).5a^3 \\
-30a^4x^2 \pm 40a^5x \mp 25a^6 & \\
\hline
20a^5x - 12a^6 &
\end{array}$$

Найдя въ корнѣ членъ $+5a^3$, и замѣчая, что: 1) онъ не равенъ $\sqrt{13a^6}$, а 2) что слѣдующій остатокъ не есть 0, заключаемъ, что данный полиномъ не есть точный квадратъ. Примѣняя формулу $P = U^2 + R$, можемъ его представить въ видѣ

$$(3ax^2 - 4a^2x + 5a^3)^2 + 20a^5x - 12a^6.$$

Примѣръ II. Пусть данный полиномъ расположенъ по восходящимъ степенямъ главной буквы, напр.

$$1 - 5x + 4x^2 - 6x^3 + 8x^4.$$

Если этотъ многочленъ — точный квадратъ, то дойдя въ корнѣ до члена, содержащаго x^2, и получивъ затѣмъ остатокъ неравный 0, должны заключить, что данный полиномъ есть неточный квадратъ.

$$\begin{array}{r|l}
1 - 5x + 4x^2 - 6x^3 + 8x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & 1 - \frac{5}{2}x - \frac{9}{8}x^2 - \frac{93}{16}x^3 \\
\pm 5x \mp \frac{25}{4}x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
-\frac{9}{4}x^2 - 6x^3 + 8x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & \left(2 - \frac{5}{2}x\right)\left(-\frac{5}{2}x\right) \\
\pm\frac{9}{4}x^2 \mp \frac{45}{8}x^3 \mp \frac{81}{64}x^4 \qquad\qquad\qquad & \left(2 - 5x - \frac{9}{8}x^2\right)\left(-\frac{9}{8}x^2\right) \\
\hline
-\frac{93}{8}x^3 + \frac{431}{64}x^4 \qquad\qquad\qquad & \\
\pm\frac{93}{8}x^3 \mp \frac{465}{16}x^4 \mp \frac{837}{64}x^5 \mp \frac{8649}{256}x^6 & \left(2 - 5x - \frac{9}{4}x^2 - \frac{93}{16}x^3\right)\left(-\frac{93}{16}x^3\right) \\
\hline
-\frac{1429}{64}x^4 - \frac{837}{64}x^5 - \frac{8649}{256}x^6 & \text{и т. д.}
\end{array}$$

Разница этого случая отъ предыдущаго заключается въ томъ, что степени главной буквы въ послѣдовательныхъ остаткахъ повышаются, а это ведетъ за собою возможность полученія въ частномъ неограниченнаго числа членовъ цѣ-

лыхъ относительно главной буквы, такъ что разложеніе многочлена по формулѣ $P = U^2 + R$, гдѣ U и R — цѣлыя относительно x выраженія, — неопредѣленно.

160. *Приложенія.* — *I. Найти условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы квадратный триномъ*

$$ax^2 + bx + c$$

былъ точнымъ квадратомъ.

1-й методъ. Найдемъ остатокъ квадратнаго корня изъ даннаго тринома.

$$\begin{array}{r|l} ax^2 + bx + c & x\sqrt{a} + \dfrac{b}{2\sqrt{a}} \\ - bx \mp \dfrac{b^2}{4a} & \left(2x\sqrt{a} + \dfrac{b}{2\sqrt{a}}\right) \cdot \dfrac{b}{2\sqrt{a}} \\ \hline c - \dfrac{b^2}{4a} & \end{array}$$

Чтобы триномъ былъ точнымъ квадратомъ, необходимо и достаточно чтобы остатокъ былъ равенъ нулю, т. е. чтобы

$$c - \frac{b^2}{4a} = o, \quad \text{или} \quad b^2 - 4ac = o.$$

2-й методъ. Положивъ

$$ax^2 + bx + c = (\alpha x + \beta)^2$$

и раскрывъ вторую часть, найдемъ тождество

$$ax^2 + bx + c = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2;$$

приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x, найдемъ три условія:

$$a = \alpha^2; \quad b = 2\alpha\beta; \quad c = \beta^2.$$

Эти три условія должны существовать совмѣстно, а потому величины α и β, выведенныя изъ 1-го и 3-го, должны удовлетворять второму.

Такимъ образомъ найдемъ: $b = \pm 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{c}$, или $b^2 = 4ac$.

Примѣчаніе. Еслибы a равнялось нулю, то изъ условія $b^2 = 4ac$, слѣдуетъ, что и b должно $= o$; триномъ приводится въ этомъ случаѣ къ c: это есть квадратъ количества $\sqrt{c}$. Поэтому можно сказать, что каково бы ни было a, искомое условіе есть $b^2 - 4ac = o$.

II. *Найти условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы триномъ*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

былъ точнымъ квадратомъ.

Различаемъ два случая: 1) $a = o$; 2) a не равно o.

Когда $a = o$, то, какъ триномъ не можетъ имѣть высшею степенью x — первую, необходимо положить и $b = 0$. Это условіе, будучи необходимымъ, вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно; ибо, если оно выполнено, то триномъ приводится къ cy^2: а это есть точный квадратъ количества $\sqrt{c}.\ y$.

Пусть a не равно нулю. Извлеченіе корня даетъ:

$$\begin{array}{r|l} ax^2+2bxy+cy^2 & \sqrt{a}.x+\frac{b}{\sqrt{a}}y \\ -2bxy\mp\frac{b^2}{a}y^2 & \left(2\sqrt{a}.x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{b}{\sqrt{a}}y \\ \hline \left(c-\frac{b^2}{a}\right)\cdot y^2 & \end{array}$$

Заключаемъ, что если $\frac{b^2}{a}-c$, или $\frac{b^2-ac}{a}$ не равно нулю, т. е. если b^2-ac отлично отъ нуля, триномъ не есть точный квадратъ. Итакъ, *необходимо*, чтобы b^2-ac равнялось нулю. Этого условія, вмѣстѣ съ тѣмъ, и достаточно; ибо равенство

$$ax^2+2bxy+cy^2=\left(\sqrt{a}.\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}y\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}\quad y^2$$

показываетъ, что какъ скоро $b^2=ac$, данный триномъ превращается въ точный квадратъ количества

$$\sqrt{a}.\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot y,\ \text{или}\ \frac{ax+by}{\sqrt{a}}.$$

III. *Найти условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы полиномъ*

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy$$

былъ точнымъ квадратомъ.

Къ этому примѣру можно приложить общій методъ, которымъ мы пользовались въ двухъ предыдущихъ примѣрахъ. Но мы выведемъ искомыя условія изъ условій, найденныхъ въ предыдущемъ примѣрѣ.

Различаемъ опять два случая: $a=o$ и a не равно o.

Первый случай. Когда $a=o$, то, какъ данный полиномъ, чтобы быть точнымъ квадратомъ, не долженъ содержать членовъ съ первою степенью x, мы должны при всякихъ y и z имѣть

$$b'z+b''y=o,$$

откуда, извѣстнымъ уже путемъ, заключаемъ, что

$$b'=o\quad \text{и}\quad b''=o.$$

Полиномъ приводится къ

$$a'y^2+2byz+a''z^2.$$

Изъ предыдущаго примѣра знаемъ, что триномъ этого вида будетъ точнымъ квадратомъ при условіи

$$a'a''-b^2=o.$$

Итакъ, искомыя условія суть:

$$b'=o,\quad b''=o,\quad a'a''-b^2=o.$$

Второй случай. — Пусть a не равно o. Дадимъ полиному видъ

$$ax^2+2(b''y+b'z)x+a'y^2+2byz+a''z^2.$$

Его можно разсматривать какъ квадратный относительно x триномъ, кото-

раго первый коэффиціентъ a отличенъ отъ нуля. Прилагая сюда доказанное въ предыдущемъ примѣрѣ условіе, найдемъ

$$(b''y+b'z)^2=a(a'y^2+2byz+a''z^2).$$

Такъ какъ это равенство должно быть *тождествомъ*, оно должно имѣть мѣсто *при всякомъ* y *и при всякомъ* z; откуда извѣстнымъ образомъ найдемъ условія:

$$b''^2=aa';\quad b'b''=ab;\quad b'^2=aa''.$$

Этихъ условій, вмѣстѣ съ тѣмъ, и вполнѣ достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, изъ нихъ имѣемъ:

$$a'=\frac{b''^2}{a};\ a''=\frac{b'^2}{a};b=\frac{b'b''}{a}.$$

Подставляя эти значенія a',a'' и b въ данный полиномъ, дадимъ ему видъ

$$ax^2+\frac{b''^2y^2}{a}+\frac{b'^2z^2}{a}+\frac{2b'b''yz}{a}+2b'zx+2b''xy=$$

$$\frac{a^2x^2+b''^2y^2+b'^2z^2+2b'b''yz+2ab'zx+2ab''xy}{a}=$$

$$\left(\frac{ax+b''y+b'z}{\sqrt{a}}\right)^2.$$

Отсюда видно, что при найденныхъ условіяхъ данный полиномъ есть полный квадратъ количества

$$\frac{ax+b''y+b'z}{\sqrt{a}}.$$

161. Задачи.

Извлечь квадратный корень изъ многочленовъ:

1. $4x^6-12x^5+25x^4-24x^3+16x^2.$
2. $a^2-2ab+6ac+b^2-6bc+9c^2.$
3. $9p^4-3p^3q+6p^3r+\frac{p^2q^2}{4}-p^2qr+p^2r^2.$
4. $\frac{4a^4x^2}{9}-\frac{4a^2bx^2z}{3}+\frac{8a^3bxz^2}{3}+b^2x^2z^2-4ab^2xz^3+4a^2b^2z^4.$
5. $4+13a^2+9a^4-4a-6a^3.$
6. $9a^4+25b^2+64m^2+z^2-30a^2b+48a^2m-6a^2z-80bm+10bz-16mz.$
7. $25a^2x^4-40a^4x^3+30a^3x^7-10ax^5+16a^6x^2-24a^5x^6+8a^3x^4+9a^4x^{10}-6a^2x^8+x^6.$
8. $\frac{9m^6n^4}{25p^6q^8}-\frac{12m^5n^5}{35p^7q^9}-\frac{332m^4n^6}{735p^8q^{10}}+\frac{16m^3n^7}{63p^9q^{11}}+\frac{16m^2n^8}{81p^{10}q^{12}}.$
9. $p^2+2pqx+(2pr+q^2)x^2+2(ps+qr)x^3+(2qs+r^2)x^4+2rsx^5+s^2x^6.$
10. $25\frac{3}{7}-\frac{20x}{7y}+\frac{9y^2}{16x^2}-\frac{15y}{2x}+\frac{4x^2}{49y^2}.$
11. $\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{4y^2}+1\right)+\frac{4y^2}{x^2}\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)+3.$
12. $a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2(b^2+d^2)+2b^2(d^2-c^2)-2c^2(d^2-a^2).$
13. $x^4-(4a+2)x^3+(4a^2+10a-3)x^2-(12a^2-2a-4)x+9a^2-12a+4.$

14. $$\begin{array}{l|l|l|l|l} 4b^2 & a^4+8b^2 & a^3+24b^2 & a^2+20b^2 & a+25b^2. \\ -4bc & \quad -2c^2 & \quad -18bc & \quad -2bc & \quad -30c \\ +c^2 & & \quad +13c^2 & \quad +bc^2 & \quad +9c^2. \end{array}$$

15. $x^4-(2a+2b)x^3+(3a^2-b^2+2ab)x^2-(2a^3+a^2b-ab^2-b^3)x+a^4+b^4-2a^2b^2.$

16. $x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1.$ 17. $x^4+x^3+\frac{x^2}{4}-4x-2+\frac{4}{x^2}.$

18. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{x^2}{a^2}-2\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)-1.$

19. $(a-2b)^2x^4-2a(a-2b)x^3+(a^2+4ab-6a-8b^2+12b)x^2-(4ab-6a)x$ $+4b^2-12b+9.$

20. Опредѣлить остатокъ квадратнаго корня изъ полинома

$$x^8+6ax^7-3a^2x^6+7a^6x^2-a^8.$$

21. Вычислить по шести членовъ квадратнаго корня изъ слѣдующихъ биномовъ: x^2+a; a^2-1; a^2-x; $1+x$.

22. Опредѣлить, при какомъ значеніи h полиномъ

$$x^4+6x^3+7x^2-6x+h$$

будетъ полнымъ квадратомъ.

23. Опредѣлить a подъ условіемъ, чтобы триномъ $3x^2-5ax+1$ былъ полнымъ квадратомъ.

24. Найти связь между коэффиціентами p, q и r, при которой полиномъ $x^6+px^4+qx^2+r$ есть точный квадратъ.

25. Таже задача относительно полинома

$$x^4+4px^3+6qx^2+4px+r.$$

26. При какой зависимости между p, q и m полиномъ

$$4x^4-4px^3+4qx^2-2p(m+1)x+(m+1)^2$$

представляетъ точный квадратъ?

27. Доказать, что полиномъ $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ представляетъ точный квадратъ, если

$$d=\frac{b(4ac-b^2)}{8a^2} \quad \text{и} \quad e=\frac{(4ac-b^2)^2}{64a^3}.$$

28. Доказать, что условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы полиномъ $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$ былъ точнымъ квадратомъ, суть:

$$b^2-ac=0, \qquad d^2-af=0, \qquad e^2-cf=0.$$

29. Доказать, что произведеніе четырехъ послѣдовательныхъ чиселъ, увеличенное на 1, всегда есть точный квадратъ.

30. Какому условію должны удовлетворять коэффиціенты a, b и c, чтобы полиномъ $a^2x^4+ax^3+bx^2+cx+c^2$ былъ полнымъ квадратомъ?

31. Доказать, что каждый изъ полиномовъ:

$$24(24x-1)(12x-1)(8x-1)(6x-1)+1,$$
$$36x(6x+1)(3x+1)(2x+1)+1,$$
$$x(x+a)(x+b)(x+a+b)+\frac{a^2b^2}{4}$$

есть точный квадратъ.

ГЛАВА XIII.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ чиселъ и многочленовъ.

Опредѣленія; предварительныя теоремы. — Извлеченіе кубичнаго корня изъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ съ точностью до 1 и до $\frac{1}{n}$. — Сокращенный способъ. — Задачи. — Извлеченіе кубичнаго корня изъ многочленовъ. — Задачи.

162. Когда число есть кубъ другаго числа, то первое называется *точнымъ кубомъ*, а второе — *точнымъ кубичнымъ корнемъ* изъ перваго. Такъ 125 есть точный кубъ 5-ти, а 5 — точный кубичный корень изъ 125.

163. Разсужденіями, приведенными въ § 130, докажемъ, что:

Когда цѣлое число не есть точный кубъ, то кубичный корень изъ него нельзя выразить точно ни въ цѣлыхъ единицахъ, ни въ какихъ либо доляхъ единицы.

Такіе корни называются несоизмѣримыми съ единицею; такъ, кубичные корни изъ чиселъ: 3, 10, 15 и т. д. суть числа несоизмѣримыя.

164. **Опредѣленія.** — *Кубичный корень изъ цѣлаго числа, точный до единицы, есть корень изъ наибольшаго куба, заключающагося въ этомъ числѣ, или этотъ корень $+1$.*

Первый называется корнемъ, точнымъ до 1 по недостатку, второй — по избытку. Такъ, замѣчая, что наибольшій кубъ, заключающійся въ 70, есть 64 заключаемъ; что кубичный корень изъ 70, точный до 1 по недостатку, есть 4, а по избытку — 5.

165. *Остаткомъ* кубичнаго корня изъ цѣлаго числа называется избытокъ этого числа надъ кубомъ его корня, точнаго до 1 по недостатку. Напр., остатокъ кубичнаго корня изъ 70 есть разность $70-64$ или 6.

Вообще, если данное число есть N, кубичный корень изъ него, точный до 1 по недостатку, равенъ A, а остатокъ — R, то, по опредѣленію остатка, $R=N-A^3$, откуда

$$N=A^3+R.$$

Въ частности, когда N есть точный кубъ, остатокъ корня равенъ нулю.

Теорема. — *Остатокъ кубичнаго корня не больше утроеннаго произведенія корней изъ даннаго числа, точныхъ до 1 по недостатку и по избытку.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A есть кубичный корень изъ N, точный до 1 по недостатку; въ такомъ случаѣ N содержится между A^3 и $(A+1)^3$, и слѣд. разность между N и A^3 меньше разности $(A+1)^3-A^3$ или $3A(A+1)+1$, т. е.

$$R<3A(A+1)+1.$$

Но R и $3A(A+1)+1$ суть числа цѣлыя, и R — меньшее изъ нихъ, то оно меньше вторага по-крайней мѣрѣ на 1, т. е.

$$R\leqslant 3A(A+1).$$

Слѣдствіе. *Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы* A *было кубичнымъ корнемъ изъ* N, *точнымъ до 1 по недостатку, суть*:

$$N = A^3 + R \quad \text{и} \quad R \leqslant 3A(A+1).$$

Въ самомъ дѣлѣ, равенство выражаетъ, что кубъ числа A содержится въ N, а неравенство означаетъ, что N не заключаетъ въ себѣ куба числа $A+1$.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ цѣлаго числа съ точностью до 1.

Эту теорію подраздѣляемъ на три случая.

166. *Первый случай*. Данное число меньше 1000.

Въ этомъ случаѣ кубичный корень находятъ прямо при помощи таблицы кубовъ первыхъ девяти чиселъ.

Числа:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кубы:	1	8	27	64	125	216	343	512	729.

Пусть требуется извлечь кубичный корень, съ точностью до 1, изъ 427. Изъ таблицы кубовъ видно, что это число содержится между 343 и 512, слѣд. наибольшій кубъ, въ немъ заключающійся, есть 343; поэтому искомый корень $=7$, а остатокъ есть $427-343$ или 84.

167. *Второй случай*. Данное число содержится между 1000 и 1000000.

Пусть дано число 341254; оно больше 1000 или 10^3, но меньше 1000000 или 100^3, а потому квадратный корень изъ него больше 10, но меньше 100, т. е. состоитъ изъ десятковъ и единицъ: пусть число его десятковъ будетъ d, а простыхъ единицъ — u; искомый корень будетъ $10d+u$, и если возможный остатокъ назовемъ буквою R, то получимъ равенство:

$$341254=(10d+u)^3+R=1000d^3+3.100d^2.u+3.10d.u^2+u^3+R \; \ldots\ldots \; (1).$$

Чтобы найти цифру десятковъ корня, замѣчаемъ, что слагаемое $1000d^3$ есть цѣлое число тысячъ, а потому необходимо содержится въ 341000 суммы, а слѣд. d^3 заключается въ 341. Докажемъ, что кубичный корень изъ наибольшаго куба заключающагося въ 341, и дастъ намъ d. Въ самомъ дѣлѣ, изъ таблицы кубовъ замѣчаемъ, что 341 содержится между 216 и 343, или между 6^3 и 7^3:

$$6^3 < 341 < 7^3.$$

Помножая эти числа на 1000, мы не измѣнимъ неравенствъ, такъ-что:

$$\overline{60}^3 < 341000 < \overline{70}^3 \cdot$$

Прибавивъ къ 341000 число 254, мы усилимъ первое неравенство. Что касается втораго, то какъ 341000 и $\overline{70}^3$ суть цѣлыя числа тысячъ и первое меньше втораго, то оно меньше его по крайней мѣрѣ на 1000; слѣд., увеличивъ первое на 254 — число, меньше 1000, получимъ результатъ, во всякомъ случаѣ, меньшій $\overline{70}^3$, такъ что и второе неравенство не нарушится. Итакъ

$$\overline{60}^3 < 341254 < \overline{70}^3,$$

откуда, извлекая кубичный корень, имѣемъ:

$$60 < \sqrt[3]{341254} < 70.$$

Эти неравенства доказываютъ, что искомый корень больше 6 десятковъ, но не заключаетъ въ себѣ 7 десятковъ, т. е. что онъ содержитъ 6 цѣлыхъ десятковъ, и, можетъ быть, нѣсколько простыхъ единицъ, число которыхъ не больше 9. Итакъ, $d=6$, т. е. *цифра десятковъ корня равна кубичному корню изъ наибольшаго куба, содержащагося въ числѣ тысячъ даннаго числа.*

Подставивъ въ равенство (1) 6 вмѣсто d, получимъ:

$$341254 = 216000 + 3.3600.u + 3.60.u^2 + u^3 + R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

а вычтя изъ обѣихъ частей по 216000, найдемъ

$$125254 = 3.3600.u + 3.60.u^2 + u^3 + R.$$

Для нахожденія цифры u единицъ корня замѣчаемъ, что слагаемое $3.3600.u$ есть цѣлое число сотенъ, а потому необходимо заключается въ 1252 сотняхъ суммы. Но въ составъ этихъ сотенъ суммы могутъ входить сотни и отъ остальныхъ членовъ ея (т. е. отъ $3.60.u^2$, u^3 и R). Поэтому, членъ $3.3600u$ или равенъ, или меньше 125200. Итакъ

$$3.3600u \leqslant 125200,$$

откуда

$$u \leqslant \frac{1252}{3.36}.$$

Но цифра единицъ u есть число цѣлое, а потому, раздѣливъ 1252 на 3.36, и взявъ цѣлую часть частнаго, найдемъ высшій предѣлъ цифры единицъ корня. Замѣтивъ, что 125254 называется первымъ остаткомъ, выводимъ изъ сказаннаго слѣдующее правило для нахожденія цифры единицъ корня: *отдѣливъ въ первомъ остаткѣ двѣ цифры справа запятою и раздѣливъ оставшееся влѣво отъ запятой число на утроенный квадратъ цифры десятковъ корня, въ цѣлой части частнаго будемъ имѣть высшій предѣлъ цифры единицъ корня.*

Въ данномъ случаѣ, цѣлая часть сказаннаго частнаго есть 10; слѣд, цифра единицъ корня будетъ 9 или меньше 9. Для испытанія цифры 9, мы должны составить сумму $3.3600.9 + 3.60.9^2 + 9^3$ и вычесть ее изъ перваго остатка: если вычитаніе будетъ возможно, то цифра 9 будетъ требуемая; въ противномъ случаѣ ее надо послѣдовательно уменьшать на 1 до тѣхъ поръ, пока вычитаніе сдѣлается возможнымъ. Сумму, подлежащую вычитанію можно написать такъ:

$$[3 \times 3600 + (3 \times 60 + 9) \times 9] \times 9.$$

$3 \times 3600 = 10800$; $3 \times 60 + 9 = 189$; $189 \times 9 = 1701$; $10800 + 1701 = 12501$; $12501 \times 9 = 112509$, что меньше 125254.

Итакъ, цифра единицъ равна 9; искомый корень $= 69$, а остатокъ корня $=$ $= 125254 - 112509 = 12745$.

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$\sqrt[3]{341{,}254}$	69	189
216		$\times 9$
108 |1252,54		1701
1125 09		+10800
12 745		12510
		$\times 9$
		112509

168. *Общій случай.* — Этотъ случай приводится къ двумъ предыдущимъ при помощи слѣдующей теоремы.

Теорема. — *Число десятковъ кубичнаго корня изъ даннаго числа равно кубичному корню изъ наибольшаго куба, содержащагося въ числѣ тысячъ этого числа.*

Пусть данное число будетъ 495864349, и пусть a^3 будетъ наибольшій кубъ, содержащійся въ числѣ тысячъ этого числа, т. е. въ 495864; въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$a^3 \leqslant 495864 < (a+1)^3;$$

откуда, умноживъ всѣ числа на 1000, получимъ:

$$(10a)^3 \leqslant 495864000 < [10(a+1)]^3;$$

или, придавая къ среднему числу 349, что не измѣнитъ смысла неравенствъ, но обратитъ возможное равенство въ неравенство:

$$(10a)^3 < 495864349 < [10(a+1)]^3.$$

Слѣдовательно, извлекая корень изъ всѣхъ трехъ чиселъ, найдемъ:

$$10a < \sqrt[3]{495864349} < (a+1).10.$$

Итакъ, искомый корень заключается между a десятками и $a+1$ десяткомъ, а потому содержитъ a десятковъ, и нѣкоторое число единицъ, не большее 9. Теорема такимъ образомъ доказана.

169. Мы нашли, что число десятковъ кубичнаго корня изъ числа 495864349 есть корень кубичный изъ 495864; число же десятковъ этого послѣдняго корня, или число сотенъ перваго, равно куибчному корню изъ 495 (по той же теоремѣ). Отсюда заключаемъ:

1. *Чтобы найти цифру высшаго разряда кубичнаго корня изъ цѣлаго числа, достаточно раздѣлить его на грани, отдѣляя по три цифры отъ правой руки къ лѣвой, и извлечь кубичный корень изъ первой грани слѣва.*

2. *Число цифръ корня, точнаго до 1 по недостатку, изъ цѣлаго числа равно числу сказанныхъ граней.*

170. Извлечемъ квадратный корень изъ 495864349.

Извлекая кубичный корень изъ 495864 такъ, какъ указано въ § 167, найдемъ число десятковъ искомаго корня: оно будетъ 79. Назвавъ цифру единицъ корня буквою u и возможный остатокъ черезъ R, имѣемъ:

$$495864349 = \overline{79}^3.1000 + 3.\overline{79}^2.100.u + 3.790.u^2 + u^3 + \mathrm{R}.$$

Вычитая изъ обѣихъ частей этого равенства по $\overline{79}^3.1000$, получимъ:

$$2825349 = 3.\overline{79}^2.100.u + 3.790.u^2 + u^3 + R.$$

Отсюда, извѣстными разсужденіями убѣдимся, что высшій предѣлъ цифры единицъ u найдемъ, опредѣливъ цѣлую часть частнаго отъ раздѣленія 28253 на $3.\overline{79}^2$, т. е. на 18723. Цѣлая часть этого частнаго равна 1; поэтому цифра единицъ корня будетъ или 1 или 0.

Для испытанія 1, составляемъ остальные три члена куба корня, т. е. $3.\overline{79}^2.100 \times 1 + 3.790 \times 1^2 + 1^3$, что даетъ 1874671; такъ какъ это число не превышаетъ остатка 2825349, заключаемъ, что цифра единицъ корня есть 1, самый корень $= 791$, а остатокъ корня $= 2825349 - 1874671$, или 950678.

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$\sqrt[3]{495,864,349}$	791
343	$49 \times 3 = 147$, $219 \times 9 = 1971$
147 9 |1528,64	14700
1500 39	+1971
18723 1 | 28253,49	$16671 \times 9 = 150039$
18746 71	1971
9506 78	16671
	81
	$18723 = 3 \times \overline{79}^2$, $2371 \times 1 = 2371$.
	1872300
	2371
	1874671×1

Отсюда выводимъ:

171. *Правило извлеченія кубичнаго корня съ точностью до 1 изъ цѣлаго числа.*

Раздѣляютъ данное число на грани по три цифры отъ правой руки къ лѣвой, причемъ первая грань слѣва можетъ имѣть и двѣ цифры и даже одну.

Первую цифру корня найдемъ, извлекая кубичный корень изъ первой грани слѣва.

Чтобы найти вторую цифру, вычитаютъ изъ первой грани кубъ первой цифры корня, и къ остатку сносятъ вторую грань: такимъ образомъ получается первый частный остатокъ. Отдѣляютъ съ правой стороны его двѣ цифры, а оставшееся влѣво отъ запятой число дѣлятъ на утроенный квадратъ первой цифры корня: цѣлая часть частнаго дастъ высшій предѣлъ для второй цифры корня.

Чтобы узнать, годится-ли эта цифра, приписываютъ ее справа къ утроенной первой цифрѣ корня, и умножаютъ полученное число на испытуемую цифру; къ произведенію придаютъ утроенный кедраатъ первой цифры корня (служившій сейчасъ дѣлителемъ), приписавъ къ нему справа два нуля, и умножаютъ полученную сумму на испытуемую цифру. Если это произведеніе не превышаетъ перваго остатка, испытуемая цифра годится; въ противномъ случаѣ уменьшаютъ ее на 1 и снова исполняютъ указанное испы-

таніе, и т. д. пока испытаніе не дастъ произведенія, не превышающаго первый частный остатокъ. Найденную цифру приписываютъ справа отъ первой цифры корня.

Для нахожденія третьей цифры корня, вычитаютъ составленное произведеніе изъ перваго остатка, и къ разности сносятъ третью грань: получится второй частный остатокъ. Съ правой стороны его отдѣляютъ двѣ цифры, и дѣлятъ оставшееся влѣво отъ запятой число на утроенный квадратъ числа, найденнаго въ корнѣ: цѣлая часть частнаго будетъ представлять высшій предѣлъ третьей цифры корня: испытываютъ эту цифру вышеуказаннымъ способомъ.

Такимъ образомъ продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока будутъ снесены всѣ грани.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ дробей съ точностью до 1.

172. Теорема. — ***Кубичный корень изъ несократимой дроби несоизмѣримъ, если его нельзя извлечь отдѣльно изъ числителя и знаменателя.***

Тоже доказательство какъ въ § 143.

Такъ, члены дроби $\frac{8}{125}$ — точные кубы, поэтому кубичны корень изъ нея извлекается точно:

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{2}{5}.$$

Кубичные корни изъ дробей $\frac{8}{9}$, $\frac{3}{64}$, и $\frac{2}{3}$ — несоизмѣримы.

173. Теорема. ***Кубичный корень изъ дроби, точный до 1, есть корень изъ наибольшаго куба, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа, или этотъ корень $+1$.***

Доказательство аналогично § 144. Отсюда

Правило. Чтобы извлечь кубичный корень изъ дроби точно до 1, надо отбросить дробную часть, и извлечь кубичный корень изъ цѣлой части точно до 1.

Примѣръ. Извлечь кубичный корень изъ 2896,75 съ точностью до 1.

Откидывая дробь, извлекаемъ, съ указанною точностью, корень изъ 2896; находимъ результаты: 14 — по недостатку и 15 — по избытку.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ цѣлыхъ чиселъ и изъ дробей съ точностью до $\frac{1}{n}$.

174. *Правило. Чтобы извлечь кубичный корень изъ цѣлаго или изъ дробнаго числа съ точностью до $\frac{1}{n}$, нужно умножить это число на кубъ знамена-*

теля степени приближенія, изъ произведенія извлечь корень точно до 1, и раздѣлить его на знаменателя степени приближенія.

Доказательство такое же какъ въ § 146.

Примѣръ. Вычислить $\sqrt[3]{3}$ съ точностью до $\frac{1}{100}$.

Для этого надо извлечь кубичный корень изъ 3×100^3 т. е. изъ 3000000 съ точностью до 1; и раздѣлить результатъ на 100.

```
   ∛3,000,000 | 144
     1        |    34 × 4 = 136
34 | 20,00    | 300
     1744     | 136
   | 2560,00  | 436 × 4 = 1744
     2419 84  |   136    424 × 4 = 1696
       140 16 |   436
              |    16
              |  58800
              |   1696
              |  60496 × 4 = 241984
```

Искомый корень $= 1,44$ — по недостатку, и 1,45 — по избытку.

Сокращенный способъ извлеченія кубичнаго корня.

175. Пусть требуется извлечь кубичный корень съ точностью до 1 изъ цѣлаго числа A — случай, къ которому приводятся всѣ остальные. Положимъ, что корень имѣетъ $2m+1$ цифръ, и что обыкновеннымъ способомъ найдено $m+1$ цифръ, т. е. больше половины всѣхъ цифръ корня, а остается найти послѣднія m цифръ. Обозначимъ буквою a число, составленное найденными $m+1$ цифрами, сопровождаемыми m нулями, a буквою x остальную часть корня, которая вообще есть число несоизмѣримое: истинный корень выразится суммою $a+x$. Итакъ:

$$A = (a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$

откуда

$$\frac{A - a^3}{3a^2} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}.$$

Найдемъ цѣлую часть q частнаго отъ раздѣленія $A - a^3$ на $3a^2$, и пусть остатокъ дѣленія будетъ r; слѣд. получимъ равенство:

$$\frac{A - a^3}{3a^2} = q + \frac{r}{3a^2}.$$

Приравнивая два выраженія частнаго $\frac{A - a^3}{3a^2}$, найдемъ:

$$x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} = q + \frac{r}{3a^2},$$

откуда

$$x = q + \frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{x}{3a}\right).$$

Докажемъ, что абсолютная величина разности $\frac{r}{3a^2}-\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)$ меньше 2, и что слѣд. q выражаетъ величину x съ ошибкою, меньшею 2 единицъ.

Замѣтивъ, что r есть остатокъ дѣленія, въ которомъ дѣлитель равенъ $3a^2$, заключаемъ, что $\frac{r}{3a^2}<1$. Затѣмъ, въ цѣлой части x находится m цифръ, поэтому x меньше наименьшаго $(m+1)$ значнаго числа, т. е. $x<10^m$, а потому $x^2<10^{2m}$; съ другой стороны a состоитъ изъ $2m+1$ цифръ, слѣд. $a \geqslant 10^{2m}$; а потому $\frac{x^2}{a}<1$. Наконецъ, $3a \geqslant 3.10^{2m}$, а потому $\frac{x}{3a}<\frac{1}{3.10^m}$. Отсюда видно, что $\left(1+\frac{x}{3a}\right)<2$, и слѣдовательно

$$\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)<2,$$

а значитъ и абсолютная величина разности $\frac{r}{3a^2}-\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)$ также меньше 2. Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе:
чтобы извлечь, съ точностью до 1, кубичный корень изъ цѣлаго числа, находятъ обыкновеннымъ способомъ больше половины всѣхъ цифръ корня; затѣмъ остальныя, съ точностью до 2, находятъ, раздѣливъ полный остатокъ на утроенный квадратъ найденной части корня (т. е. числа, состоящаго изъ m+1 *первыхъ цифръ съ* m *нулями).* —

Слѣдуетъ замѣтить, что лишь въ исключительныхъ, рѣдкихъ, случаяхъ приближеніе будетъ ошибочно болѣе чѣмъ на 1; обыкновенно же, ошибка бываетъ меньше 1; во всякомъ стучаѣ, найдя указаннымъ сокращеннымъ способомъ корень, слѣдуетъ прямо вычислять предѣлъ разности $\frac{r}{3a^2}-\frac{x^2}{a}\left(1+\frac{x}{3a}\right)$.

176. Можно всегда опредѣлить, будетъ-ли корень, вычисленный сокращеннымъ способомъ, т. е. $a+q$ — точный, или приближенный; а въ послѣднемъ случаѣ — въ какую сторону сдѣлана ошибка.

Въ самомъ дѣлѣ, назовемъ остатокъ по нахожденіи части a корня, буквою R; имѣемъ равенство:

$$A-a^3=R, \quad \text{откуда} \quad A=a^3+R.$$

Раздѣливъ R на $3a^2$, въ частномъ получимъ q, и въ остаткѣ r; слѣд.

$$R=3a^2.q+r,$$

а потому

$$A=a^3+3a^2q+r.$$

Отсюда:

1) Если $r>(3a+q)q^2$, то $A>(a+q)^3$, и слѣд. $a+q$ будетъ приближеніе по недостатку.

2) Если $r=(3a+q)q^2$, то $A=(a+q)^3$, сл. $a+q$ будетъ точный корень.

3) Если же $r<(3a+q)q^2$, то $A<(a+q)^3$, а слѣд. $a+q$ будетъ приближеніемъ по избытку.

177. Извлечь кубичный корень изъ 9642863945767 9. Первыя три цифры опредѣляемъ обыкновеннымъ способомъ.

96,428,639,457,679	458			
324,28	4800	125	607500	1358
5303639	625	5	10864	8
356727	5425		618364	
	25		64	
	6075		629292	

Находимъ 458. Остатокъ $R = 356727457679$; $a = 45800$; $3a^2 = 6292920000$. Раздѣливъ R на $3a^2$, находимъ въ частномъ 56. Искомый корень $= 45856$.

Вычисляемъ предѣлъ разности $\frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{x}{3a}\right)$. Такъ какъ $a > 4.10^4$, и $x < 10^2$, то $\frac{x^2}{a} < \frac{1}{4}$. Затѣмъ, $3a > 12.10^4$, сл. $\frac{x}{3a} < \frac{1}{12 \times 10^2}$, а потому $1 + \frac{x}{3a} < 1 + \frac{1}{12.10^2}$. Отсюда: $\frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{x}{3a}\right) < \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{12.10^2}\right)$ т. е. < 1. Сл. и $\frac{r}{3a^2} - \frac{x^2}{a}\left(1 + \frac{x}{3a}\right) < 1$ Корень 45856 ошибоченъ меньше чѣмъ на 1, и какъ легко убѣдиться — по недостатку.

178. Задачи.

Извлечь кубичный корень изъ чиселъ:

1. 4913. 2. 12167. 3. 32768. 4. 132651. 5. 74088. 6. 238328. 7. 405224. 8. 778688. 9. 3652264. 10. 9663597. 11. 71473375. 12. 30959144. 13. 137388096. 14. 91733851. 15. 622835864. 16. 849278123. 17. 6118445789. 18. 134453795867. 19. 29704594907. 20. $\frac{2197}{3375}$. 21. $\frac{5832}{9261}$. 22. $2460\frac{3}{8}$. 23. $151\frac{19}{27}$. 24. $1815\frac{106}{125}$. 25. 0,000729. 26. 0,017576. 27. 0,000068921. 28. 0,010503459. 29. 0,055306341. 30. 0,000614125.

Извлечь кубичные корни изъ слѣдующихъ чиселъ съ указаннымъ приближеніемъ:

31. 4 до $\frac{1}{9}$. 32. 15 до $\frac{1}{15}$. 33. $88\frac{3}{8}$ до $\frac{1}{8}$. 34. $34\frac{3}{4}$ до $\frac{1}{11}$. 35. 410 до $\frac{1}{13}$. 36. 3 до 0,01. 37. 24 до 0,01. 38. 7 до 0,001. 39. 547,91 до 0,001. 40. 950,35 до 0,0001. 41. 0,36 до 0,0001. 42. $\frac{217}{25}$ до 0,001. 43. $56\frac{7}{9}$ до 0,001. 44. $\frac{20}{47}$ до 0,01. 45. $\frac{75,745}{0,82}$ до 0,01.

Извлеченіе кубичнаго корня изъ многочленовъ.

179. Пусть требуется извлечь кубичный корень изъ многочлена

$$-125a^9x^{12} + 150a^8x^{11} + 165a^7x^{10} - 172a^6x^9 - 99a^5x^8 + 54a^4x^7 + 27a^3x^6,$$

расположеннаго по убывающимъ степенямъ буквы x, которую мы принимаемъ за главную. Допуская, что многочленъ этотъ есть точный кубъ, и что корень изъ него, также расположенный по убывающимъ степенямъ буквы x, есть $p + q + r + s + \ldots$, замѣчаемъ, что данный многочленъ долженъ быть равенъ ку-

бу своего корня, т. е. $(p+q+r+s+\ldots)^3$. Такимъ образомъ имѣемъ тождество:

$$-125a^9x^{12}+150a^8x^{11}+165a^7x^{10}-172a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6=$$
$$p^3+3p^2q+3pq^2+q^3+3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3+\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

По свойству тождества, высшіе члены обѣихъ частей должны быть равны, а потому $p^3=-125a^9x^{12}$, откуда

$$p=\sqrt[3]{-125a^9x^{12}}=-5a^3x^4.$$

Отсюда заключаемъ: *для нахожденія высшаго члена корня нужно извлечь кубичный корень изъ высшаго члена даннаго многочлена.*

Вычитанія изъ первой части тождества (1) $-125a^9x^{12}$, а изъ второй — равное этому количество p^3, найдемъ тождество:

$$150a^8x^{11}+165a^7x^{10}-172a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6=3p^2q+3pq^2+q^3+$$
$$+3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3+\ldots\ldots(2).$$

а потому высшіе по буквѣ x члены обѣихъ частей должны быть равны, т. е. $3p^2.q=150a^8x^{11}$, или, такъ-какъ $p=-5a^3x^4$, то $3.25a^6x^8.q=150a^8x^{11}$, откуда

$$q=150a^8x^{11}:75a^6x^8=2a^2x^3.$$

Отсюда заключеніе: *чтобы найти второй членъ корня, нужно изъ даннаго полинома вычесть кубъ перваго члена и высшій членъ перваго остатка раздѣлить на утроенный квадратъ высшаго члена корня.*

Вычтемъ изъ второй части тождества (2) $3p^2q+3pq^2+q^3$, а изъ первой равное этому выраженіе: $3.(-5a^3x^4)^2.2a^2x^3+3(-5a^3x^4).(2a^2x^3)^2+(2a^2x^3)^3$ или $150a^8x^{11}-60a^7x^{10}+8a^6x^9$; найдемъ тождество

$$225a^7x^{10}-180a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6=3(p+q)^2r+$$
$$+3(p+q)r^2+r^3+\ldots(3).$$

Приравнивая снова высшіе члены обѣихъ частей, получимъ равенство

$$3p^2r=225a^7x^{10},\text{ или }3.25a^6x^8.r=225a^7x^{10},\text{ откуда}$$
$$r=225a^7x^{10}:75a^6x^8=3ax^2.$$

Отсюда заключаемъ: *чтобы найти третій членъ корня, нужно изъ перваго остатка вычесть утроенное произведеніе квадрата 1-го члена корня на 2-ой + утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ втораго и кубъ втораго, и первый членъ втораго остатка раздѣлить на утроенный квадратъ 1-го члена корня.*

Вычтемъ изъ второй части тождества (3) выраженіе $3(p+q)^2r+3(p+q)r^2+r^3$, а изъ первой равное ему количество: $3(-5a^3x^4+2a^2x^3)^2.3ax^2+3(-5a^3x^4+2a^2x^3).(3ax^2)^2+(3ax^2)^3=225a^7x^{10}-180a^6x^9+36a^5x^8-135a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6=225a^7x^{10}-180a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6$. По вычитаніи въ остаткѣ въ 1-ой части получается ноль; поэтому, данный полиномъ есть точный кубъ, и искомый корень $=-5a^3x^4+2a^2x^3+3ax^2$.

Дѣйствіе располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$-125a^9x^{12}+150a^8x^{11}+165a^7x^{10}-172a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6$	$-5a^3x^4+2a^2x^3+3ax^2$
$\pm 125a^9x^{12}$	$75a^6x^8$
$+150a^8x^{11}+165a^7x^{10}-172a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6$	$3.25a^6x^8.2a^2x^3+3.(-5a^3x^4).4a^4x^6+(2a^2x^3)^3$
$-150a^8x^{11}\pm 60a^7x^{10}\mp 8a^6x^9$	$75a^6x^8$
$225a^7x^{10}-180a^6x^9-99a^5x^8+54a^4x^7+27a^3x^6$	$3(-5a^3x^4+2a^2x^3)^2.3ax^2+$
$-225a^7x^{10}\pm 180a^6x^9\mp 36a^5x^8\mp 54a^4x^7\mp 27a^3x^6$	$+3(-5a^3x^4+2a^2x^3).9a^2x^4+27a^3x^6$
$\pm 135a^5x^8$	
0	

Отсюда выводимъ слѣдующее

180. *Правило. Расположивъ полиномъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, извлекаемъ кубичный корень изъ перваго его члена: получаемъ первый членъ корня.*

Вычтя кубъ его изъ даннаго полинома, найдемъ первый остатокъ; раздѣливъ первый членъ этого остатка на утроенный квадратъ перваго члена корня, въ частномъ получимъ второй членъ корня.

Вычтя изъ перваго остатка утроенное произведенiе квадрата перваго члена корня на второй, утроенное произведенiе перваго члена на квадратъ втораго и кубъ втораго члена корня, получимъ второй остатокъ. Раздѣливъ первый его членъ на утроенный квадратъ перваго члена корня, получимъ въ частномъ третiй членъ корня.

Вычтя изъ втораго остатка утроенное произведенiе квадрата суммы первыхъ двухъ членовъ корня на третiй, утроенное произведенiе суммы первыхъ двухъ членовъ на квадратъ третьяго и кубъ третьяго члена, найдемъ третiй остатокъ. Раздѣливъ первый его членъ на утроенный квадратъ перваго члена корня, получимъ въ частномъ четвертый членъ корня и т. д.

Дѣйствiе продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ получится ноль.

181. Когда неизвѣстно, представляетъ-ли данный полиномъ точный кубъ или нѣтъ, примѣняютъ къ нему правило § 180, замѣчая, что будетъ-ли полиномъ расположенъ по нисходящимъ, или по восходящимъ степенямъ главной буквы, всегда можно предвидѣть степень послѣдняго члена корня, въ предположенiи, что данный многочленъ есть точный кубъ; она должна быть втрое меньше степени послѣдняго члена его. Когда данный полиномъ есть точный кубъ, послѣднiй членъ корня долженъ равняться кубичному корню изъ послѣдняго члена полинома, а слѣдующiй остатокъ долженъ быть нулемъ. Въ противномъ случаѣ данный многочленъ не есть точный кубъ.

182. Задачи.

Извлечь кубичный корень изъ многочленовъ:

1. $6x^8y+8y^3+x^{12}+12x^4y^2$.

2. $8a^3+36a^2b-12a^2c+27b^3+54ab^2+6ac^2-27b^2c+9bc^2-c^3-36abc$.

3. $147x^2v-126xuv+343x^3-441x^2u-27u^3+v^3+189xu^2+21xv^2+27u^2v-9uv^2$.

4. $8a^9+36a^8b+102a^7b^2+159a^6b^3+168a^5b^4+69a^4b^5-2a^3b^6-39a^2b^7+$
$+12ab^8-b^9$.

5. $\frac{9}{4}b^7y^5 - 8b^3y^6 + 36b^5y^7 + \frac{1}{8}b^6y^3 - \frac{3}{2}b^5y^4 + 27b^9y^9 - 18b^6y^6 + 6b^4y^5 + \frac{27}{2}b^8y^7 - 54b^7y^8$.

6. $\frac{a^9b^3}{x^6} - \frac{a^3b^9}{y^6} + \frac{3a^8b^4}{x^5y} + \frac{3a^4b^8}{xy^5} - \frac{5a^6b^6}{x^3y^3}$.

ГЛАВА XIV.

Объ ирраціональныхъ числахъ.

Происхожденіе ирраціональныхъ чиселъ.— Несоизмѣримыя величины въ геометріи.— Способъ предѣловъ. — Распространеніе основныхъ законовъ дѣйствій на числа несоизмѣримыя.

183. Изученіе обратныхъ дѣйствій служитъ источникомъ для открытія новыхъ разрядовъ величинъ. Такъ, три прямыя ариѳметическія дѣйствія надъ цѣлыми числами, т. е. сложеніе, умноженіе, которое есть только частный случай сложенія, и возвышеніе въ степень — частный случай умноженія, даютъ въ результатѣ всегда только цѣлыя числа. При изученіи же трехъ обратныхъ дѣйствій — вычитанія, дѣленія и извлеченія корня, открываются новые роды величинъ, а именно: вычитаніе приводитъ къ открытію отрицательныхъ величинъ, дѣленіе — къ открытію дробныхъ, а извлеченіе корня приводитъ къ двумъ новымъ разрядамъ величинъ — несоизмѣримыхъ и мнимыхъ. Въ этой главѣ мы займемся изученіемъ чиселъ *несоизмѣримыхъ* или *ирраціональныхъ*.

184. Происхожденіе ирраціональныхъ чиселъ при извлеченіи корня.

Обобщимъ теоремы §§ 130, 143, 163 и 172 для корня какого угодно порядка.

Теорема I. *Если цѣлое число* A *есть неточная* n-*ая степень, то корень* n-*го порядка изъ него — несоизмѣримъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ A не есть точная n-ая степень другаго цѣлаго числа, то $\sqrt[n]{A}$ не можетъ равняться никакому цѣлому числу. Допустивъ же, что этотъ корень равняется несократимой дроби $\frac{p}{q}$, т. е. допустивъ возможность равенства

$$\sqrt[n]{A} = \frac{p}{q},$$

имѣли-бы отсюда, что

$$A = \frac{p^n}{q^n}.$$

Но p есть число первое съ q, слѣд. p^n — первое съ q^n, а потому $\frac{p^n}{q^n}$ не можетъ равняться цѣлому числу A, и допущенное равенство невозможно. Итакъ, корень n-го порядка изъ цѣлаго числа, не представляющаго точной n-ой степени, *несоизмѣримъ съ единицею.*

Таковы; $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{32}$, $\sqrt[5]{53}$, и т. д.

Теорема II. *Корень* n-*го порядка изъ несократимой дроби* $\frac{A}{B}$ *несоизмѣримъ, если его нельзя извлечь отдѣльно изъ числителя и знаменателя.*

Въ самомъ дѣлѣ, равенство $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=P$, гдѣ P — число цѣлое, невозможно ибо оно приводитъ къ равенству $\frac{A}{B}=P^n$, выражающему, что несократимая дробь равна цѣлому числу. Такимъ образомъ, искомый корень не можетъ быть выраженъ цѣлымъ числомъ. Но онъ не можетъ быть точно выраженъ и конечною дробью. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ равенство $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{C}{D}$, гдѣ $\frac{C}{D}$ — дробь несократимая; имѣемъ: $\frac{A}{B}=\frac{C^n}{D^n}$, гдѣ вторая часть — также дробь несократимая. Равенство этихъ дробей возможно только тогда, когда $A=C^n$, и $B=D^n$, т. е. когда A и B суть точныя n-ыя степени; если же этого нѣтъ то, $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$ нельзя точно выразить ни въ цѣлыхъ единицахъ, ни въ доляхъ единицы, слѣд. корень этотъ будетъ несоизмѣримъ.

Таковы: $\sqrt[3]{\frac{27}{44}}$, $\sqrt[4]{\frac{2}{7}}$ и т. п.

185. Хотя ирраціональныя числа нельзя вычислять точно, но всегда можно ихъ опредѣлять *съ какою угодно степенью точности.*

Пусть, напр., требуется вычислить $\sqrt[n]{A}$, гдѣ A есть цѣлое число, не представляющее точной n-ой степени, съ ошибкою меньшею $\frac{1}{p}$, гдѣ p—какъ угодно большое цѣлое число. Умноживъ и раздѣливъ данный корень на p, получимъ (подведя множителя p подъ знакъ корня):

$$\sqrt[n]{A}=\frac{p\sqrt[n]{A}}{p}=\frac{\sqrt[n]{Ap^n}}{p}.$$

Если наибольшая n-ая степень, содержащаяся Ap^n будетъ цѣлое число r^n, то $r+1>\sqrt[n]{Ap^n}>r$, откуда, раздѣливъ всѣ три числа на p, и замѣтивъ, что $\frac{\sqrt[n]{Ap^n}}{p}=\sqrt[n]{A}$, найдемъ

$$\frac{r+1}{p}>\sqrt[n]{A}>\frac{r}{p},$$

откуда прямо слѣдуетъ, что какъ $\frac{r}{p}$, такъ и $\frac{r+1}{p}$ выражаютъ $\sqrt[n]{A}$ приближенно, съ ошибкою меньшею $\frac{1}{p}$: требуемое доказано.

Точно также, если $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$, гдѣ $\frac{A}{B}$ дробь несократимая, нельзя вычислить точно, то можно найти его съ какимъ угодно приближеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, помноживъ числ. и знам. на B^{n-1}, найдемъ:

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\sqrt[n]{\frac{AB^{n-1}}{B^n}}=\frac{\sqrt[n]{AB^{n-1}}}{B};$$

но, по предыдущему, всегда можно найти двѣ дроби, рознящіяся меньше чѣмъ на $\frac{1}{p}$ отъ $\sqrt[n]{AB^{n-1}}$; пусть эти дроби будутъ $\frac{k}{p}$ и $\frac{k+1}{p}$, такъ что

$$\frac{k+1}{p}>\sqrt[n]{AB^{n-1}}>\frac{k}{p};$$

раздѣливъ всѣ три числа на B, найдемъ.

$$\frac{k+1}{Bp}>\sqrt[n]{\frac{A}{B}}>\frac{k}{Bp},$$

откуда заключаемъ, что крайнія дроби выражаютъ искомый корень съ ошибкою, меньшею $\frac{1}{Bp}$.

186. Несоизмѣримыя величины въ геометріи. Геометрія также представляетъ примѣры несоизмѣримыхъ величинъ; извѣстнѣйшія изъ нихъ: окружность круга и діаметръ, діагональ квадрата и сторона. Чтобы показать, какимъ образомъ можно убѣдиться геометрически въ несоизмѣримости двухъ линій, докажемъ à priori, — сравненіемъ на самомъ дѣлѣ этихъ линій, что *діагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороной.*

Проведемъ діагональ AC квадрата ABCD и продолжимъ ее за точку A. Изъ A; какъ изъ центра радіусомъ AB опишемъ полуокружность, которая пересѣчетъ діагональ и ея продолженіе въ точкахъ M и N. Для доказательства, что AC несоизмѣрима съ AB, постараемся измѣрить первую изъ этихъ линій помощію второй.

Итакъ, составимъ отношеніе $\frac{AC}{AB}$.

Мы имѣемъ: $AC=AM+MC=AB+MC$, откуда

Черт. 9.

$$\frac{AC}{AB}=1+\frac{MC}{AB}=1+\frac{1}{\frac{AB}{MC}}\quad\ldots\ (1).$$

Вопросъ приводится къ опредѣленію отношенія $\frac{AB}{MC}$. Замѣчая, что CB есть касательная, а CN — сѣкущая къ окружности имѣемъ:

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2=CM\times CN,$$

откуда

$$\frac{AB}{MC}=\frac{CN}{AB}.$$

Но $CN=NA+AM+MC=2AB+MC$, поэтому

$$\frac{AB}{MC}=\frac{2AB+MC}{AB}=2+\frac{MC}{AB}=2+\frac{1}{\frac{AB}{MC}}\quad\ldots\ (2).$$

Вносим эту величину въ равенство (1), находимъ

$$\frac{AC}{AB}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\left(\frac{AB}{MC}\right)}}$$

Итакъ, снова приходится опредѣлять отношеніе $\frac{AB}{MC}$. Но эта величина намъ извѣстна: она опредѣляется равенствомъ (2); такимъ образомъ снова мы введемъ $\frac{AB}{MC}$, которое опять нужно будетъ замѣнить его величиною изъ (2), и т. д. Такія подстановки будутъ продолжаться неограниченно, такъ-что дѣйствіе никогда не можетъ быть закончено, потому что всегда будемъ получать отношеніе $\frac{AB}{MC}$. Итакъ, отношеніе $\frac{AC}{AB}$ представляется въ видѣ

$$\frac{AC}{AB}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$

такъ-что оно никогда не можетъ быть вычислено съ точностію: линіи AC и AB— суть, слѣдовательно, линіи несоизмѣримыя.

187. Дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами подчинены тѣмъ же законамъ, какъ и дѣйствія надъ числами соизмѣримыми. Доказательство этого положенія основано на особомъ способѣ, называемомъ *способомъ предѣловъ*, съ начальными основаніями котораго намъ необходимо, поэтому, теперь-же ознакомиться.

Способъ предѣловъ.

188. Количество называется *постояннымъ*, если въ данномъ вопросѣ оно не измѣняетъ своей величины. Такъ: радіусъ въ данномъ кругѣ есть величина постоянная, также сумма угловъ треугольника и т. п.

Количество наз. *перемѣннымъ*, если оно не имѣетъ одной опредѣленной величины, но измѣняется въ болѣе или менѣе широкихъ границахъ. Напр., углы треугольника, хорда круга, и т. п.

Если перемѣнная величина, измѣняясь, приближается къ нѣкоторой постоянной, такъ-что разность между ними можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою, то постоянная называется *предѣломъ* перемѣнной. Для выясненія понятія о предѣлѣ приводимъ слѣдующіе примѣры.

Примѣръ I. — Разсмотримъ выраженіе $1+\frac{1}{x}$, въ которомъ буквѣ x будемъ послѣдовательно давать цѣлыя положительныя значенія: 1,2,3,. . . .; тогда $1+\frac{1}{x}$ будетъ принимать величины: $1+\frac{1}{1}$, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{3}$,. . . . постепенно уменьшающіяся и приближающіяся къ 1.

Слѣд. $1+\frac{1}{x}$ будетъ количество перемѣнное, приближающееся къ постоянному числовому значенію — къ 1.

При этомъ, разность между перемѣннымъ $1+\frac{1}{x}$ и постояннымъ 1 выражается дробью $\frac{1}{x}$, которая можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою; въ самомъ дѣлѣ, желая, чтобы эта разность была меньше $\frac{1}{100000}$, нужно только x — судать величину, большую 100000.

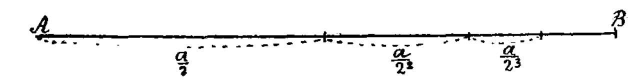
Заключаемъ, что предѣломъ перемѣнной $1+\frac{1}{x}$, въ данномъ случаѣ, будетъ 1.

Слово предѣлъ означаютъ буквами *lim* (отъ франц. слова *limite* — предѣлъ), такъ — что можемъ предыдущій результатъ письменно выразить такъ:

$$lim\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Примѣръ II. — Разсмотримъ еще величину a, выраженную линіей AB.

Раздѣлимъ эту линію пополамъ, потомъ одну изъ половинъ еще пополамъ и т. д. до безконечности. Величина AB будетъ имѣть два выраженія: одно



Черт. 10.

a — постоянное, другое

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{a}{2^n}+\frac{a}{2^{n+1}}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

состоящее изъ безконечнаго числа членовъ: это будетъ величина перемѣнная, увеличивающаяся съ возрастаніемъ n, и все болѣе и болѣе приближающаяся къ a. Если взять въ этой суммѣ n первыхъ членовъ, то она будетъ меньше a на $\frac{a}{2^n}$; чѣмъ больше будетъ n, тѣмъ эта разница будетъ ближе къ нулю, никогда, однако, его не достигая. Итакъ a есть предѣлъ перемѣнной $\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+$ · · · · · при неограниченномъ увеличеніи n.

189. Замѣтимъ, что одного приближенія перемѣнной величины къ постоянной еще недостаточно для того, чтобы постоянную принять за предѣлъ перемѣнной: необходимо, чтобы разность между ними могла быть сдѣлана какъ угодно малою. Такъ, періодическая дробь 0,9898. . . ., по мѣрѣ увеличенія числа десятичныхъ знаковъ, увеличивается, приближаясь къ 1, но 1 не есть предѣлъ этой дроби, ибо разность между 1 и данною дробью, сколько-бы въ послѣдней ни взяли десятичныхъ знаковъ, всегда больше $\frac{1}{99}$. Предѣлъ данной дроби есть $\frac{98}{99}$.

190. Выясняя понятіе о предѣлѣ, мы встрѣтились съ особаго рода величинами: перемѣнными, имѣющими свойство неограниченно уменьшаться, приближаясь къ нулю. Перемѣнная величина, неограниченно приближающаяся къ

нулю и слѣдовательно имѣющая предѣломъ нуль, получаетъ названіе *безконечно — малой*, если ее разсматривать въ состояніи близкомъ къ нулю. Такъ, разность между перемѣнною и ея предѣломъ, когда перемѣнная приближается къ своему предѣлу, есть безконечно — малая величина.

Нужно остерегаться смѣшивать понятія — *безконечно — малое* и *весьма малое*: эти понятія не имѣютъ ничего общаго между собою. Названіе весьма — малой примѣняется къ *постоянной* величинѣ, настолько малой, что она ускользаетъ отъ оцѣнки ея нашими чувствами. Напротивъ, безконечно — малая, будучи существенно перемѣнною, не имѣетъ опредѣленной величины, и слѣд. величина ея ни чѣмъ не связана съ нашими физическими средствами оцѣнки величинъ. Сущность безконечно-малой заключается въ томъ, что она имѣетъ свойство неограниченно уменьшаться, становясь какъ угодно близкою къ нулю.

191. *Безконечно — большою величиною* наз. такая перемѣнная, которая можетъ быть сдѣлана болѣе всякой напередъ заданной величины, какъ бы послѣдняя ни была велика.

Примѣромъ безконечно — большой величины можетъ служить дробь $\frac{1}{x}$, гдѣ x безконечно малая величина. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{x}$ можетъ быть сдѣлана больше всякой заданной величины: желая, напр., сдѣлать эту дробь больше 100000, достаточно взять x меньше 0,00001.

Понятіе о безконечно — большой величинѣ не слѣдуетъ смѣшивать съ понятіемъ о *весьма большой* величинѣ. Такъ, 1000000 верстъ есть величина весьма большая, но не есть безконечно — большая, ибо можно задать величину, которой она меньше. Названіе весьма большой дается величинѣ постоянной; напротивъ, безконечно — большая — есть величина существенно перемѣнная.

Не слѣдуетъ также смѣшивать понятіе о безконечно — большомъ съ *абсолютною безконечностью*, взятою въ обыкновенномъ смыслѣ. Абсолютная безконечность исключаетъ всякую идею ограниченія и численнаго опредѣленія, и потому не можетъ служить предметомъ математическаго изслѣдованія. —

192. Свойства безконечно - малыхъ. — *I. Сумма безконечно - малыхъ, взятыхъ въ ограниченномъ числѣ, есть величина безконечно - малая.* —

Возьмемъ n безконечно - малыхъ величинъ: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$; требуется доказать, что сумма ихъ можетъ быть сдѣлана меньше всякой произвольно малой величины α. Такъ - какъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ суть величины безконечно - малыя, то каждая изъ нихъ можетъ быть сдѣлана меньше $\frac{\alpha}{n}$, поэтому имѣемъ рядъ неравенствъ:

$$\alpha_1 < \frac{\alpha}{n},\quad \alpha_2 < \frac{\alpha}{n},\quad \alpha_3 < \frac{\alpha}{n},\quad \ldots,\quad \alpha_n < \frac{\alpha}{n}$$

Сложивъ ихъ, найдемъ:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n < \frac{\alpha}{n} \cdot n,$$

такъ какъ $\frac{\alpha}{n}$ берется слагаемымъ n разъ; или

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n < \alpha.$$

Итакъ, сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ можетъ быть сдѣлана меньше α, и требуемое доказано.

II. *Разность двухъ безконечно-малыхъ есть величина безконечно-малая.*

Дѣйствительно, если α_1 и α_2 суть величины безконечно-малыя, то уменьшивъ α_1 на α_2, получимъ разность $\alpha_1 - \alpha_2$ меньшую α_1, а потому и подавно безконечно-малую.

III. *Произведенiе нѣсколькихъ безконечно-малыхъ, взятыхъ въ опредѣленномъ числѣ, есть величина безконечно-малая.*

Возьмемъ n безконечно-малыхъ: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ и докажемъ, что произведенiе ихъ можетъ быть сдѣлано меньше произвольно малаго количеста α. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, будучи безконечно-малыми, могутъ быть сдѣланы меньше $\sqrt[n]{\alpha}$; поэтому имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 < \sqrt[n]{\alpha} \\ \alpha_2 < \sqrt[n]{\alpha} \\ \alpha_3 < \sqrt[n]{\alpha} \\ \vdots \\ \alpha_n < \sqrt[n]{\alpha} \end{array}\right\}$$

Перемноживъ эти неравенства, найдемъ:

$$\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \ldots . \alpha_n < \sqrt[n]{\alpha} . \sqrt[n]{\alpha} . \sqrt[n]{\alpha} \ldots . \sqrt[n]{\alpha},$$

или $$\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \ldots \alpha_n < (\sqrt[n]{\alpha})^n;$$

но, по опредѣленiю корня, $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$, слѣд.

$$\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \ldots \alpha_n < \alpha,$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствiе. Такъ-какъ степень есть произведенiе равныхъ множителей, то изъ предыдущей теоремы прямо слѣдуетъ, что степень съ конечнымъ цѣлымъ положительнымъ показателемъ безконечно-малой есть величина безконечно-малая.

IV. *Произведенiе безконечно-малой на величину конечную — безконечно мало.*

Пусть α_1 — безконечно-малое, а n — конечное количество; доказать, что $n\alpha_1$ можетъ быть сдѣлано меньше произвольно малаго количества α. Такъ какъ α_1 безконечно-мало, то всегда можно положить $\alpha_1 < \frac{\alpha}{n}$, откуда $\alpha_1 n < \frac{\alpha}{n} . n$, или $\alpha_1 n < \alpha$.

V. *Частное отъ раздѣленiя безконечно-малой величины на конечную есть безконечно-малая величина.*

Въ самомъ дѣлѣ, если α_1 безконечно-мало, то всегда можно сдѣлать $\alpha_1 < n\alpha$, гдѣ n — конечно, а α — произвольно мало; а отсюда $\frac{\alpha_1}{n} < \alpha$.

VI. *Корень съ конечнымъ цѣлымъ положительнымъ показателемъ изъ безконечно-малой величины есть величина безконечно-малая.*

Сохраняя прежнiя обозначенiя, имѣемъ: $\alpha_1 < \alpha^n$, ибо α_1 безконечно-мало; а извлекая корень n-ой степени изъ обѣихъ частей, найдемъ $\sqrt[n]{\alpha_1} < \alpha$.

193. Способъ находить постоянную величину, служащую предѣломъ перемѣнной, называется *способомъ предѣловъ*. Онъ основанъ на нижеслѣдующихъ теоремахъ.

194. Теорема I. — *Если постоянная величина* K *заключается между двумя перемѣнными* u *и* v (т. е. если $u < K < v$, или $u > K > v$), *разность которыхъ безконечно мала, то* K *служитъ общимъ предѣломъ перемѣнныхъ* u и v.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ-какъ K заключается между u и v, то разности $K-u$ и $K-v$ численно меньше разности $u-v$, т. е. безконечно-малой, а потому также безконечно-малы; отсюда, на основаніи опредѣленія предѣла, заключаемъ, что K служитъ общимъ предѣломъ перемѣнныхъ u и v.

Примѣръ. Окружность круга заключается между периметрами правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ описаннаго и вписаннаго, разность между которыми при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ становится безконечно-малою; заключаемъ, что окружность есть общій предѣлъ для обоихъ периметровъ.

195. Теорема II. *Если перемѣнная величина* v *заключается между перемѣнною* u *и ея предѣломъ* K, *то* v *имѣетъ тотъ же предѣлъ* K.

Въ самомъ дѣлѣ, K есть по условію предѣлъ перемѣнной u, слѣд. разность $K-u$ есть величина безконечно малая; но v заключается между u и K, слѣд. разность $K-v$ численно меньше разности $K-u$, т. е. и подавно безконечно-мала, а потому K есть предѣлъ перемѣнной v.

196. Теорема III. *Если двѣ перемѣнныя величины* u *и* v *связаны между собою такъ, что при всѣхъ измѣненіяхъ остаются равны между собою, или же разнятся одна отъ другой на безконечно-малую величину; если, притомъ, одна изъ нихъ стремится къ опредѣленному предѣлу, то и другая перемѣнная стремится къ тому же предѣлу.*

Дѣйствительно, пусть u и v будетъ двѣ перемѣнныя, разность между которыми равна нулю или безконечно-малой, тогда

$$u=v+\delta,$$

гдѣ δ равно o или безконечно мало; пусть, кромѣ того, u стремится къ предѣлу K; тогда, по опредѣленію предѣла, можно положить

$$u=K+\varepsilon,$$

гдѣ ε безконечно-мало. Сравнивая оба выраженія u, имѣемъ

$$v+\delta=K+\varepsilon,$$

откуда

$$v-K=\varepsilon-\delta.$$

Вторая часть равенства, какъ разность двухъ безконечно-малыхъ, безконечно-мала, слѣд. такова же и первая часть: значитъ v имѣетъ предѣломъ K — ту-же постоянную, что и u.

197. Теорема IV. *Если двѣ перемѣнныя* u *и* v *имѣютъ общій предѣлъ* K, *то всякая перемѣнная* w, *заключающая между* u *и* v, *имѣетъ тотъ же предѣлъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, если K служитъ предѣломъ для u и v, то

$$u=K+\delta \quad \text{и} \quad v=K+\varepsilon,$$

гдѣ δ и ε безконечно-малы. Вычитая второе равенство изъ перваго, имѣемъ:

$$u-v=\delta-\varepsilon,$$

т. е. $u-v$ есть безконечно-малая величина. Но w заключается между u и v, слѣд. разности $u-w$ и $w-v$ численно меньше безконечно-малой $\delta-\varepsilon$, а потому также безконечно-малы. Значитъ, перемѣнныя u и w — съ одной стороны,

и w и v — съ другой, связаны между собою такъ, что разнятся между собою на безконечно-малую величину, а потому, по теор. III, заключаемъ, что w имѣетъ тотъ же предѣлъ, что u и v, т. е. К.

198. Т е о р е м а V. *Предѣлъ суммы конечнаго числа перемѣнныхъ равенъ суммѣ ихъ предѣловъ.*

Пусть имѣемъ n перемѣнныхъ (гдѣ n — конечное число): $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которыхъ предѣлы соотвѣтствено равны: $K_1, K_2, \ldots, K_n$. По опредѣленію предѣла имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} K_1 - u_1 = \alpha_1 \\ K_2 - u_2 = \alpha_2 \\ K_3 - u_3 = \alpha_3 \\ \vdots \\ K_n - u_n = \alpha_n \end{array}\right\{$$

Здѣсь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ безконечно-малы. Складывая эти равенства, находимъ:

$$(K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_n) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Вторая часть этого равенства, какъ сумма конечнаго числа безконечно-малыхъ, безконечно мала, слѣд. равенство это показываетъ, что разность между постоянной $K_1 + K_2 + \ldots + K_n$ и перемѣнной $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ безконечно-мала, а слѣд. по опредѣленію предѣла, постоянная $K_1 + K_2 + \ldots + K_n$ служитъ предѣломъ перемѣнной $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, и теорема доказана.

199. Т е о р е м а VI. *Предѣлъ суммы перемѣнной и постоянной равенъ суммѣ постоянной и предѣла перемѣнной.*

Пусть перемѣнная u имѣетъ предѣлъ К; по опредѣленію предѣла имѣемъ: $u - K = \alpha$, гдѣ α — безконечно-малая величина. Прибавивъ и вычтя въ первой части постоянную a, найдемъ: $(u + a) - (K + a) = \alpha$. Это равенство показываетъ, что разность между перемѣнною $u + a$ и постоянною $K + a$ безконечно мала, а потому $K + a$ есть предѣлъ перемѣнной $u + a$, и теорема доказана.

200. Т е о р е м а VII. *Предѣлъ разности двухъ перемѣнныхъ равенъ разности ихъ предѣловъ.*

Пусть перемѣнныя u_1 и u_2 имѣютъ предѣлы K_1 и K_2; по опредѣленію предѣла имѣемъ:

$$u_1 - K_1 = \alpha_1 \quad \text{и} \quad u_2 - K_2 = \alpha_2,$$

гдѣ α_1 и α_2 безконечно-малы. Вычитая 2-е равенство изъ 1-го, имѣемъ:

$$(u_1 - u_2) - (K_1 - K_2) = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Но $\alpha_1 - \alpha_2$ — величина безконечно-малая; отсюда, по опредѣленію предѣла, заключаемъ, что перемѣнная $u_1 - u_2$ имѣетъ предѣломъ $K_1 - K_2$, и теорема доказана.

201. Т е о р е м а VIII. *Предѣлъ разности между перемѣнной и постоянной равенъ разности между предѣломъ перемѣнной и постоянною.*

Если перемѣнная u имѣетъ предѣломъ К, то, по опредѣленію предѣла, $u - K = \alpha$, гдѣ α — безконечно-мало. Вычтя и придавъ къ 1-й части равенства постоянную a, имѣемъ: $(u - a) - (K - a) = \alpha$. Этимъ равенствомъ и доказывается, что предѣлъ величины $u - a$ равенъ $K - a$.

202. Т е о р е м а IX. *Предѣлъ произведенія конечныхъ перемѣнныхъ, взятыхъ въ конечномъ числѣ, равенъ произведенію ихъ предѣловъ.*

Пусть двѣ перемѣнныя u_1 и u_2 имѣютъ предѣлы K_1 и K_2; въ такомъ случаѣ: $u_1 = K_1 + \alpha_1$ и $u_2 = K_2 + \alpha_2$, гдѣ α_1 и α_2 безконечно-малы. Перемножая оба равенства, имѣемъ

$$u_1.u_2 = (K_1 + \alpha_1)(K_2 + \alpha_2) = K_1.K_2 + \alpha_1.K_2 + \alpha_2.K_1 + \alpha_1.\alpha_2.$$

Произведенія $\alpha_1.K_2$ и $\alpha_2.K_1$, въ силу пункта IV §192, *а* $\alpha_1.\alpha_2$ — въ силу *п.* III того же §, безконечно-малы, а потому послѣднее равенство показываетъ, что перемѣнная $u_1.u_2$ разнится безконечно-мало отъ постоянной K_1K_2, сл. эта постоянная и есть предѣлъ перемѣнной u_1u_2.

Теорема справедлива для скольких угодно множителей; это можно доказать, разсматривая произведеніе нѣсколькихъ перемѣнныхъ какъ одну перемѣнную и прилагая сюда теорему о двухъ перемѣнныхъ. Такимъ образомъ найдемъ: пред. $(u_1u_2u_3u_4)$ = пред. $(u_1u_2u_3)$. пред. u_4 = пред. (u_1u_2). пред. u_3. пред. u_4 =

пред, u_1. пред. u_2. пред. u_3. пред. u_4.

203. Теорема X. *Предѣлъ произведенія перемѣнной на постоянную равенъ произведенію этой постоянной на предѣлъ перемѣнной.*

Пусть u есть перемѣнная, предѣлъ которой $= K$, и a — данная постоянная.

По опредѣленію предѣла имѣемъ $u = K + \alpha$, гдѣ α — безконечно-мало. Помноживъ обѣ части равенства на a, получимъ: $u.a = K.a + \alpha.a$; но αa есть величина безконечно-малая (§192, IV), сл. Ka разнится безконечно-мало отъ ua, а потому пред. $(ua) = K.a$, и теорема доказана.

204. Теорема XI. *Если двѣ перемѣнныя при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ сохраняютъ постоянное, конечное, отношеніе, то и предѣлы ихъ имѣютъ то-же самое отношеніе.*

Пусть u_1 и u_2 двѣ перемѣнныя, отношеніе которыхъ всегда остается равнымъ постоянному m, т. е. $\frac{u_1}{u^2} = m$. Отсюда: $u_1 = u_2.m$; но по предыдущей теоремѣ: пред. $(u_1) = m \times$ пред. (u_2), откуда: $\frac{\text{пред. } (u_1)}{\text{пред. } (u_2)} = m$, и теорема доказана.

205. Теорема XII. *Предѣлъ отношенія двухъ конечныхъ перемѣнныхъ* u_1 *и* u_2 *равенъ отношенію ихъ предѣловъ* K_1 *и* K_2

Пусть $\frac{u_1}{u_2} = x$, откуда $u_1 = u_2.x$. Изъ этого равенства, на осн. теор. III §196 и теор. IX §202 имѣемъ: пред. (u_1) = пред. (u_2). пред. (x), а отсюда, раздѣливъ обѣ части на пред. (u_2), получимъ $\frac{\text{пред. } (u_1)}{\text{пред. } (u_2)}$ = пред. (x) или = пред. $\left(\frac{u_1}{u_2}\right)$.

206. Теорема XIII. *Предѣлъ частнаго отъ раздѣленія перемѣнной на конечную постоянную равенъ частному отъ раздѣленія предѣла перемѣнной на эту постоянную.*

Пусть предѣлъ перемѣнной u равенъ K, а постоянная $= m$. Положимъ $\frac{u}{m} = x$, откуда $u = mx$, гдѣ x — перемѣнная. По теор. III §196 и теор. X

§ 203 имѣемъ пред. (u) или $K = m$. пред. (x), откуда пред. $(x) = \frac{K}{m}$, или пред. $\left(\frac{u}{m}\right) = \frac{K}{m}$, что и требовалось доказать.

207. Теорема XIV. *Предѣлъ частнаго отъ раздѣленія конечной постоянной на конечную перемѣнную равенъ частному отъ раздѣленія этой постоянной на предѣлъ перемѣнной.*

Пусть данная постоянная $= a$, перемѣнная $= u$, и пусть $\frac{a}{u} = x$, гдѣ x перемѣнная; отсюда $a = ux$. Пусть пред. $(u) = K$, а пред. $(x) = L$; по опредѣленію предѣла: $u = K \pm \alpha$, $x = L \pm \beta$, гдѣ α и β — безконечно-малы. Перемножая эти равенства, имѣемъ: $u.x = (K \pm \alpha)(L \pm \beta) = KL \pm L\alpha \pm K\beta \pm \alpha\beta$. Три послѣдніе члена, представляя алгебраическую сумму безконечно малыхъ, могутъ давать въ результатѣ или безконечно-малую или нуль. Въ первомъ случаѣ вторая часть была-бы перемѣнная величина, а этого не можетъ быть, потому-что первая часть (ux) равна постоянной a; слѣдовательно $\pm L\alpha \pm K\beta \pm \alpha\beta$ обращается въ ноль, а потому $ux = K.L$, или замѣняя ux равной ей величиной a, находимъ: $a = K.L$, откуда $L = \frac{a}{K}$, что и треб. доказать.

208. Теорема XV. *Предѣлъ степени перемѣнной равенъ той же степени предѣла этой перемѣнной, полагая показатель цѣлымъ и положительнымъ числомъ.*

Пусть u^m есть данная степень; при m цѣломъ положительномъ она представляетъ произведеніе m перемѣнныхъ множителей $u.u \ldots . u$; если пред. $(u) = k$, то по теор. IX § 202 имѣемъ: пред. $(uu \ldots . u) = k.k \ldots . k$, или пред. $(u^m) = k^m$.

209. Теорема XVI. *Предѣлъ корня съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ изъ перемѣнной равенъ корню того же порядка изъ предѣла этой перемѣнной.*

Пусть имѣемъ $\sqrt[m]{u}$, гдѣ u — перемѣнное и m — цѣлое положительное число. Замѣтивъ, что $u = \left(\sqrt[m]{u}\right)^m$, по предыдущей теоремѣ имѣюемъ: пред.$(u) =$ [пред. $\left(\sqrt[m]{u}\right)]^m$; извлекая изъ обѣихъ частей корень m-го порядка находимъ:

$$\text{пред. } \left(\sqrt[m]{u}\right) = \sqrt[m]{\text{пред. } (u)}.$$

что и требовалось доказать.

Распространеніе основныхъ законовъ на несоизмѣримыя числа

210. Такъ какъ несоизмѣримыя числа суть такія, которыхъ величина не можетъ быть опредѣлена точно, то ихъ выражаютъ особыми знаками или символами, какъ π, $\sqrt{2}$ и т. п.

Всякое несоизмѣримое число есть предѣлъ, къ которому стремится нѣкоторое перемѣнное десятичное число, котораго десятичные знаки, въ неограниченномъ числѣ, слѣдуютъ опредѣленному закону (только не закону пе-

ріодичности, ибо въ этомъ случаѣ предѣломъ десятичнаго числа, какъ доказывается въ ариѳметикѣ, служитъ соизмѣримая дробь).

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ L — нѣкоторая линія, несоизмѣримая съ единицею λ. Нанеся λ на L столько разъ, сколько возможно, мы разобьемъ L на двѣ части: одна изъ нихъ A будетъ равна, напр., a разъ взятой λ, другая L_1 будетъ $< \lambda$. Нанеся $\frac{\lambda}{10}$ столько разъ, сколько возможно, на L_1, мы разложимъ L_1 на двѣ части: одна изъ нихъ A_1 будетъ равна a_1 разъ $\frac{\lambda}{10}$, другая L_2 — меньше $\frac{\lambda}{10}$. Повторяя эту операцію, нанесемъ $\frac{\lambda}{100}$ на L_2, получимъ $A_2 = a_2$ разъ $\frac{\lambda}{100}$ и $L_3 < \frac{\lambda}{100}$ и т. д.

Десятичное число $a,\ a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_n$ имѣетъ предѣломъ мѣру линіи L. Въ самомъ дѣлѣ, разность $L-(A_1+A_2+\ldots+A_n)$ равна L_{n+1}: слѣд., она меньше $\frac{\lambda}{10^n}$. Но $\frac{\lambda}{10^n}$ стремится къ нулю при неограниченномъ возрастаніи n, слѣд. L есть предѣлъ суммы $A_1+A_2+\ldots+A_n$, когда n неограниченно возрастаетъ.—Съ другой стороны, длины $A,\ A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ имѣютъ мѣрами: $a,\ \frac{a_1}{10},\ \frac{a_2}{10^2}, \ldots, \frac{a_n}{10^n}$, слѣд. сумма этихъ длинъ имѣетъ мѣрою десятичное число $a,\ a_1\, a_2 \ldots a_n$. Предѣлъ суммы $A+A_1+\ldots+A_n$, когда n неограниченно возрастаетъ, т. е. L, имѣетъ, слѣд., мѣрою предѣлъ этого десятичнаго числа, когда n увеличивается неограниченно.

Отсюда слѣдуетъ, что всегда имѣются два десятичныя числа, разнящіяся между собою менѣе чѣмъ на $\frac{1}{10^n}$, заключающія между собою опредѣленное несоизмѣримое число: это несоизмѣримое число будетъ общимъ предѣломъ сказанныхъ приближеній до $\frac{1}{10^n}$ по недостатку и по избытку, при неограниченномъ увеличеніи n.

Совершая дѣйствія надъ несоизмѣримыми числами, необходимо дать этимъ дѣйствіямъ *опредѣленія*, ибо точный смыслъ дѣйствій извѣстенъ только въ отношеніи соизмѣримыхъ чиселъ. Достаточно дать опредѣленія сложенія и умноженія; за обратными дѣйствіями мы сохранимъ ихъ общія опредѣленія.

211. Опредѣленіе суммы. Пусть требуется опредѣлить, что слѣдуетъ разумѣть подъ *суммою несоизмѣримыхъ чиселъ* π и $\sqrt{2}$.

Взявъ ихъ приближенныя величины точныя до $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\ldots$ по недостатку и по избытку, получимъ:

$3{,}1 < \pi < 3{,}2$	$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$
$3{,}14 < \pi < 3{,}15$	$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$
$3{,}141 < \pi < 3{,}142$	$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .

Отсюда, взявъ суммы, найдемъ два ряда: (A) и (B):

$$(A)\left\{\begin{array}{l} 3{,}1+\ \ 1{,}7 \\ 3{,}14+1{,}73 \\ 3{,}141+1{,}732 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r} 3{,}2+\ \ 1{,}8 \\ 3{,}15+1{,}74 \\ 3{,}142+1{,}733 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right\}(B)$$

Суммы группы (A) идутъ постоянно увеличиваясь, но всегда оставаясь конечными, ибо ихъ слагаемыя конечны; слѣд. эти суммы стремятся къ нѣкоторому предѣлу. Суммы группы (B) идутъ уменьшаясь, но оставаясь конечными, ибо ихъ слагаемыя конечны; слѣдовательно суммы и этой группы стремятся къ опредѣленному предѣлу. Каковы же эти предѣлы? Взявъ разность двухъ суммъ въ группахъ (A) и (B), соотвѣтствующихъ приближенію $\frac{1}{10^n}$, находимъ, что эта разность равна $\frac{2}{10^n}$; слѣд. при неограниченномъ возрастаніи n, она стремится къ нулю. Это значитъ, что оба сказанные предѣла равны. *Этотъ общій предѣлъ группъ* (A) *и* (B) *и называютъ суммою несоизмѣримыхъ* π *и* $\sqrt{3}$ *и изображаютъ ее въ видѣ* $\pi+\sqrt{3}$.

212. Свойства суммы. I. *Сумма двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.*

По опредѣленію суммы несоизмѣримыхъ чиселъ имѣемъ

$$\pi+\sqrt{2}=\text{пред. } (a+b),$$

называя буквою a—приближенную величину числа π, а буквою b— числа $\sqrt{2}$; точно также

$$\sqrt{2}+\pi=\text{пред. } (b+a).$$

Но приближенія a и b суть числа соизмѣримыя, слѣд. по теор. II § 15, $a+b$ всегда равно $b+a$; если же перемѣнныя величины при своихъ измѣненіяхъ остаются равными, то по теор. III § 196 и предѣлы ихъ равны; слѣд.

$$\pi+\sqrt{2}=\sqrt{2}+\pi.$$

II. *Придать сумму двухъ соизмѣримыхъ чиселъ — все равно что придать послѣдовательно каждое изъ нихъ.*

По опредѣленію суммы несоизмѣримыхъ чиселъ имѣемъ:

$$\sqrt{5}+(\pi+\sqrt{2})=\text{пред. } [a+(b+c)],$$

гдѣ a, b и c суть приближенныя величины чиселъ: $\sqrt{5}$, π и $\sqrt{2}$.

Точно такъ же

$$\sqrt{5}+\pi+\sqrt{2}=\text{пред. } (a+b+c);$$

но, какъ a, b и c соизмѣримы, то всегда

$$a+(b+c)=a+b+c;$$

предѣлы-же равныхъ перемѣнныхъ равны, слѣд.

$$\sqrt{5}+(\pi+\sqrt{2})=\sqrt{5}+\pi+\sqrt{2}.$$

213. Опредѣленіе произведенія. Опредѣлимъ произведеніе $\pi\times\sqrt{3}$. Для этого составимъ произведенія приближеній чиселъ π и $\sqrt{3}$, точныхъ до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... по недостатку, а также по избытку; такимъ образомъ получимъ двѣ группы произведеній:

$$(A)\left\{\begin{array}{l} 3,1\times1,7 \\ 3,14\times1,73 \\ 3,141\times1,732 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r} 3,2\times1,8 \\ 3,15\times1,74 \\ 3,142\times1,733 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}(B)$$

Произведенія группы (А) постепенно увеличиваются; но, оставаясь конечными, стремятся къ нѣкоторому предѣлу. Произведенія группы (В) идутъ уменьшаясь, но какъ онѣ остаются конечными, то приближаются также къ нѣкоторому предѣлу. Докажемъ, что предѣлъ обоихъ произведеній одинъ и тотъ же.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ для π и $\sqrt{3}$ приближенія, точныя до $\frac{1}{10^n}$ найдемъ

$$\frac{a}{10^n}<\pi<\frac{a+1}{10^n}$$

$$\frac{b}{10^n}<\sqrt{3}<\frac{b+1}{10^n}$$

Перемножая, получимъ:

$$\frac{a}{10^n}\times\frac{b}{10^n} \quad \text{и} \quad \frac{(a+1)}{10^n}\times\frac{(b+1)}{10^n}$$

Разность между этими приближенными произведеніями равна

$$\frac{1}{10^n}\left(\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^n}\right)+\frac{1}{10^{2n}}.$$

Членъ $\frac{1}{10^{2n}}$, по мѣрѣ неограниченнаго возрастанія n, стремится къ нулю, сумма $\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^n}$ стремится къ $\pi+\sqrt{3}$, т. е. остается конечною, множитель-же $\frac{1}{10^n}$ стремится къ нулю, а потому произведеніе $\frac{1}{10^n}\left(\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^n}\right)$ стремится къ нулю. Итакъ разность между перемѣнными приближенными произведеніями стремится къ нулю, а слѣд. сказанные предѣлы равны.

Этотъ общій предѣлъ рядовъ A *и* B *и называютъ произведеніемъ* π *на* $\sqrt{3}$.

214. Свойства произведенія. I. *Произведеніе двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей.*

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію произведенія несоизмѣримыхъ чиселъ, имѣемъ:

$$\pi.\sqrt{2} = \text{пред. } (a.b) \quad \text{и} \quad \sqrt{2}.\pi = \text{пред. } (b.a)$$

гдѣ a и b соизмѣримыя приближенія чиселъ π и $\sqrt{2}$. Но по свойству произведенія соизмѣримыхъ чиселъ всегда $ab = ba$; сл. и предѣлы этихъ перемѣнныхъ равны, т. е.

$$\pi.\sqrt{2} = \sqrt{2}.\pi.$$

II. *Чтобы умножить на произведеніе двухъ множителей, достаточно умножить послѣдовательно на каждый изъ нихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію (§ 213), имѣемъ:

$$\sqrt{5}.(\pi\sqrt{2}) = \text{пред. } [a(bc)];$$

и также $$\sqrt{5}.\pi.\sqrt{2} = \text{пред. } (abc).$$

Но, a, b и c соизмѣримы; слѣд. $a(bc) = abc$, а потому и предѣлы этихъ перемѣнныхъ равны, т. е,

$$\sqrt{5}(\pi\sqrt{2}) = \sqrt{5}.\pi.\sqrt{2}.$$

III. *Въ произведеніи сколькихъ угодно несоизмѣримыхъ множителей можно какъ угодно измѣнять порядокъ ихъ.*

Докажемъ сперва, что можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ. Пусть a есть произведеніе всѣхъ множителей, за исключеніемъ двухъ послѣднихъ: $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$. Полное произведеніе будетъ

$$a.\sqrt{2}\cdot\sqrt{5},$$

или, въ силу пункта II,

$$a.(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5});$$

но, въ силу п. I, это выраженіе $=$

$$a.(\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}),$$

а, на осн. п. II, это произведеніе равно

$$a.\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}.$$

Итакъ: $$a.\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = a\sqrt{5}\cdot\sqrt{2},$$

т. е. можно измѣнить порядокъ двухъ послѣднихъ множителей.

Отсюда слѣдуетъ, что можно измѣнить порядокъ всякихъ двухъ смежныхъ множителей, ибо ихъ можно разсматривать послѣдними въ произведеніи, составленномъ изъ нихъ и имъ предшествующихъ.

Изъ этого слѣдуетъ, что переставляя послѣдовательно смежные сомножители, можно каждый изъ нихъ помѣстить на какомъ угодно мѣстѣ произведенія. Слѣд. порядокъ сомножителей не вліяетъ на величину произведенія.

IV. *Чтобы умножить данное число на сумму двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ, нужно умножить его на каждое слагаемое отдѣльно и результаты сложить.*

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленіямъ, имѣемъ

$$\sqrt{5}\,.\,(\pi+\sqrt{2})=\text{пред. }[a(b+c)];$$

съ другой стороны:

$$\sqrt{5}\,.\,\pi+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\text{пред. }[ab+ac]=\text{пред. }[a(b+c)].$$

Слѣдовательно

$$\sqrt{5}\,.\,(\pi+\sqrt{2})=\sqrt{5}\,.\,\pi+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\,.$$

Итакъ, вообще, основные законы дѣйствій, доказанные для соизмѣримыхъ чиселъ, распространяются и на несоизмѣримыя.

ГЛАВА XV.

Объ ирраціональныхъ выраженіяхъ.

Происхожденіе ирраціональныхъ выраженій. — Преобразованіе ихъ и дѣйствія надъ ними. — Ирраціональныя дроби. — Примѣры. — Задачи.

215. Происхожденіе ирраціональныхъ выраженій. — Дѣйствіе извлеченія корня изъ алгебраическихъ выраженій не всегда возможно. Такъ, когда показатель подкореннаго количества не дѣлится на показателя корня, то извлеченіе корня можно только *обозначить*, но нельзя *выполнить* на самомъ дѣлѣ, напр. $\sqrt[5]{a^7}$ $\sqrt[10]{a^9}$ и т. д. Точно также, корень изъ многочлена, не представляющаго точной степени, не можетъ быть извлеченъ, а потому его только обозначаютъ при помощи знака $\sqrt{\ }$; примѣромъ можетъ служить $\sqrt{a^2+b^2}$. Подобнаго рода *выраженія, которыя нельзя привести къ раціональному виду, называютъ ирраціональными*, также *радикальными* или *коренными*.

Не слѣдуетъ смѣшивать ирраціональныхъ выраженій съ несоизмѣримыми числами: ирраціональное выраженіе можетъ представлять и соизмѣримыя и несоизмѣримыя числа, смотря по числовому значенію входящихъ въ него буквъ. Такъ, $\sqrt{a}$ представляетъ соизмѣримое число 3 при $a=9$, и несоизмѣримое число $\sqrt{7}$ при $a=7$; точно также, $\sqrt{a^2+b^2}$ представляетъ соизмѣримое число 5 при $a=3$ и $b=4$, и несоизмѣримое число $\sqrt{5}$ при $a=1$ и $b=2$.

Впослѣдствіи мы увидимъ, что $\sqrt[m]{A}$ имѣетъ m различныхъ значеній, имѣющихъ одну и ту-же абсолютную величину; въ этой главѣ мы изучимъ преобразованіе корней, ограничиваясь разсмотрѣніемъ ихъ абсолютныхъ значеній.

216. Преобразованіе ирраціональныхъ выраженій помощію выведенія множителей изъ подъ знака корня и введенія множителей подъ коренной знакъ.

I. *Если въ выраженіи* $\sqrt[m]{A}$ *подкоренное количество* A *разлагается на такіе два множителя, изъ которыхъ одинъ представляетъ точную степень съ*

показателемъ, равнымъ показателю корня, то этотъ множитель — извлеченіемъ изъ него корня — можетъ быть вынесенъ изъ-подъ знака корня.

Пусть $A = P^m \times Q$, гдѣ Q уже не есть точная m-ая степерь; въ такомъ случаѣ

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{P^m . Q};$$

примѣняя правило извлеченія корня изъ произведенія, и замѣчая, что $\sqrt[m]{P^m} = P$, найдемъ:

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{P^m \times Q} = \sqrt[m]{P^m} \times \sqrt[m]{Q} = P \times \sqrt[m]{Q}.$$

Примѣры. — 1. Упростить, выведеніемъ множителя изъ-подъ знака корня, выраженіе $\sqrt{50a^9b^{10}}$.

Подкоренное количество разлагается на два множителя $25a^8b^{10} \times 2a$, изъ которыхъ первый есть квадратъ $5a^4b^5$; слѣд.

$$\sqrt{50a^9b^{10}} = \sqrt{25a^8b^{10} \times 2a} = \sqrt{(5a^4b^5)^2} \times \sqrt{2a} = 5a^4b^5 . \sqrt{2a}.$$

2. Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\sqrt[3]{128a^{17}b^{12}c^2} = \sqrt[3]{64a^{15}b^{12} \times 2a^2c^2} = \sqrt[3]{(4a^5b^4)^3 . 2a^2c^2} = 4a^5b^4 . \sqrt[3]{2a^2c^2}.$$

3. Точно такимъ-же образомъ:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2b^4}{c^3d^3}} = \sqrt[3]{\frac{b^3}{c^3d^3} \times a^2b} = \frac{b}{cd} . \sqrt[3]{a^2b}.$$

4. $\sqrt[3]{(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^4-y^4)} = \sqrt[3]{(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^2+y^2)(x+y)(x-y)} =$

$$\sqrt[3]{(x+y)^3(x^2+y^2)^3(x-y)} = (x+y)(x^2+y^2)\sqrt[3]{x-y}.$$

5. $\sqrt[m]{\frac{a^{mp+3}b^{mq+3}}{c^{mr}d^{mr+1}}} = \sqrt[m]{\frac{a^{mp} . a^3 . b^{mq} . b^3}{c^{mr}d^{mr}d}} = \sqrt[m]{\frac{a^{mp}b^{mq}}{c^{mr}d^{mr}} . \frac{a^3b^3}{d}} = \frac{a^pb^q}{c^rd^r} . \sqrt[m]{\frac{a^3b^3}{d}}.$

II. *Если передъ радикаломъ находится множитель, то этотъ множитель можно внести подъ знакъ корня, возвысивъ въ степень, изображаемую показателемъ корня.*

Требуется доказать, что $P\sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{P^m . Q}$.

Замѣтивъ, что $P = \sqrt[m]{P^m}$, и что, по правилу извлеченія корня изъ произведенія (§125): $\sqrt[m]{A.B} = \sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{B}$, откуда обратно: $\sqrt[m]{A} . \sqrt[m]{B} = \sqrt[m]{AB}$, имѣемъ:

$$P \times \sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{P^m} \times \sqrt[m]{Q} = \sqrt[m]{P^m \times Q}:$$

требуемое, такимъ образомъ, доказано.

Примѣры.—Сдѣлать внесеніе множителей подъ знакъ корня въ примѣрахъ:

1. $(a-b) . \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)^2}{a-b}} = \sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{a^2-b^2}.$

2. $\frac{x-y}{x+y} . \sqrt[3]{\frac{(x+y)^4}{x^2-2xy+y^2}} = \sqrt[3]{\frac{(x+y)^4(x-y)^3}{(x-y)^2(x+y)^3}} = \sqrt[3]{(x+y)(x-y)} = \sqrt[3]{x^2-y^2}.$

Дѣйствія надъ ирраціональными выраженіями.

217. Подобныя ирраціональныя выраженія; ихъ приведеніе. — *Два ирраціональныя выраженія называются подобными, если у нихъ показатели корня и подкоренныя выраженія одинаковы*; такъ напр. $2b\sqrt{ac}$ и $-3x\sqrt{ac}$ суть иррац. выраженія подобныя; а $2\sqrt[3]{7b^2c}$ и $\sqrt{2ac}$ — неподобны. — Иногда корни, кажущіеся на первый взглядъ не — подобными, могутъ быть приведены къ виду подобныхъ ирраціональныхъ выраженій: для этого ихъ нужно упростить, сдѣлавъ, гдѣ возможно, вынесеніе множителей изъ-подъ знака корня. Напр. выраженія $\sqrt{27a^4x^3}$ и $\sqrt{12a^2x^5}$, имѣющія одинаковыхъ показателей корня, но неодинаковыя подкоренныя количества, кажутся съ перваго раза не-подобными; но сдѣлавъ въ нихъ вынесеніе изъ подъ знака корня, приведемъ ихъ къ виду

$$3a^2x\sqrt{3x} \text{ и } 2ax^2\sqrt{3x}, —$$

подобныхъ выраженій. Множители $3a^2x$ и $2ax^2$ при радикалахъ называются *коэффиціентами.*

Соединеніе нѣсколькихъ подобныхъ ирраціональныхъ выраженій въ одно называется ихъ приведеніемъ. Дѣйствіе это состоитъ въ томъ, что коэффиціенты подобныхъ иррац. выраженій заключаютъ въ скобки, къ которымъ и приписываютъ множителемъ общій корень. Примѣры:

I. Выраженіе: $\sqrt{27a^4x^3}-\sqrt{12a^2x^5}+\sqrt{75a^6x}$ приводится къ

$$3a^2x\sqrt{3x}-2ax^2\sqrt{3x}+5a^3\sqrt{3x};$$

выноси въ немъ общій корень и a за скобки, получимъ:

$$(3ax-2x^2+5a^2)a\sqrt{3x}.$$

II. Сдѣлать приведеніе въ выраженіи

$$\sqrt{10x^3}+\sqrt{20y}-\sqrt{5y}+\sqrt{40x^3}-\sqrt{80y}.$$

Вынесеніемъ множителей изъ-подъ радикаловъ выраженіе приводится къ виду

$$x\sqrt{10x}+2\sqrt{5y}-\sqrt{5y}+2x\sqrt{10x}-4\sqrt{5y};$$

приведя подобные члены, получимъ

$$3x\sqrt{10x}-3\sqrt{5y}.$$

218. Сложеніе и вычитаніе. — При сложеніи иррац. выраженій ихъ пишутъ рядомъ съ тѣми знаками, какіе они имѣютъ; при вычитаніи же приписываютъ къ уменьшаемому члены вычитаемаго съ обратными знаками; затѣмъ члены суммы или разности приводятъ къ простѣйшему виду, и, если окажутся въ числѣ ихъ подобные члены, дѣлаютъ приведеніе.

Примѣры. I. $\left(\sqrt[3]{54}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{250}\right)+\left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}}+0,5\sqrt{\frac{128}{9}}+\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}\right)$

$$=\sqrt[3]{54}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{250}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}}+0,5\sqrt{\frac{128}{9}}+\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$$

$$=\sqrt[3]{27\times 2}+\sqrt{\frac{1}{4}\times 2}-\sqrt[3]{125\times 2}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{9}\times 2}+0,5\sqrt{\frac{64}{9}\times 2}+\sqrt[3]{\frac{27}{8}\times 2}$$

$$= 3\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - 5\sqrt[3]{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + \frac{19}{12}\sqrt{2}.$$

II. $$\left(m^4n^3\sqrt[3]{\frac{5y}{m^9n^3}} + 6\sqrt[3]{\frac{5m^3n^6y}{8}}\right) - \left(8m^5n^4\sqrt[3]{\frac{5y}{8m^{12}n^6}} - m\sqrt[3]{\frac{5n^6y}{8}} + \sqrt[3]{\frac{135m^3n^6y}{8}}\right)$$

$$= m^4n^3\sqrt[3]{\frac{5y}{m^9n^3}} + 6\sqrt[3]{\frac{5m^3n^6y}{8}} - 8m^5n^4\sqrt[3]{\frac{5y}{8m^{12}n^6}} + m\sqrt[3]{\frac{5n^6y}{8}} - \sqrt[3]{\frac{135m^3n^6y}{8}}$$

$$= \frac{m^4n^3}{m^3n}\sqrt[3]{5y} + \frac{6.mn^2}{2}\sqrt[3]{5y} - \frac{8m^5n^4}{2m^4n^2}\sqrt[3]{5y} + \frac{m.n^2}{2}\sqrt[3]{5y} - \frac{3mn^2}{2}\sqrt[3]{5y}$$

$$= mn^2\sqrt[3]{5y} + 3mn^2\sqrt[3]{5y} - 4mn^2\sqrt[3]{5y} + \frac{mn^2}{2}\sqrt[3]{5y} - \frac{3mn^2}{2}\sqrt[3]{5y} = -mn^2\sqrt[3]{5y}.$$

219. Умноженіе. — Въ §125 было доказано, что

$$\sqrt[n]{A.B.C} = \sqrt[n]{A}\,.\sqrt[n]{B}\,.\sqrt[n]{C}\,;$$

написавъ это равенство въ обратномъ порядкѣ, найдемъ:

$$\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C} = \sqrt[n]{A.B.C};$$

Отсюда правило: *чтобы перемножить нѣсколько иррац. выраженій одинаковаго порядка, надо перемножить подрадикальныя количества и изъ произведенія извлечь корень того-же порядка.*

Примѣры. I. $\sqrt{2axy^4} \times \sqrt{6a^3xy^3} = \sqrt{12a^4x^2y^7} = 2a^2xy^3\sqrt{3y}.$

II. $\sqrt{ax+x^2}.\sqrt{ab+bx} = \sqrt{(ax+x^2)(ab+bx)} = \sqrt{bx(a+x)^2} = (a+x)\sqrt{bx}.$

III. $\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-b^3}} \times \sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-b^3}} = \sqrt[3]{a^2-(a^2-b^3)} = \sqrt[3]{b^3} = b.$

IV. $\left(a\sqrt{a} - \frac{1}{2}a^2\sqrt{a^3} + 3a^3\sqrt{a^7}\right) \times \left(-6\sqrt{a^3}\right) = -6a\sqrt{a^4} + 3a^2\sqrt{a^6} -$

$$-18a^3\sqrt{a^{10}} = -6a^3 + 3a^5 - 18a^8.$$

220. Дѣленіе.—Въ §126 было доказано, что

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}};$$

Написавъ это равенство въ обратномъ порядкѣ, имѣемъ:

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}.$$

Отсюда правило: *чтобы раздѣлить одинъ на другой два корня съ одинаковыми показателями, надо первое подрадикальное количество раздѣлить на второе, и изъ частнаго извлечь корень того же порядка.*

Примѣры. I. $14\sqrt[3]{9a^5} : 2\sqrt[3]{4a} = 7\sqrt[3]{\frac{9a^5}{4a}} = 7\sqrt[3]{\frac{9}{4}a^4} = 7a\sqrt[3]{\frac{9a}{4}}.$

II. $a : \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a^5} : \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a^5 : a^3} = \sqrt[5]{a^2}.$

III. $\frac{4}{3}a^3 - \frac{23}{6}a^2\sqrt{ab} + a^2b + \frac{3}{16}ab\sqrt{ab} \;\Big|\; 2a\sqrt{a} + \frac{1}{4}a\sqrt{b}$

$$-\frac{4}{3}a^3 \mp \frac{1}{6}a^2\sqrt{ab} \qquad \Big|\; \frac{2}{3}a\sqrt{a} - 2a\sqrt{b} + \frac{3}{4}b\sqrt{a}$$

$$-4a^2\sqrt{ab} + a^2b$$

$$\pm 4a^2\sqrt{ab} \pm \frac{1}{2}a^2b$$

$$\frac{3}{2}a^2b + \frac{3}{16}ab\sqrt{ab}$$

$$-\frac{3}{2}a^2b \mp \frac{3}{16}ab\sqrt{ab}$$

$$0$$

1) Вычисленіе 1-го члена частнаго: $\frac{4}{3}a^3 : 2a\sqrt{a} = \frac{4}{3}a^2\sqrt{a^2} : 2a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$.

2) Вычисленіе 2-го члена частнаго: $-4a^2\sqrt{ab} : 2a\sqrt{a} = -2a\sqrt{b}$.

3) Вычисленіе 3-го члена частнаго: $\frac{3}{2}a^2b : 2a\sqrt{a} = \frac{3}{2}ab\sqrt{a^2} : 2a\sqrt{a} = \frac{3}{4}b\sqrt{a}$.

221. Возвышеніе въ степень.—Пусть требуется $\sqrt[m]{a^k}$ возвысить въ p-ую степень, гдѣ m, k и p — цѣлыя положительныя числа. Это значитъ—данный корень взять множителемъ p разъ; слѣд.

$$\left(\sqrt[m]{a^k}\right)^p = \sqrt[m]{a^k} \times \sqrt[m]{a^k} \times \sqrt[m]{a^k} \;.\;.\;.\;.\;.\; (\text{всѣхъ множителей } p);$$

но, по правилу перемноженія корней (§ 219), вторая часть равна

$$\sqrt[m]{a^k.a^k.a^k.\;.\;.\;.\;.\;.\;(p \text{ разъ})} = \sqrt[m]{(a^k)^p}.$$

Итакъ:

$$\left(\sqrt[m]{a^k}\right)^p = \sqrt[m]{(a^k)^p}.$$

т. е. *чтобы корень возвысить въ степень, нужно въ эту степень возвысить подрадикальное выраженіе, и изъ результата извлечь корень даннаго порядка.*

Примѣры: I. $\left(\sqrt[5]{x^4y^3z}\right)^3 = \sqrt[5]{(x^4y^3z)^3} = \sqrt[5]{x^{12}y^9z^3} = x^2y\sqrt[5]{x^2y^4z^3}$.

II. $\left(\frac{3x^k}{5y}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^4}{y^5}}\right)^4 = \frac{81x^{4k}}{625y^4}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^{16}}{y^{20}}} = \frac{81x^{4k+5}}{625y^{10}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$.

222. Извлеченіе корня.—Пусть требуется извлечь корень m-го порядка изъ $\sqrt[p]{A}$; положимъ, что результатъ этого дѣйствія будетъ x, т. е. что

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{A}} = x \;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Возвышая обѣ части равенства въ степень m и замѣчая, что извлеченіе корня m-го порядка изъ $\sqrt[p]{A}$ и возвышеніе результата въ m-ую степень, какъ два противоположныя дѣйствія, взаимно уничтожаются, найдемъ:

$$\sqrt[p]{A} = x^m.$$

Возвышая обѣ части этого равенства въ степень p, получимъ

$$A = x^{mp};$$

а извлекая изъ обѣихъ частей корень порядка mp, найдемъ:

$$\sqrt[mp]{A} = x.$$

Подставивъ эту величну вмѣсто x въ равенство (1), получимъ:

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{A}} = \sqrt[mp]{A} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Отсюда правило: *чтобы извлечь корень изъ корня, нужно подкоренное количество оставить безъ перемѣны и извлечь изъ него корень, котораго показатель = произведенію показателей данныхъ корней.*

Примѣры. I. $\sqrt{\sqrt[3]{2ax^2}} = \sqrt[6]{2ax^2}$.

II. $\sqrt{9a^4\sqrt[3]{ab^2}} = 3a^2\sqrt[6]{ab^2}$.

Если равенство (2) прочесть въ обратномъ порядкѣ, то найдемъ, что извлеченіе корня, показатель котораго разлагается на множители, можно замѣнить послѣдовательнымъ извлеченіемъ корней, которыхъ показатели равны этимъ множителямъ. Напр.

1) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2.$

2) $\sqrt[12]{4096a^{24}b^4x^8} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4096a^{24}b^4x^8}}} = \sqrt[3]{\sqrt{64a^{12}b^2x^4}} = \sqrt[3]{8a^6bx^2} = 2a^2\sqrt[3]{bx^2}.$

223. Теорема. *Величина корня не измѣнится, если показатель подкореннаго количества и показатель корня помножить или раздѣлить на одно и тоже число.*

Мы видѣли, что если $\sqrt[m]{a^k}$ возвысить въ степень p, то получится $\sqrt[m]{a^{kp}}$; извлекая изъ полученнаго выраженія корень порядка p, на осн. § 222 найдемъ $\sqrt[mp]{a^{kp}}$. Такъ какъ надъ выраженіемъ $\sqrt[m]{a^k}$ мы произвели два противоположныя дѣйствія, то величина его не измѣнилась, а потому

$$\sqrt[m]{a^k} = \sqrt[mp]{a^{kp}}.$$

Итакъ: 1) данное выраженіе можно замѣнить равнымъ ему: $\sqrt[mp]{a^{kp}}$, т. е. величина ирраціональнаго выраженія не измѣняется отъ умноженія показателей корня и подкореннаго количества на одно и тоже число; 2) обратно, $\sqrt[mp]{a^{kp}}$ равенъ $\sqrt[m]{a^k}$, слѣд. величина корня не измѣнится отъ раздѣленія показателей корня и подкореннаго количества на одно и тоже число.

Слѣдствія.—I. На первомъ изъ этихъ свойствъ основано приведеніе ирраціональныхъ количествъ къ общему показателю корня. Для этого нужно составить наим. кратное всѣхъ показателей корней; оно и будетъ общимъ показателемъ; послѣдній дѣлятъ на показателей каждаго корня и соотвѣтствующими частными множатъ показатели корней и подкоренныхъ количествъ. При этомъ могутъ быть тѣ-же случаи, какъ и при приведеніи дробей къ общему знаменателю.

1. Всѣ показатели корней числа взаимно первыя, напр.

$$\sqrt{a}, \qquad \sqrt[3]{2ab^2}, \qquad \sqrt[5]{\frac{3a^3}{2c^2d}}$$

Общій показатель $=2\times3\times5=30$; раздѣливъ его поочередно на 2, на 3 и на 5, множимъ показатели корней и подрадикальныхъ выраженій: перваго — на 15, втораго — на 10, третьяго на 6; найдемъ:

$$\sqrt{a}=\sqrt[2.15]{a^{15}}=\sqrt[30]{a^{15}}.$$

$$\sqrt[3]{(2ab^2)^1}=\sqrt[3.10]{(2ab^2)^{10}}=\sqrt[30]{2^{10}.a^{10}.b^{20}}.$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{3a^3}{2c^2d}\right)^1}=\sqrt[5.6]{\left(\frac{3a^3}{2c^2d}\right)^6}=\sqrt[30]{\frac{3^6.a^{18}}{2^6c^{12}d^6}}.$$

2. Одинъ изъ показателей — число кратное для остальныхъ, напр.

$$\sqrt[3]{2A},\qquad \sqrt[6]{\frac{1}{3}A^2B},\qquad \sqrt[12]{C}.$$

Общій показатель корня $=12$; имѣемъ:

$$\sqrt[3]{2A}=\sqrt[12]{(2A)^4}=\sqrt[12]{16A^4}.$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{3}A^2B}=\sqrt[12]{\left(\frac{1}{3}A^2B\right)^2}=\sqrt[12]{\frac{1}{9}A^4B^2}.$$

$\sqrt[12]{C}$ остается безъ перемѣны

3. Показатели корней имѣютъ общихъ множителей; напр.

$$\sqrt[15]{A},\qquad \sqrt[12]{B},\qquad \sqrt[36]{C}$$

Общій показатель $=180$; получимъ:

$$\sqrt[15]{A}=\sqrt[15.12]{A^{12}}=\sqrt[180]{A^{12}};\ \sqrt[12]{B}=\sqrt[12.15]{B^{15}}=\sqrt[180]{B^{15}};\ \sqrt[36]{C}=\sqrt[36.5]{C^5}=\sqrt[180]{C^5}.$$

Примѣчаніе. Правила, данныя въ §§ 219 и 220 для умноженія корней, относятся къ случаю корней съ одинаковыми показателями; если же показатели корней различны, то ихъ сначала приводятъ къ общему показателю, а затѣмъ уже производятъ умноженіе и дѣленіе по упомянутымъ правиламъ.

Примѣры.—I. Составить произведеніе: $\sqrt{ab^3c}\times\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[6]{a^3b^2c^2}$.

Приведя корни къ общему показателю 6, получимъ;

$$\sqrt[6]{a^3b^9c^3}\times\sqrt[6]{a^4b^2}\times\sqrt[6]{a^3b^2c^2}=$$

$$\sqrt[6]{a^{10}b^{13}c^5}=\sqrt[6]{a^6b^{12}\times a^4bc^5}=ab^2.\sqrt[6]{a^4bc^5}.$$

II. Составить частное $\dfrac{\sqrt{ab^3c}}{\sqrt[3]{a^4bc^2}}$. Приведя корни къ общему показателю, получимъ

$$\frac{\sqrt[6]{a^3b^9c^3}}{\sqrt[6]{a^8b^2c^4}}=\sqrt[6]{\frac{a^3b^9c^3}{a^8b^2c^4}}=\frac{b}{ac}\sqrt[6]{abc^5}.$$

II. Вторая часть теоремы § 223 даетъ возможность *сокращать* ирраціональныя выраженія; для этого нужно показателя корня и показателей подкореннаго выраженія раздѣлить на ихъ общаго наиб. дѣлителя.

Такъ: $\sqrt[6]{4x^2y^8}=\sqrt[3]{2xy^4}$; $\sqrt[mn]{x^{np}b^nc^{nq}}=\sqrt[m]{x^pbc^q}$; $\sqrt[12]{16a^4b^8}=\sqrt[3]{2ab^2}$.

Ирраціональныя дроби.

224. Когда числитель, или знаменатель, или оба — ирраціональны, дробь называется *ирраціональною*. Въ видахъ упрощенія вычисленій, дроби съ знаменателями ирраціональными выгодно замѣнять равными имъ дробями, но имѣющими раціональные знаменатели. Такъ, если бы требовалось вычислить величину дроби

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},$$

то найдя $\sqrt{3}=1,732....$ и $\sqrt{2}=1,412...$, мы должны-бы были раздѣлить 1 на приближенное число 0.320.... Но если умножимъ предварительно числителя и знаменателя дроби на $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, то найдемъ

$$x=\sqrt{3}+\sqrt{2},$$

и простое сложеніе чиселъ 1,732.... и 1,412.... дастъ величину x,

$$x=3,144.....$$

Такимъ образомъ дѣйствіе дѣленія приведено къ простѣйшему дѣйствію — сложенію; другая выгода указаннаго преобразованія состоитъ въ томъ, что найденная для x величина 3,144.... допускаетъ непосредственное опредѣленіе предѣла погрѣшности, которая меньше 0,002, потому что каждое слагаемое ошибочно менѣе чѣмъ на 0,001.

Уничтоженіе ирраціональности въ знаменателѣ дроби возможно далеко не всегда, а лишь въ исключительныхъ случаяхъ. Разсмотримъ главнѣйшіе изъ нихъ.

225. Укажемъ пріемы, которыми можно уничтожить ирраціональность въ знаменателѣ, содержащемъ *только квадратные корни*.

1. $\frac{a}{b\sqrt{c}}$. Умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{c}$, получимъ

$$\frac{a}{b\sqrt{c}}=\frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2}=\frac{a\sqrt{c}}{bc}.$$

2. $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, найдемъ:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$$

3. $\frac{a}{m\sqrt{b}-n\sqrt{c}}$. Умножая числ. и знам. на $m\sqrt{b}+n\sqrt{c}$, получимъ;

$$\frac{a}{m\sqrt{b}-n\sqrt{c}}=\frac{a(m\sqrt{b}+n\sqrt{c})}{(m\sqrt{b})^2-(n\sqrt{c})^2}=\frac{a(m\sqrt{b}+n\sqrt{c})}{m^2b-n^2c}.$$

4. $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$. Умножая числ. и знам. на $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}$, найдемъ:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-d}=$$

$$=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})}{b+c-d+2\sqrt{bc}};$$

умножая оба члена этой дроби на $b+c-d-2\sqrt{bc}$, получимъ:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d})(b+c-d-2\sqrt{bc})}{(b+c-d)^2-4bc}.$$

Общій способъ исключенія изъ знаменателя квадратныхъ корней, каково бы ни-было ихъ число, заключается въ слѣдующемъ. Если $\sqrt{k}$ есть одинъ изъ радикаловъ, который мы хотимъ исключить, выносимъ его за скобки изъ всѣхъ членовъ, его содержащихъ; знаменатель приметъ видъ $P+Q\sqrt{k}$, гдѣ P и Q — раціональныя или ирраціональныя выраженія, не содержащія $\sqrt{k}$. Если теперь умножимъ оба члена дроби на $P-Q\sqrt{k}$, то новый знаменатель P^2-Q^2k уже не будетъ содержать $\sqrt{k}$. Такъ какъ произведенное умноженіе не вводитъ новыхъ радикаловъ, то очевидно, что примѣняя указанный пріемъ послѣдовательно къ каждому изъ нихъ, мы исключимъ всѣ радикалы.

Этотъ именно способъ мы и прилагали въ предыдущихъ примѣрахъ; приложимъ его еще къ дроби, содержащей въ знаменателѣ пять радикаловъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}}.$$

Умноживъ оба члена ея на $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}-\sqrt{e}$, получимъ новый знаменатель, въ которомъ f есть раціональная часть:

$$f+2(\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{a}\sqrt{c}+\sqrt{b}\sqrt{c})+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\sqrt{d}\,\ldots\ldots(1)$$

Умножая оба члена полученной дроби на выраженіе, выведенное изъ (1) перемѣною $\sqrt{d}$ на $-\sqrt{d}$, получимъ новый знаменатель, въ которомъ g представляетъ раціональную часть:

$$g+4(f+2c-2d)\sqrt{a}\sqrt{b}+4[(f+2b-2d)\sqrt{a}+(f+2a-2d)\sqrt{b}]\sqrt{c}\,\ldots(2).$$

Помножая оба члена новой дроби на выраженіе, выведенное изъ предыдущаго перемѣною $\sqrt{c}$ на $-\sqrt{c}$, получимъ новый знаменатель, котораго раціональная часть обозначена буквою h,

$$h+[8g(f+2c-2d)-32c(f+2a-2d)(f+2b-2d)]\sqrt{ab}\,\ldots\ldots(3)$$

Умножая, наконецъ, оба члена послѣдней дроби на выраженіе, выведенное изъ предыдущаго перемѣною $\sqrt{ab}$ на $-\sqrt{ab}$, и означая числителя новой дроби буквою A, найдемъ

$$\frac{A}{h^2-[8g(f+2c-2d)-32c(f+2a-2d)(f+2b-2d)]^2.ab},$$

дробь, которой знаменатель раціоналенъ.

Примѣчаніе I. — Взявъ, напр., дробь

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

и примѣняя къ ней указанный пріемъ, мы должны начать исключеніе съ большаго корня, такъ какъ вычисленія при этомъ будутъ проще. Умножая, поэтому, оба члена на $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$, найдемъ:

$$x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}.$$

Умножая оба члена этой дроби на $\sqrt{6}$, получимъ окончательно:

$$x=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}.$$

Примѣчаніе II. — Нерѣдко можно значительно упрощать вычисленія, пользуясь слѣдующимъ замѣчаніемъ.

Выраженіе $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$, состоящее изъ четырехъ радикаловъ, разлагается на два множителя вида $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, если числа a, b, c и d составляютъ кратную пропорцію.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть напр.

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k,\ \text{откуда}\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}}=\sqrt{k},\ \text{и слѣд.}\ \sqrt{a}=\sqrt{c}.\sqrt{k}\ \text{и}\ \sqrt{b}=\sqrt{d}.\sqrt{k}.$$

Знаменатель приметъ видъ

$$\sqrt{c}.\sqrt{k}+\sqrt{d}.\sqrt{k}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=\sqrt{c}\,(1+\sqrt{k})+\sqrt{d}\,(1+\sqrt{k})=(\sqrt{c}+\sqrt{d})(1+\sqrt{k})$$

$$\text{или}\ \frac{1}{\sqrt{c}}(\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{a}+\sqrt{c}).$$

Примѣнимъ это замѣчаніе къ дроби

$$x=\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}.$$

Такъ-какъ $10\times 21=15\times 14$, то, согласно сказанному, найдемъ:

$$x=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})};$$

умноживъ числ. и знам. на $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$, сразу уничтожимъ ирраціональность въ знаменателѣ, и найдемъ:

$$x=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}.$$

226. Пусть знаменатель содержитъ только радикалы *кубичные*.

1. $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$. Положивъ: $\sqrt[3]{a}=x$ и $\sqrt[3]{b}=y$, имѣемъ: $a=x^3$, $b=y^3$.

Взявъ разложеніе $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, и подставивъ вмѣсто x и y ихъ величины, найдемъ:

$$a+b=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}),$$

откуда видно, что отъ умноженія знаменателя дроби на $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ онъ обращается въ раціональное выраженіе, равное $a+b$. Итакъ, умноживъ числ. и знам. на указанный триномъ, получимъ

$$x=\frac{A(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}.$$

2. $\dfrac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$. Подобнымъ же образомъ, пользуясь разложеніемъ: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, найдемъ:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{A(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}.$$

3. $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$. Положивъ въ равенствѣ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

$x=\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}$, найдемъ

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc});$$

отсюда, умноживъ числителя и знам. данной дроби на

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc},$$

найдемъ: $$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{A(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc})}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Если abc есть точный кубъ, то преобразованіе окончено: новый знаменатель раціоналенъ; если же abc не есть точный кубъ, то представивъ знаменатель въ видѣ

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^3}-\sqrt[3]{27abc},$$

приводимъ вопросъ къ предыдущему случаю.

4. $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}$, съ условіемъ, что $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. Не трудно убѣдиться, что знаменатель можно представить въ видѣ произведенія двухъ множителей вида $\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$, и вопросъ приводится къ примѣру 1.

227. Если знаменатель дроби есть сумма или разность двухъ радикаловъ какого угодно порядка, то ихъ можно привести къ общему показателю корня; такимъ образомъ знаменатель будетъ вида $\sqrt[m]{a}\pm\sqrt[m]{b}$. Отсюда два случая:

I. $\frac{A}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}$. Положивъ $\sqrt[m]{a}=x$ и $\sqrt[m]{b}=y$, откуда $a=x^m$ и $b=y^m$, и замѣчая, что при всякомъ m — четномъ, или нечетномъ, имѣемъ:

$$x^m-y^m=(x-y)(x^{m-1}+x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots\ldots+xy^{m-2}+y^{m-1}),$$

подставивъ сюда вмѣсто x и y ихъ величины, найдемъ:

$$a-b=(\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}}+\sqrt[m]{a^{m-2}b}+\sqrt[m]{a^{m-3}b^2}+\ldots\ldots+\sqrt[m]{ab^{m-2}}+\sqrt[m]{b^{m-1}}).$$

Это равенство показываетъ, что если числит. и знам. данной дроби помножимъ на $\sqrt[m]{a^{m-1}}+\sqrt[m]{a^{m-2}b}+\ldots\ldots+\sqrt[m]{b^{m-1}}$, то знаменатель обратится въ раціональное выраженіе $a-b$; такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{A}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}=\frac{A(\sqrt[m]{a^{m-1}}+\sqrt[m]{a^{m-2}b}+\sqrt[m]{a^{m-3}b^2}+\ldots\ldots+\sqrt[m]{b^{m-1}})}{a-b}.$$

II. $\frac{A}{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}}$. Если m—число четное, то замѣчая, что разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится безъ остатка на сумму первыхъ степеней, имѣемъ:

$$x^m-y^m=(x+y)(x^{m-1}-x^{m-2}y+x^{m-3}y^2+\ldots\ldots-y^{m-1})$$

Подставляя сюда $\sqrt[m]{a}$ вмѣсто x, и $\sqrt[m]{b}$ вмѣсто y, дадимъ равенству видъ:

$$a-b=(\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}}-\sqrt[m]{a^{m-2}b}+\sqrt[m]{a^{m-3}b^2}-\ldots\ldots-\sqrt[m]{b^{m-1}}).$$

Отсюда видно, что для уничтоженія ирраціональности въ знаменателѣ дроби при m четномъ, надо оба члена ея помножить на $\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \ldots - \sqrt[m]{b^{m-1}}$. Сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{A}{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}} = \frac{A(\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \ldots\ldots - \sqrt[m]{b^{m-1}})}{a-b}$$

Если m — число нечетное, то припомнивъ, что сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на сумму первыхъ степеней, имѣемъ равенство:

$$x^m + y^m = (x+y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 - \ldots\ldots + y^{m-1});$$

положивъ въ немъ $x = \sqrt[m]{a}$ и $y = \sqrt[m]{b}$, имѣемъ:

$$a+b = (\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b})(\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \sqrt[m]{a^{m-3}b^2} - \ldots\ldots + \sqrt[m]{b^{m-1}}).$$

Отсюда слѣдуетъ, что для уничтоженія ирраціональности въ знаменателѣ данной дроби, при m нечетномъ, надо оба ея члена умножить на $\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \ldots\ldots + \sqrt[m]{b^{m-1}}$; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{A}{\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}} = \frac{A(\sqrt[m]{a^{m-1}} - \sqrt[m]{a^{m-2}b} + \ldots\ldots + \sqrt[m]{b^{m-1}})}{a+b}.$$

Примѣръ. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}$. Приводя корни къ общему показателю 6, получимъ дробь

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{b^2}}.$$

Множитель, обращающій знаменатель въ выраженіе раціональное, въ данномъ случаѣ есть

$$\sqrt[6]{(a^3)^5} - \sqrt[6]{(a^3)^4b^2} + \sqrt[6]{(a^3)^3(b^2)^2} - \sqrt[6]{(a^3)^2(b^2)^3} + \sqrt[6]{a^3(b^2)^4} - \sqrt[6]{(b^2)^5}, \text{ или}$$

$$\sqrt{a^5} - \sqrt{a^4}.\sqrt[3]{b} + \sqrt{a^3}.\sqrt[3]{b^2} - ab + \sqrt{a}.\sqrt[3]{b^4} - \sqrt[3]{b^5}.$$

Умноживъ имъ числитель и знаменатель дроби получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt{a^5} - a^2\sqrt[3]{b} + a\sqrt{a}.\sqrt[3]{b^2} - ab + \sqrt{a}.b\sqrt[3]{b} - b\sqrt[3]{b^2}}{a^3-b^2}.$$

228. Въ заключеніе этой главы приведемъ нѣсколько примѣровъ дѣйствій надъ ирраціональными выраженіями.

1. Провѣрить равенство:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = \sqrt{a+\sqrt{b}}.$$

Провѣрка равенства двухъ данныхъ выраженій приводится къ провѣркѣ равенства ихъ квадратовъ, т. е. что

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}} = a+\sqrt{b},$$

или что $$a+\sqrt{b} = a+\sqrt{b}.$$

Но это равенство вѣрно; слѣд. вѣрно и предложенное.

2. Упростить выраженіе:

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2y^2}-2\sqrt[3]{x^3y}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^3}-\sqrt[3]{x^3y}-\sqrt[3]{y^4}}.$$

Это выраженіе можно представить въ видѣ

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-2\sqrt[3]{xy}\right)}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{x^2}\right)}.$$

или

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{xy}\right)}.$$

или, по сокращеніи на $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{xy}\right)},$$

т. е.

$$\frac{x-\sqrt[3]{x^2y}}{x+y}.$$

3. Разложить на множители выраженіе:

$$\sqrt[3]{a^2b^4}+\sqrt[3]{b^2c^4}+\sqrt[3]{c^2a^4}-\left(\sqrt[3]{b^4c^2}+\sqrt[3]{c^4a^2}+\sqrt[3]{a^4b^2}\right).$$

Назвавъ это выраженіе буквою P, имѣемъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt[3]{a^2b^2}\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}\right)+\sqrt[3]{c^2}\left(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}\right)+\sqrt[3]{c^4}\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}\right)\\
&= \left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right)\left\{\sqrt[3]{c^2}\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)-\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{c^4}\right\}\\
&= \left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right)\left\{\sqrt[3]{c^2}\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{c^2}\right)-\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{c^2}\right)\right\}\\
&= \left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{c^2}\right)\left(\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{a^2}\right)
\end{aligned}$$

229. Задачи.

Ввести коэффиціенты подъ знакъ радикала:

1. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^5}}$. 2. $m\sqrt[5]{1-\frac{1}{m^5}}$. 3. $-y\sqrt[3]{\frac{a}{y^2}-\frac{b}{y^3}}$. 4. $(m+n\sqrt{\frac{1}{m^2-n^2}}$.

5. $\frac{b-c}{b+c}\cdot\sqrt{\frac{b^2+bc}{b^2-2bc+c^2}}$. 6. $(a+b-c).\sqrt{\frac{3}{a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2}}$.

7. $(2x+3y).\sqrt[5]{\frac{(4x^2-9y^2)}{(2x+3y)^6}}$. 8. $3\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}}}$.

Вынести изъ-подъ радикала множителей, какихъ возможно, оставляя подъ радикаломъ цѣлыя выраженія:

9. $\sqrt[3]{\frac{125m^2}{216n^5}}$. 10. $\sqrt[4]{\frac{x^5y^6}{1296}}$.

11. $\sqrt[3]{\frac{(x^3-3x^2+3x-1)z^2}{512}}$. 12. $\sqrt[4]{\frac{(9y^{10}-25z^6)^5}{81(3y^5-5z^3)}}$.

13. $\frac{7}{2x+3y^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{(4x^2-9y^6)^4}{343(2x-3y^3)}}$. 14. $\sqrt[3]{\left[\frac{3x(1-x)-1}{x^3}+1\right]\cdot\frac{x^2}{z^4}}$.

15. $\sqrt[3]{\frac{x^3}{3}\left(\frac{5a^3}{b^3}-5\right)\cdot\frac{25(b^3-a^3)^2}{9x}}$. 16. $\sqrt{\frac{ax^2-2ax+a}{x^3+2x^2+x}}$.

17. $\sqrt{\frac{a^2b^2c^2-a^2c^4}{a^2b-2ab^2+b^3}}$.

Сдѣлать приведеніе въ примѣрахъ:

18. $7a^2\sqrt{3b^2}-3a\sqrt{12a^2b^2}+17\sqrt{48}-5\sqrt{75}$.

19. $13\sqrt{24}-2\sqrt{216}-\frac{2}{3}\sqrt{54}+\frac{3}{4}\sqrt{384}$.

20. $8\sqrt{27a^3b^4}-5ab\sqrt{ab^2}+8a^2b^2\sqrt{48a}-2b^2\sqrt{98a^3}$.

21. $\sqrt[3]{\frac{4}{27}}-\sqrt[3]{\frac{10}{2}}-3\sqrt[3]{256}+\sqrt[3]{625}+\sqrt[3]{\frac{32}{27}}-\sqrt[3]{\frac{125}{54}}$.

22. $\sqrt[3]{54}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{250}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}}+0,5\sqrt{\frac{128}{9}}+\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$.

23. $\frac{2}{9}\sqrt{648}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{-\frac{125}{4}}-2\sqrt[3]{-6\frac{3}{4}}-4\sqrt{0,5}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{0,054}{125}}-0,3\sqrt[3]{-0,432}$.

24. $\frac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d}-\frac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d}+\frac{2}{3ac}\sqrt{27x^6c^4d}-\frac{a^4c^2}{m}\sqrt{\frac{3m^2d}{a^4c^2}}+\frac{5}{a}\sqrt{3a^6c^2d}$.

25. $\sqrt{\frac{(x^2-y^2)(x-y)^2}{x+y}}+\sqrt{\frac{(4x^2-9y^2)^2(x-y)}{(2x-3y)^2}}-(x^2-y^2)\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x-y}}+$
$\frac{2xy}{x-y}\sqrt{\frac{(x^2-y^2)^3}{(x+y)^3}}$.

26. $\sqrt{\left(\frac{p^2+q^2}{p^3-pq^2}+\frac{2q}{p^2-q^2}\right)(p^2+pq)}-\sqrt{\left(\frac{p}{p-q}-\frac{q}{p+q}-\frac{2pq}{p^2-q^2}\right)(p+q)}$.

Перемножить радикальныя выраженія:

27. $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$.

28. $\sqrt{2a-\sqrt{5a^3}}\cdot\sqrt{2a+\sqrt{5a^3}}$. 29. $(a^2\sqrt{x}-a\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}\sqrt{x^5})\cdot(4\sqrt{x}-\frac{6}{a}\sqrt{x^3})$.

30. $\sqrt{1+ab+a+b}\cdot\sqrt{1+a}$. 31. $\sqrt{ab+c^2+ac+bc}\cdot\sqrt{a+c}\cdot\sqrt{b+c}$.

32. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\,.)$

33. $\left[a\sqrt{\frac{a^2-a}{a+1}}+2a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}-\sqrt{\frac{a^2+a}{a-1}}\right]\times\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$.

34. $(x+1)\cdot\sqrt{\frac{a^{2m}+2a^mb^n+b^{2n}}{a-b}}\times\frac{1}{a^m+b^n}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{x^2+2x+1}}$.

35. $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{c}{d}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{d}{c}}\right)$.

36. $(x\sqrt[3]{12x^5}-2x^3\sqrt[3]{4x^2}+5x^5\sqrt[3]{9x^7}).0,5\sqrt[3]{18x}$.

37. $\{x^2+[6+\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}]x+9+\sqrt{2}+3\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\}$.
$\{x^2+[6-\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}]x+9+\sqrt{2}-3\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\}$.

Сдѣлать дѣленіе въ слѣдующихъ примѣрахъ:

38. $\sqrt{ax+bx} : \sqrt{a^2+ab}$.

39. $(12\sqrt{12}-135\sqrt{5}) : (2\sqrt{3}-\sqrt{45})$.

40. $(a^2-b^2)\sqrt{x^3y-9xy^3} : (a+b)\sqrt{xy(x+3y)}$.

41. $12\sqrt{a^4+a^3b+ab^3+b^4} : (a+b)\sqrt{a^2-ab+b^2}$

42. $\sqrt{\frac{a^3-a}{a+b}} : \sqrt{\frac{a+1}{a^2-b^2}}$

43. $(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}) : (\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})$.

44. $\left[\frac{a}{b}\sqrt{x^5}+(1-b)\sqrt{x^7}+\left(\frac{c}{b}-\frac{b^2}{a}\right)\sqrt{x^9}+\frac{c}{a}\sqrt{x^{11}}\right] : \left(\frac{1}{b}\sqrt{x^2}+\frac{1}{a}\sqrt{x^4}\right)$.

45. $\left[\frac{2am}{b}-\frac{amx}{b^2}\sqrt[3]{a}+\frac{a^2my}{b^2}\sqrt[3]{\frac{1}{b^2}}+\frac{2a^2n}{b^2}\sqrt[3]{\frac{1}{b}}-\frac{a^2nx}{b}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+(ny+px)\frac{a^3}{b^3}\right.$
$\left.-\frac{2a^2p}{b^2}\sqrt[3]{a^2}-\frac{a^3py}{b^3}\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}\right] : \left(2\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}-x\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^5}}-y\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^7}}\right)$.

Возвышеніе радикаловъ въ степень:

46. $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{2m}c^m}}\right)^n$.

47. $(\sqrt[5]{(x-y)^2})^4$.

48. $(2p\sqrt{12z^5}-\frac{1}{2}q\sqrt{18z})^2$.

49. $(x\sqrt[3]{a^2}-x^2\sqrt[3]{a^4}+x^3\sqrt[3]{a^5})^2$.

Извлеченіе корня изъ радикаловъ:

50. $\sqrt[7]{128\sqrt[5]{243a^{70}}}$.

51. $\sqrt[3x]{\sqrt[4y]{m^5}}\times\sqrt[6y]{\sqrt[2x]{m^2}}\times\sqrt[12x]{\sqrt[y]{m^8}}\times\sqrt[12y]{\sqrt[x]{m^{11}}}\times\sqrt[4y]{\sqrt[3x]{m^{10}}}$.

52. $\sqrt[5]{x^6\sqrt[3]{x^2}}$.

53. $\sqrt[8]{d^2\sqrt[4]{d^2}}$.

54. $\sqrt[3]{y\sqrt[3]{y\sqrt[3]{y}}}$.

55. $\sqrt[5]{a^4b^3\sqrt[3]{ab^2\sqrt{a^3b^5}}}$.

56. $\sqrt[4]{mn^2\sqrt[3]{m^2n\sqrt[5]{m^6n^7\sqrt{m^8n^6}}}}$.

Приведеніе къ общему показателю корня.

57. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[4]{\frac{5}{8}}$; $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

58. $\sqrt[8]{\frac{8}{11}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}$; $\sqrt[6]{\frac{3}{4}}$.

59. $\sqrt{\frac{x}{y^2}}$; $\sqrt[5]{\frac{y^3}{z}}$; $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

60. $\sqrt[6]{\frac{m^2}{n^3}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{y^4}}$; $\sqrt{\frac{n}{y^2}}$.

61. $\sqrt[4]{\frac{a-b}{z}}$; $\sqrt{\frac{a+b}{z}}$; $\sqrt[7]{\frac{a^2-b^2}{z^3}}$.

62. $\sqrt[m]{\frac{1}{x-1}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^p}}$; $\sqrt[n]{\frac{1}{(x-1)^2}}$.

63. $\sqrt{2x}$; $\sqrt[3]{3(x-1)^4}$; $\sqrt[6]{a(x-2)^2}$.

64. $\sqrt[4]{a^4(x-1)^6}$; $\sqrt[16]{\frac{b^8(x-1)^{12}}{y^8}}$; $\sqrt[6]{\frac{c^9(x-1)^9}{z^6}}$.

Выполнить указанныя дѣйствія въ примѣрахъ:

65. $(2\sqrt[7]{10}+3\sqrt{2}-4\sqrt[3]{5})\,.\,\sqrt[4]{10}$.

66. $(\sqrt{5}-2\sqrt[5]{15}+\sqrt[5]{9})^2$.

67. $\left(\sqrt[4]{a^3x}+\sqrt[5]{\frac{x^3}{a^2}}-\sqrt[6]{\frac{1}{a^3x^4}}\right)\cdot\sqrt{a^5x^3}$.

68. $(a\sqrt{b^3}-b\sqrt[4]{a^2}-2\sqrt[3]{ab^4})^2$.

69. $\sqrt[7]{\frac{a^2}{c^3}} : \sqrt[12]{\frac{a^2}{c^8}}$.

70. $(3mn\sqrt{n}+4n^2\sqrt{m}) : 6\sqrt[4]{mn^6}$.

71. $(a^3-2\sqrt[4]{a^2b^3}-a^2\sqrt[6]{a^3b^2}+2b\sqrt[12]{b}) : (\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})$.

72. $(\sqrt[10]{4x^2-12xy+9y^2})^5$.

Разложить на множители выраженія:

73. $a+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}$.

74. $\sqrt{ab^2c^3}+\sqrt{a^2b^3c}+\sqrt{a^3bc^2}$.

75. $\sqrt{a^3b}+2ab+\sqrt{ab^3}$.

76. $x+a+\sqrt{x^2-a^2}$.

77. $(a-b-c)\sqrt{abc}-2bc\sqrt{a}$.

78. $(a^2-bc)\sqrt{bc}+(b^2-ac)\sqrt{ac}+(c^2-ab)\sqrt{ab}$.

79. $(a+b+c)\sqrt[3]{abc}-(bc+ca+ab)$.

Опредѣлить множитель, обращающій каждое изъ слѣдующихъ выраженій въ раціональное:

80. $m\sqrt{a}-n\sqrt{b}$.

81. $a+\sqrt{b}-\sqrt{c}$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

82. $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

83. $a+\sqrt[3]{b}$; $a-\sqrt[3]{b}$.

Знаменатели слѣдующихъ дробей сдѣлать раціональными:

84. $\dfrac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{8}+\sqrt{18}}$.

85. $\dfrac{7\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{8}-\sqrt{2}}$.

86. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{20}-\sqrt{18}+\sqrt{27}}$.

87. $\dfrac{15}{\sqrt{5}+3\sqrt{2}+7\sqrt{3}-\sqrt{6}}$.

88. $\dfrac{2\sqrt{1-a^2}-3\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-c^2}}$.

89. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}-\sqrt{y^2+1}+\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{y^2+1}+\sqrt{y^2-1}+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$.

90. $\dfrac{11}{\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}}$.

91. $\dfrac{m-n}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}$.

92. $\dfrac{1}{m^2(\sqrt{m^5}+\sqrt[3]{y^5})}$.

93. $\dfrac{n^2}{\sqrt{a}+\sqrt[8]{b^3}}$.

94. $\dfrac{a}{\sqrt[m]{x^n}}$.

95. $\dfrac{1}{a+\sqrt[5]{b}}$

96. $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{ab^2}}$.

97. $\dfrac{1}{ab+b\sqrt{ac}-a\sqrt{bc}-c\sqrt{ab}}$.

98. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a+b}}$.

99. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

100. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}$.

Провѣрка равенства:

101. $\sqrt{9+\sqrt{45}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{15}+\sqrt{3})$ $\qquad \sqrt{9-\sqrt{45}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\sqrt{15}-\sqrt{3}]$.

102. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}-\sqrt[2]{\dfrac{2+\sqrt{\quad\sqrt{2}}}{2}}+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$.

103. $\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\dfrac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$.

104. $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}=\dfrac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$.

105. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$.

106. $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{x^4-a^4}}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{4x}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{a^2}{x^2}}{1+\dfrac{x^2}{a^2}}}=1$.

107. $(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2\,.(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a})^3=(x+a)^2+2\sqrt{ax}(x+a)+3\sqrt[3]{ax}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a})$. $(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2$.

108. Упростить $\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}}{x}+\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}}{y}$.

109. Упростить $\dfrac{a-\sqrt{ab}-\sqrt{ac}}{a-b-c-2\sqrt{bc}}$.

110. Упростить $\dfrac{c\sqrt{x^2-a^2}+x^2-(a+b)x+ab}{b\sqrt{x^2-a^2}+x^2-(a+c)x+ac}$.

111. Упростить $\dfrac{3\sqrt[3]{x^4}+4\sqrt[3]{x^2y^2}-5\sqrt[3]{y^4}-x\sqrt[3]{y}-y\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}$

112. Упростить $\dfrac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}$.

113. Доказать, что триномъ ax^2+bx+c обращается въ ноль при

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\text{ а также при } x=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

114. Доказать, что триномъ x^4+px^2+q обращается въ ноль при

$$x=\sqrt{-\frac{p}{4}+\frac{\sqrt{q}}{2}}+\sqrt{-\frac{p}{4}-\frac{\sqrt{q}}{2}}.$$

115. Доказать, что триномъ x^3+3x+2 обращается въ ноль при

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}}.$$

116. Доказать, что триномъ x^3+px+q обращается въ ноль при

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

а также при

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}}-\frac{\frac{p}{3}}{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}}}.$$

117. Доказть, что $x^3+3Ax^2+3Bx+C$ обращается въ ноль при

$$x=\sqrt[2]{3A^2-2B+(3A^2+B)\sqrt[3]{\frac{B-A^2}{4A^2}}},$$

полагая, что $(3A^2-2B)^2=3B^2-2AC$.

118. Доказать, что $\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$ обращается въ $n(n-1)$ при

$$x=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

119. Доказать, что $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ обращается въ b при $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$.

120. Доказать, что $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ обращается въ $a+b$ при

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

121. Во что обращается $\frac{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ при $x=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

122. Во что обращается $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{\frac{a}{b}\left(x-1-\frac{b}{a}\right)}+\sqrt{\frac{b}{a}\left(x-1-\frac{a}{b}\right)}}$ при $x=\frac{a^2+ab+b^2}{ab}$.

123. Уничтожить ирраціональность въ знаменателѣ дроби

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a'}+\sqrt{b'}+\sqrt{c'}},$$

при условіи, что $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

Примѣчаніе. Индусамъ уже были извѣстны методы извлеченія корней — квадратнаго и кубичнаго. — *Омаръ Алкхайями* (средина XI вѣка) доказалъ точность этихъ методовъ и указалъ пріемы для нахожденія корней высшихъ порядковъ. Правила дѣйствій надъ коренными количествами находимъ уже въ ариѳметикѣ *Алькальцади* (+ 1477).

ГЛАВА XVI.

Степени и корни съ дробными и отрицательными показателями.

Дробные показатели.

230. *Происхожденіе степеней съ дробными показателями.* — Для извлеченія корня изъ степени надо показатель подкореннаго количества раздѣлить на показателя корня; такимъ образомъ: $\sqrt[3]{a^{15}}=a^{\frac{15}{3}}=a^5$. Но если показатель подкореннаго количества не дѣлится на показателя корня, какъ напр. въ случаѣ $\sqrt[3]{a^2}$, то, примѣняя указанное правило, мы найдемъ выраженіе $a^{\frac{2}{3}}$, неимѣющее смысла степени какъ произведенія множителей, равныхъ основанію a: въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что нельзя a повторить множителемъ $\frac{2}{3}$ раза. Однако, вполнѣ позволительно допускать подобныя выраженія, если только подъ ними разумѣть ничто иное какъ новый особый способъ изображать ирраціональныя

выраженія. Такимъ образомъ пишутъ: $a^{\frac{2}{3}}$ вмѣсто $\sqrt[3]{a^2}$, $a^{\frac{1}{2}}$ вмѣсто $\sqrt{a}$, $a^{\frac{7}{5}}$ вмѣсто $\sqrt[5]{a^7}$ и т. д. Вообще, *выраженіе* $a^{\frac{m}{n}}$ *есть ничто иное какъ* $\sqrt[n]{a^m}$, и называется *количествомъ съ дробнымъ показателемъ*. Итакъ: *количество съ дробнымъ показателемъ есть корень, показатель котораго равенъ знаменателю дробнаго показателя, изъ количества въ степени, равной числителю дробнаго показателя.*

Условное обозначеніе ирраціональныхъ выраженій въ видѣ дробныхъ степеней, распространяя правило показателей при извлеченіи корня и на тотъ случай, когда показатель подрадикальнаго количества не дѣлится на показателя корня, т. е. *обобщая* это правило, вполнѣ соотвѣтствуетъ духу алгебры, стремящейся къ обобщеніямъ.

Разсматривая правила дѣйствій надъ дробными степенями, мы придемъ къ тому важному заключенію, что правила эти остаются тѣми же самыми, какія мы нашли раньше для показателей цѣлыхъ. Обстоятельство это, говоритъ Лакруа въ своей алгебрѣ, «служитъ однимъ изъ замѣчательнѣйшихъ примѣровъ пользы знаковъ, когда они удачно выбраны. Чѣмъ дальше мы подвигаемся въ алгебрѣ, тѣмъ болѣе узнаемъ безчисленныя выгоды, какія повело за собою введеніе показателей.....»

Дробные показатели были введены *Ньютономъ*. —

231. Теорема. *Двѣ дробныя степени равны, если показатели ихъ равны;* т. е. если $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, то $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{p}{q}}$.

Дѣйствительно, по опредѣленію степени съ дробнымъ показателемъ имѣемъ:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \quad \text{и} \quad a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

Приводя корни къ общему показателю, найдемъ

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nq]{a^{mq}} \; \ldots\ldots (1) \quad \text{и} \quad a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{np}} \; \ldots\ldots\ldots (2);$$

но изъ условія $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ имѣемъ: $mq=np$, слѣд. вторыя части равенствъ (1) и (2) равны, а потому равны и первыя. Итакъ

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{p}{q}}.$$

232. Умноженіе. — Умножить $a^{\frac{m}{n}}$ на $a^{\frac{p}{q}}$. По опредѣленію дробныхъ степеней имѣемъ

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \quad \text{и} \quad a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p};$$

откуда $a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\times\sqrt[nq]{a^{np}}$ (по приведеніи корней къ общему показателю). Такъ-какъ nq, mq и np — числа цѣлыя и положительныя, то при-

мѣняя правила — умноженія корней и степеней, доказанныя для такихъ показателей, получимъ:

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq}.a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$

Такъ какъ nq и $mq+np$ — цѣлыя положительныя числа, то раздѣливъ въ послѣднемъ выраженіи показатель подкореннаго количества на показателя корня, найдемъ:

$$\sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Итакъ:

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \; \ldots\ldots (1).$$

Положивъ въ этомъ равенствѣ сперва $n=1$, потомъ $q=1$ (на что имѣемъ право, такъ какъ n и q — цѣлыя положительныя числа) найдемъ, въ первомъ случаѣ:

$$a^m \times a^{\frac{p}{q}} = a^{m+\frac{p}{q}} \; \ldots\ldots (2).$$

а во второмъ

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^p = a^{\frac{m}{n}+p} \; \ldots\ldots (3).$$

Равенства (1), (2) и (3) показываютъ, что: *будутъ-ли оба показателя дробные, или одинъ цѣлый, а другой дробный, при умноженіи степеней одного и того-же основанія показатели складываются.*

Такъ: 1) $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{10}}$; 2) $a^3 \times a^{\frac{2}{5}} = a^{3+\frac{2}{5}} = a^{\frac{17}{5}}$.

233. Дѣленіе. — Раздѣлить $a^{\frac{m}{n}}$ на $a^{\frac{p}{q}}$, полагая, что $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$.

Послѣдовательно имѣемъ:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}}.$$

По приведеніи обѣихъ частей неравенства $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$ къ общему знаменателю, найдемъ: $\frac{mq}{nq} > \frac{np}{nq}$, откуда: $mq > np$, а слѣдовательно разность $mq - np$ положительна. Но при цѣлыхъ положительныхъ показателяхъ имѣемъ

$$\sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}-\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$ Итакъ

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \; \ldots\ldots (1).$$

Положивъ $n=1$, находимъ изъ этого равенства:

$$a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^{m-\frac{p}{q}} \; \ldots\ldots (2).$$

Положивъ въ равенствѣ (1) $q=1$, найдемъ:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^p = a^{\frac{m}{n}-p} \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Равенства (1), (2) и (3) доказываютъ, что правило показателей при дѣленіи, доказанное первоначально для цѣлыхъ показателей, остается справедливымъ и тогда, когда оба или одинъ изъ показателей — числа дробныя.

Примѣръ: $a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{2}-\frac{5}{6}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}}$.

234. Возвышеніе въ степень. — Пусть требуется $a^{\frac{m}{n}}$ возвысить въ степень порядка $\frac{p}{q}$, т. е. опредѣлить $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}$. Замѣняя каждую изъ степеней съ дробнымъ показателемъ — корнями, получимъ:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}.$$

Такъ какъ показатели nq и mp — числа цѣлыя и положительныя, то $\sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$. Слѣд.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} \quad \ldots\ldots (1).$$

Полагая сперва $q=1$, а затѣмъ $n=1$, найдемъ:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{m}{n}\cdot p} \quad \ldots\ldots (2); \quad \text{и} \quad (a^m)^{\frac{p}{q}} = a^{m\cdot\frac{p}{q}} \quad \ldots\ldots (3).$$

Отсюда слѣдуетъ, что правило показателей при возвышеніи въ степень, выведенное въ §109 для показателей цѣлыхъ, распространяется и на тѣ случаи, когда одинъ или оба показателя — дробные.

Примѣръ. $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}} = a^{5/8}$.

235. Возвышеніе въ дробную степень произведенія и дроби. —

1. $\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{A}{B}\right)^p} = \sqrt[q]{\frac{A^p}{B^p}} = \frac{\sqrt[q]{A^p}}{\sqrt[q]{B^p}} = \frac{A^{\frac{p}{q}}}{B^{\frac{p}{q}}}$. Заключаемъ, что для возвышенія дроби въ дробную степень нужно отдѣльно возвысить въ данную степень числителя и знаменателя и первый результатъ раздѣлить на второй: то же самое правило, что и для возвышенія дроби въ цѣлую степень.

2. $(A.B)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(AB)^p} = \sqrt[q]{A^p.B^p} = \sqrt[q]{A^p}.\sqrt[q]{B^p} = A^{\frac{p}{q}}.B^{\frac{p}{q}}$, слѣд. правило возвышенія произведенія въ дробную степень — такое же какъ и въ цѣлую степень.

236. Извлеченіе корня. — Пусть требуется извлечь корень порядка $\frac{p}{q}$ изъ $a^{\frac{m}{n}}$ т. е. найти $\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}}$. Распространяя опредѣленіе корня и на этотъ случай,

условимся подъ корнемъ порядка $\frac{p}{q}$ *изъ* $a^{\frac{m}{n}}$ *разумѣть такое количество, которое, будучи возвышено въ степень порядка* $\frac{p}{q}$, *давно бы* $a^{\frac{m}{n}}$. Согласно этому опредѣленію, назвавъ искомый корень буквою x, т. е. положивъ

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}}=x\ \ldots\ldots\ldots (1)$$

найдемъ, что $x^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}}$, откуда, возвышая обѣ части въ степень $\frac{q}{p}$, получимъ: $x^{\frac{pq}{qp}}=a^{\frac{mq}{np}}$, или $x=a^{\frac{m}{n}:\frac{p}{q}}$. Подставивъ въ равенство (1) вмѣсто x найденное выраженіе, получимъ:

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{m}{n}}}=a^{\frac{m}{n}:\frac{p}{q}}\ \ldots\ldots (2).$$

Полагая здѣсь сначала $q=1$, а потомъ $n=1$, имѣемъ:

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}}=a^{\frac{m}{n}:p}\ \ldots (3);\quad \sqrt[\frac{p}{q}]{a^m}=a^{m:\frac{p}{q}}\ \ldots (4)$$

Такимъ образомъ, будутъ-ли показатели-корня и подкореннаго количества оба дробные, или одинъ — цѣлый, а другой — дробный, надо для извлеченія корня — показатель подрадикальнаго количества раздѣлить на показатель корня: правило то-же самое, что и для цѣлыхъ показателей.

Примѣръ. $\sqrt[\frac{2}{3}]{a^{\frac{5}{7}}}=a^{\frac{5}{7}:\frac{2}{3}}=a^{\frac{15}{14}}$.

237. Корень дробнаго порядка изъ произведенія, дроби и корня съ дробнымъ показателемъ.

1. $\sqrt[\frac{p}{q}]{A.B}=\sqrt[\frac{p}{q}]{(AB)^1}=(AB)^{1:\frac{p}{q}}$ (§236,4) $=(AB)^{\frac{q}{p}}=A^{\frac{q}{p}}.B^{\frac{q}{p}}$ (§235,2) $=A^{1:\frac{p}{q}}.B^{1:\frac{p}{q}}=\sqrt[\frac{p}{q}]{A}\times\sqrt[\frac{p}{q}]{B}$ (§236,4).

Заключаемъ, что правило извлеченія корня дробнаго порядка изъ произведенія — такое-же точно какъ и корня съ цѣлымъ показателемъ.

2. $\sqrt[\frac{p}{q}]{\frac{A}{B}}=\sqrt[\frac{p}{q}]{\left(\frac{A}{B}\right)^1}=\left(\frac{A}{B}\right)^{1:\frac{p}{q}}=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{q}{p}}=\frac{A^{\frac{q}{p}}}{B^{\frac{q}{p}}}$ (§235,1) $=\frac{A^{1:\frac{p}{q}}}{B^{1:\frac{p}{q}}}=\frac{\sqrt[\frac{p}{q}]{A}}{\sqrt[\frac{p}{q}]{B}}$.

3. $\sqrt[\frac{m}{n}]{\sqrt[\frac{p}{q}]{A^k}}=\sqrt[\frac{m}{n}]{A^{k:\frac{p}{q}}}=\sqrt[\frac{m}{n}]{A^{\frac{kq}{p}}}=A^{\frac{kq}{p}:\frac{m}{n}}=A^{\frac{kqn}{pm}}=A^{k:\frac{mp}{nq}}=\sqrt[\frac{mp}{nq}]{A^k}$ (§236): и въ этомъ случаѣ для извлеченія корня изъ корня нужно показатели корней перемножить.

Итакъ, всѣ правила, доказанныя для показателей цѣлыхъ, распространяются и на дробные показатели. Замѣняя радикалы дробными показателями, мы получаемъ возможность совершать преобразованія ирраціональныхъ выраженій

по тѣмъ же правиламъ, какія имѣемъ для выраженій раціональныхъ, а это ведетъ къ упрощенію вычисленій и болѣе быстрому полученію результатовъ.

238. Приводимъ примѣры преобразованій выраженій съ дробными показателями.

I. *Упростить выраженіе*

$$\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вынося въ первыхъ скобкахъ общаго множителя $a^{\frac{4}{3}}$, а во вторыхъ $b^{\frac{4}{3}}$, имѣемъ

$$\left[a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}};$$

возвышая каждаго множителя отдѣльно въ степень $\frac{1}{2}$, находимъ

$$a^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

взявъ общимъ множителемъ $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$, имѣемъ

$$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right);$$

или, выполнивъ умноженіе:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

II. *Провѣрить равенство*

$$2^{\frac{1}{2}}\left[2a+(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left[a-(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=(a+b)^{\frac{3}{2}}-(a-b)^{\frac{3}{2}}.$$

Для облегченія повѣрки положимъ:

$$x=a+b\ \ldots(1)\quad \text{и}\quad y=a-b\ \ldots\ (2).$$

Сложивъ эти равенства, получимъ

$$2a=x+y,\ \text{а отсюда}\ a=\frac{x+y}{2};$$

перемноживъ (1) со (2), найдемъ

$$a^2-b^2=xy,\quad \text{откуда}\quad (a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}=(xy)^{\frac{1}{2}}.$$

Первая часть даннаго равенства послѣ подстановки приметъ видъ:

$$2^{\frac{1}{2}}.\left[x+y+(xy)^{\frac{1}{2}}\right].\left[\frac{x+y-2(xy)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left[x+y+(xy)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left[x+y+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right]\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)=x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}=$$

$$(a+b)^{\frac{3}{2}}-(a-b)^{\frac{3}{2}},$$

что и требовалось найти.

Отрицательные показатели

239. Въ §43 мы нашли, что $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, но тамъ формула эта установлена была для случая m цѣлаго. Если въ равенствѣ

$$a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$

доказанномъ въ §233 при условіи $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$, условимся не дѣлать послѣдняго ограниченія, и положимъ $m=o$, то $a^{\frac{m}{n}}$ обратится въ a^0 или въ 1, а самое равенство въ 1: $a^{\frac{p}{q}}=a^{-\frac{p}{q}}$. Итакъ

$$a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}},$$

т. е. степень съ отрицательнымъ дробнымъ показателемъ равна единицѣ, дѣленной на тоже основаніе съ положительнымъ показателемъ, равнымъ по абсолютной величинѣ отрицательному. Такимъ образомъ, будетъ-ли m — цѣлое или дробное, всегда имѣемъ:

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

Отрицательные показатели даютъ возможность изображать дробь въ формѣ цѣлаго выраженія (безъ знаменателя). Такъ дробь $\frac{5a^2b^3}{c^5d^7}$ можно написать въ видѣ: $5a^2b^3.\ \frac{1}{c^5}\cdot\frac{1}{d^7}$; замѣтивъ, что $\frac{1}{c^5}=c^{-5}$ и $\frac{1}{d^7}=d^{-7}$, найдемъ, что

$$\frac{5a^2b^3}{c^5d^7}=5a^2b^3c^{-5}d^{-7}.$$

Такимъ образомъ, чтобы дробь представить безъ знаменателя, надо всѣ множители знаменателя перенести въ числитель съ отрицательными показателями.

Наоборотъ, всѣ множители числителя можно перенести въ знаменатель, написавъ ихъ съ отрицательными показателями; въ самомъ дѣлѣ, напр.

$$\frac{a^2b}{c^3d^5}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}\cdot c^3d^5}=\frac{1}{a^{-2}b^{-1}c^3d^5}.$$

Перейдемъ теперь къ изученію дѣйствій надъ количествами съ отрицательными показателями.

240. Умноженіе. — I. Пусть требуется помножить a^p на a^{-q}; замѣтивъ, что $a^{-q}=\frac{1}{a^q}$, получимъ

$$a^p.a^{-q}=a^p.\frac{1}{a^q}=\frac{a^p}{a^q};$$

такъ-какъ p и q — числа положительныя, то, будутъ-ли онѣ цѣлыя или дробныя, нужно при раздѣленіи a^p на a^q вычесть q изъ p; слѣд.

$$\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}=a^{p+(-q)}, \text{ слѣдовательно}$$
$$a^p.a^{-q}=a^{p+(-q)},$$

т. е. *показатель произведенія равенъ алгебраической суммѣ показателей множимаго и множителя.* —

2. Пусть оба показателя — отрицательны; найдемъ

$$a^{-p}.a^{-q}=\frac{1}{a^p}\cdot\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-(p+q)}=a^{-p-q}=a^{-p+(-q)}:$$

то-же самое заключеніе, что и въ предыдущемъ случаѣ.

241. Дѣленіе. — I. Пусть будетъ одинъ изъ показателей — положительный, а другой — отрицательный.

$$a^{-p}:a^q=\frac{1}{a^p}:a^q=\frac{1}{a^p.a^q}=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-(p+q)}=a^{-p-q}=a^{-p-(+q)},$$

т. е. изъ показателя дѣлимаго вычитается показатель дѣлителя.

2. $a^{-p}:a^{-q}=\frac{1}{a^p}:\frac{1}{a^q}=\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p}=a^{-p+q}=a^{-p-(-q)}$: то-же заключеніе.

242. Возвышеніе въ степень. — 1. $(a^{-m})^n=\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{(a^m)^n}$, по правилу возвышенія дроби въ положительную степень; далѣе: $\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}=a^{-m.n}$.

2. $(a^m)^{-n}=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}=a^{m.-n}$.

3. $(a^{-m})^{-n}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=\frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}}=a^{mn}=a^{-m.-n}$.

Всѣ три результата приводятъ къ общему заключенію: при возвышеніи степени въ новую степень показатели перемножаются, будутъ ли они цѣлые или дробные, положительные или отрицательные.

243. Возвышеніе въ отрицательную степень произведенія и дроби.

1. $(A.B)^{-m}=\frac{1}{(AB)^m}=\frac{1}{A^m.B^m}=\frac{1}{A^m}\cdot\frac{1}{B^m}=A^{-m}.B^{-m}$.

Заключаемъ, что для возвышенія въ отрицательную степень (цѣлую или дробную) произведенія нужно отдѣльно возвысить въ эту степень каждаго множителя и результаты перемножить.

2. $\left(\frac{A}{B}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{A}{B}\right)^m}=\frac{1}{\frac{A^m}{B^m}}=\frac{B^m}{A^m}=\frac{A^{-m}}{B^{-m}}$, по перенесеніи A^m въ числителя, а B^m — въ знаменателя. Заключеніе: для возвышенія дроби въ отрицательную степень нужно въ эту степень возвысить отдѣльно числителя и знаменателя, и первый результатъ раздѣлить на второй.

244. Извлеченіе корня. I. Пусть требуется извлечь корень положительнаго порядка изъ степени съ отрицательнымъ показателемъ: $\sqrt[m]{a^{-p}}$, гдѣ m и p — цѣлыя или дробныя числа. Имѣемъ:

$$\sqrt[m]{a^{-p}}=\sqrt[m]{\frac{1}{a^p}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^p}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{m}}}=a^{-\frac{p}{m}}=a^{\frac{-p}{m}},$$ т. е. показатель подкореннаго количества нужно раздѣлить на показатель корня.

2. Разсмотримъ теперь извлеченіе корня съ отрицательнымъ показателемъ. Опредѣленіе корня, данное для цѣлаго положительнаго показателя и распространенное затѣмъ на корень дробнаго порядка, распространяютъ и на корни отрицательнаго порядка. Такимъ образомъ, корнемъ минусъ $m^{\text{го}}$ порядка изъ A называютъ количество, которое по возвышеніи въ минусъ m-ую степень даетъ A; согласно этому опредѣленію:

если $\sqrt[-m]{A}=R$, то $R^{-m}=A$.

Докажемъ, что

$$\sqrt[-m]{A}=\frac{1}{\sqrt[m]{A}},$$

т. е. что *корень съ отрицательнымъ показателемъ равенъ единицѣ, раздѣленной на корень съ тѣмъ же по величинѣ, но положительнымъ по знаку, показателемъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\sqrt[-m]{A}=x$; по опредѣленію корня найдемъ: $x^{-m}=A$, или $\frac{1}{x^m}=A$, откуда $x^m=\frac{1}{A}$, а извлекая изъ обѣихъ частей корень m-го (положительнаго) порядка, получимъ

$x=\sqrt[m]{\frac{1}{A}}=\frac{1}{\sqrt[m]{A}}$, и требуемое доказано.

Пусть теперь требуется извлечь корень $(-m)$-ой степени изъ a^p, гдѣ p — положительно; въ силу только-что доказаннаго предложенія имѣемъ:

$$\sqrt[-m]{a^p}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^p}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{m}}}=a^{-\frac{p}{m}}=a^{\frac{p}{-m}},$$ т. е. и въ этомъ случаѣ показатель подрадикальнаго количества надо раздѣлить на показатель корня.

Пусть, наконецъ, оба показателя отрицательны; найдемъ, что

$\sqrt[-m]{a^{-p}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^{-p}}}$; но $\sqrt[m]{a^{-p}}=a^{\frac{-p}{m}}$ (§244,1); слѣдовательно

$\sqrt[-m]{a^{-p}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{m}}}=a^{\frac{p}{m}}=a^{\frac{-p}{-m}}$: прежнее заключеніе.

Итакъ, *во всѣхъ случаяхъ, при извлеченіи корня нужно показатель подрадикальнаго количества дѣлить на показатель корня, будутъ ли оба показателя — цѣлые или дробные, положительные или отрицательные.*

Напр. $\sqrt[-3]{a^{-\frac{3}{4}}}=a^{-\frac{3}{4}:-3}=a^{\frac{1}{4}}$.

245. *Извлеченіе корня отрицательнаго порядка изъ произведенія, дроби и корня съ отрицат. или положит. показателемъ.*

1. $\sqrt[-m]{AB}=\frac{1}{\sqrt[m]{AB}}=\frac{1}{\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{B}}=\frac{1}{\sqrt[m]{A}}\times\frac{1}{\sqrt[m]{B}}$. Но, по доказанному, $\frac{1}{\sqrt[m]{A}}=\sqrt[-m]{A}$ и $\frac{1}{\sqrt[m]{B}}=\sqrt[-m]{B}$, слѣд.

$$\sqrt[-m]{AB}=\sqrt[-m]{A}\times\sqrt[-m]{B},$$

т. е. для извлеченія корня отрицательнаго порядка изъ произведенія нужно извлечь его отдѣльно изъ каждаго производителя и результаты перемножить.

2. $\sqrt[-m]{\frac{A}{B}}=\frac{1}{\sqrt[m]{\frac{A}{B}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}}=\frac{\sqrt[m]{B}}{\sqrt[m]{A}}=\frac{1}{\sqrt[m]{A}}\times\sqrt[m]{B}$. Но $\frac{1}{\sqrt[m]{A}}=\sqrt[-m]{A}$, а изъ равенства $\sqrt[-m]{B}=\frac{1}{\sqrt[m]{B}}$ имѣемъ: $\sqrt[m]{B}=\frac{1}{\sqrt[-m]{B}}$; подставляя, найдемъ

$$\sqrt[-m]{\frac{A}{B}}=\sqrt[-m]{A}\times\frac{1}{\sqrt[-m]{B}}=\frac{\sqrt[-m]{A}}{\sqrt[-m]{B}},$$

т. е. для извлеченія корня отрицательнаго порядка изъ дроби нужно извлечь его отдѣльно изъ числителя и знаменателя, и первый раздѣлить на второй.

3. Пусть, наконецъ, требуется извлечь корень $(-m)$-го порядка изъ $\sqrt[-p]{A^k}$.

$\sqrt[-m]{\sqrt[-p]{A^k}}=\sqrt[-m]{A^{\frac{k}{-p}}}=A^{-\frac{k}{p}:-m}=A^{\frac{k}{mp}}=\sqrt[mp]{A^k}=\sqrt[(-m)(-p)]{A^k}$, т. е. показатели корней слѣдуетъ перемножать.

Итакъ, всѣ правила, относящіяся къ вычисленіямъ надъ количествами съ положительными показателями, относятся и къ отрицательнымъ показателямъ.

Отрицательные показатели были введены раньше дробныхъ; ихъ введеніе приписываютъ Михаилу Стифелю (1509 — 1567).

246. Задачи.

1. Представить безъ знака радикала выраженія

$$\sqrt[5]{(a^2-x^2)^3};\ \sqrt[4]{\sqrt[3]{m^5}};\ \sqrt[3]{a^2b}-\sqrt{m^3}+\sqrt[4]{ax^3}.$$

2. Сложить

$$\left(x^{-\frac{4}{5}}-2ax^{-\frac{3}{5}}+2bx^{-\frac{2}{5}}\right)+\left(3ax^{-\frac{3}{5}}-mx^{-\frac{4}{5}}-cx^{-\frac{2}{5}}\right)+$$
$$+\left(bx^{-\frac{2}{5}}+dx^{-\frac{3}{5}}-2x^{-\frac{4}{5}}\right).$$

2. Изъ перваго полинома вычесть сумму остальныхъ:

$$x^{-\frac{4}{5}}-3x^{-1}y^{-\frac{2}{3}}-1;\ 4-2x^{-\frac{4}{5}}+0{,}3x^{-1}y^{-\frac{2}{3}};\ 3n^{-\frac{1}{2}}-1\frac{1}{3}+2x^{-\frac{4}{5}};$$
$$x^{-1}y^{-\frac{2}{3}}+0{,}5+n^{-\frac{1}{2}}.$$

Умножить

3. $m^{\frac{2}{3}}n^{-\frac{1}{2}}c^{-2}\cdot m^{-\frac{1}{7}}n^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}}$.

4. $2y+3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$ на $7x^{\frac{1}{4}}-5y^{\frac{1}{2}}$.

5. $x+2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{3}}$ на $x-2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{3}}$.

6. $a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b+b^{\frac{3}{2}}$ на $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}$.

7. $\frac{5}{2}x+3a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{7}{3}a^{-\frac{2}{3}}$ на $2x-a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}a^{-\frac{2}{3}}$.

8. $a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}-a^{-\frac{3}{2}}$ на $a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}-a^{-\frac{3}{2}}$.

Раздѣлить

9. $a^{\frac{3}{5}}-x^{\frac{3}{5}}$ на $a^{\frac{1}{5}}-x^{\frac{1}{5}}$.

10. $x-a$ на $x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}$.

11. $x-2x^{\frac{1}{2}}+1$ на $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+1$.

12. $16x-y^2$ на $2x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{2}}$.

13. $a^{\frac{7}{10}}-a^{\frac{8}{15}}+a^{\frac{9}{20}}+a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{5}{12}}-a^{\frac{3}{8}}+a^{\frac{11}{24}}-a^{\frac{5}{8}}$ на $a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{4}}$.

14. $a^{\frac{p}{q}}-b^{\frac{p}{q}}$ на $a^{\frac{1}{q}}-b^{\frac{1}{q}}$.

15. $x^{-1}-y^{-1}$ на $x^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{3}}$.

16. $x^{\frac{3n}{2}}-x^{-\frac{3n}{2}}$ на $x^{\frac{n}{2}}-x^{-\frac{n}{2}}$.

17. $12x-20x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{3}}+27x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}-18x^{\frac{1}{4}}y^{-1}+4y^{-\frac{4}{3}}$ на
$4x^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$.

18. $x^{-\frac{3}{5}}+2x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}}\left(y^{-\frac{1}{5}}-x^{-\frac{1}{5}}\right)+3x^{-\frac{1}{5}}z^{-\frac{1}{5}}\left(x^{-\frac{1}{5}}-z^{-\frac{1}{5}}\right)+$
$+6y^{-\frac{1}{5}}z^{\frac{1}{5}}\left(y^{-\frac{1}{5}}+z^{-\frac{1}{5}}\right)-4y^{-\frac{3}{5}}-9z^{-\frac{3}{5}}$ на $x^{-\frac{1}{5}}-2y^{-\frac{1}{5}}+3z^{-\frac{1}{5}}$.

Возвысить въ квадратъ полиномы

19. $a^{-1}+b^{-\frac{1}{2}}+c^{-\frac{1}{3}}$. 20. $7x^{-\frac{4}{5}}-5y^{\frac{3}{2}}+q$.

Возвысить въ кубъ полиномы

21. $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$. 22. $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$. 23. $x-x^{-1}$.

24. e^x-e^{-x}. 25. $a^{\frac{1}{3}}b^{-1}+a^{-\frac{1}{3}}b$. 26. $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

Извлечь квадратный корень изъ полиномовъ

27. $1-ax^{\frac{1}{2}}-\frac{15}{4}a^2x+2a^3x^{\frac{3}{2}}+4a^4x^2$.

28. $x^{\frac{4}{3}} - 4x + 8x^{\frac{1}{3}} + 4$.

29. $(x + x^{-1})^2 - 4(x - x^{-1})$.

30. $\frac{9}{4}x^3 - 5x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{179}{45}x^2y - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{25}xy^2$.

31. $x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{3}} - 1$.

32. $(x + x^{-1}) - 2\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right) - 1$.

Упростить выраженія

33. $[(a-b)^2 + 4ab]^{\frac{1}{2}} . [(a+b)^2 - 4ab]^{\frac{3}{2}} . \left[\frac{a^4 - b^4}{a - b} + 2ab(a+b)\right]^{\frac{2}{3}}$.

34. $\frac{x^3 + a^2x^2 - ax - a^3}{x^2 - ax + a^{\frac{1}{2}}x - a^{\frac{3}{2}}}$.

35. $\frac{x^3 - 3x - 2 + (x^2 - 1)(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}{x^3 - 3x + 2 + (x^2 - 1)(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}$.

36. $\frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 2xy^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + yx^{\frac{1}{3}} - xy^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{4}{3}}}$.

37. $\frac{x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{x - (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x - (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$.

38. $\left[\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}c^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^6$.

39. $x^{-1}y^{-\frac{1}{2}}z\sqrt{xyz^{-\frac{2}{3}}}$.

40. $(\sqrt{a})^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{3}{4}\left(a^{\frac{5}{2}}b\sqrt{a^{-3}b^{-2}}\right)^{\frac{1}{4}}$.

41. $(ab^{-2} . \sqrt{ab^3} . \sqrt[3]{ab^4} . \sqrt[4]{ab^5})^{\frac{1}{5}}$.

42. $\frac{3a^{-2}x^2 + 5a^{-1}x - 12}{a^3x^3 - 8a^{-2}x^2 - 12a^{-1}x + 63}$.

43. $\frac{3ax^3 - 2a^{\frac{2}{3}}x^2 - a^{\frac{1}{3}}}{6a^{\frac{2}{3}}x^2 - a^{\frac{1}{3}}x - 1}$.

44. Показать, что если $x + x^{-1} = p$, то $x^3 + x^{-3} = p^3 - 3p$.

45. Доказать, что величина

$$x = \left[-q + (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-q - (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

обращаетъ триномъ $x^3 + 3px + 2q$ въ нолъ.

46. Показать, что $(x + x^{-1})^2 - (y + y^{-1})^2 = (xy - x^{-1}y^{-1})(xy^{-1} - x^{-1}y)$.

47. Опредѣлить числовую величину выраженія

$$\left[\frac{1}{3}\left(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}\right)\right]^{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}\left\{1+a^{-\frac{3}{2}}-(1+ab^{-1})^{-\frac{1}{2}}\right\}},$$

если $4a=5b=1$.

48. Доказать, что при $x=a^{-1}\left(\frac{2a}{b}-1\right)^{\frac{1}{2}}$ выраженіе

$$(1-ax).(1+ax)^{-1}.(1+bx)^{\frac{1}{2}}.(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$$

обращается въ 1.

49. Доказать, что при $x=2^{-1}.\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ выраженіе

$$2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

обращается въ $a+b$.

50. Доказать, что при $x=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}$ выраженіе

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\left(x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}\right)$$

обращается въ

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}.$$

ГЛАВА XVII.

Замѣчательныя формы алгебраическихъ выраженій.

Формы: $\frac{0}{m}$, $\frac{m}{0}$, $\frac{\infty}{m}$, $\frac{m}{\infty}$: $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$. — Раскрытіе неопредѣленностей.—Задачи.—

247. Въ силу общности алгебраическихъ формулъ они могутъ представлять замѣчательныя формы при частныхъ предположеніяхъ относительно количествъ, входящихъ въ составъ ихъ. Займемся изученіемъ этихъ особыхъ, замѣчательныхъ формъ.

I. Форма: $\frac{0}{m}$.

248. *Численная величина алгебраическаго выраженія равна нулю, если оно является въ видѣ частнаго отъ раздѣленія нуля на конечное количество отличное отъ нуля.* Такимъ образомъ, если m есть конечное количество, отличное отъ нуля, то

$$\frac{0}{m}=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію частнаго, оно есть такое количество, которое, по умноженіи на дѣлителя, даетъ дѣлимое; но только ноль, умноженный на количество отличное отъ нуля, можетъ дать въ произведеніи ноль.

Примѣръ. — Дробь

$$\frac{x^2+3x-10}{x^2+5}$$

при $x=2$ обращается въ ноль; въ самомъ дѣлѣ, подставляя вмѣсто x число 2, находимъ $\frac{0}{9}$, т. е. 0.

II. Форма: $\frac{m}{0}$.

249. *Численная величина алгебраическаго выраженія равна безконечности, если оно является подъ видомъ частнаго отъ раздѣленія числа отличнаго отъ нуля на нуль.*

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ дробь $\frac{m}{x}$, которой числитель m есть нѣкоторое конечное число отличное отъ нуля, станемъ уменьшать ея знаменателя, неограниченно приближая его къ нулю: дробь будетъ безпредѣльно возрастать. Такъ, дѣля 1 послѣдовательно на 1, на $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... будемъ въ частномъ получать: 1, 10, 100, 1000, ..., т. е. числа возрастающія, такъ-что когда численная величина знаменателя будетъ менѣе всякой величины, т. е. 0, то численная величина дроби будетъ больше всякой величины, т. е. будетъ *безконечно-велика*.

$$\frac{1}{1}=1$$
$$\frac{1}{{}^1/_{10}}=10$$
$$\frac{1}{{}^1/_{100}}=100$$
$$\frac{1}{{}^1/_{1000}}=1000$$
и т. д.

Такъ-какъ безконечность не можетъ быть выражена никакимъ числомъ, то для письменнаго изображенія ея необходимъ особый знакъ; такимъ знакомъ служитъ ∞. Итакъ,

$$\frac{m}{0}=\infty,$$

если m отлично отъ нуля.

Знакъ ∞ предложенъ *Валлисомъ* въ XVII столѣтіи.

Примѣръ. Дробь

$$\frac{x^2+1}{x^2-3x-4}$$

обращается въ ∞, если положить $x=4$; въ самомъ дѣлѣ, тогда получимъ $\frac{17}{0}$ или ∞.

Когда числитель и знаменатель дроби имѣютъ одинаковые знаки, то при постепенномъ уменьшеніи численной величины знаменателя до нуля, дробь будетъ оставаться положительною, и потому она стремится къ *положительной безконечнос-*

ти. Если же числитель и знаменатель имѣютъ разные знаки, то по мѣрѣ приближенія знаменателя къ нулю, дробь стремится къ *отрицательной безконечности*. Положительная безконечность изображается знакомъ $+\infty$, отрицательная—знакомъ $-\infty$. Такъ, если въ дроби $\frac{+2}{x-3}$, x, будучи больше 3, приближается къ 3, то $x-3$ будетъ оставаться величиною положительною; а потому, когда x, въ концѣ своего измѣненія, обратится въ 3, дробь обратится въ $+\infty$. Если-же x, будучи меньше 3, приближается къ 3, то разность $x-3$ все время будетъ оставаться отрицательною; а потому, когда x достигнетъ своего предѣла 3, дробь обратится въ $-\infty$. Но въ дроби. $\frac{x^2+2}{(x-1)^2}$, будетъ-ли x приближаться къ 1 уменьшаясь, или увеличиваясь, въ обоихъ случаяхъ дробь при $x=1$ обращается въ $+\infty$, потому-что и въ томъ и въ другомъ случаѣ ея числитель и знаменатель остаются положительными.

III. Формы: $\frac{\infty}{m}$ и $\frac{m}{\infty}$.

250. *Частное отъ раздѣленія безконечности на конечное количество—есть безконечность*; т. е.

$$\frac{\infty}{m}=\infty,$$

если m конечно.

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію частнаго,—это послѣднее, будучи умножено на конечное количество m, должно дать безконечность; но никакое конечное количество, умноженное на конечное m, не можетъ дать безконечности; поэтому частное — безконечно велико.

251. *Частное отъ раздѣленія конечнаго количества на безконечно большое равно нулю*; т. е.

$$\frac{m}{\infty}=0,$$

если m конечно.

Въ самомъ дѣлѣ, если дѣлимое конечно, то при неограниченномъ возрастаніи дѣлители частное неограниченно приближается къ нулю, сл. при безконечно-большомъ дѣлителѣ численная величина частнаго будетъ нуль.

252. *Частное отъ раздѣленія нуля на безконечность есть ноль*, *а частное отъ раздѣленія безконечности на нуль есть безконечность*; т. е.

$$\frac{0}{\infty}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\infty}{0}=\infty.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{0}{\infty}$ есть 0 по двоякой причинѣ: съ одной стороны потому, что числитель $=0$ (§ 248), съ другой потому, что знаменатель равенъ безконечности (§ 251). — Подобнымъ-же образомъ убѣдимся и въ томъ, что $\frac{\infty}{0}=\infty$.

253. Теорема. *Численная величина цѣлаго по буквѣ x полинома съ конечными коэффиціентами,—конечна при x конечномъ, и безконечно-велика при x безконечномъ.*

Пусть имѣемъ полиномъ

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

цѣлый относительно x, съ конечными коэффиціентами a, b, c, d, e, причемъ a отлично отъ нуля; понятно, что при всякомъ конечномъ значеніи x каждый членъ полинома конеченъ, а алгебраическая сумма конечнаго числа конечныхъ слагаемыхъ конечна.

Пусть теперь x будетъ безконечно-велико; вынеся x^4 за скобки, дадимъ полиному видъ

$$x^4\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x^3}+\frac{e}{x^4}\right);$$

при $x=\infty$ каждый изъ членовъ въ скобкахъ, содержащій x въ знаменателѣ, обратится въ 0 (§ 251), такъ-что въ скобкахъ останется a; поэтому произведеніе, т. е. данный полиномъ, обращается въ $a\times\infty$, т. е. представляетъ произведеніе конечнаго числа a, отличнаго отъ нуля, на безконечность; а такое произведеніе, очевидно, есть безконечность. Очевидно, знакъ этой безконечности будетъ такой, какой имѣетъ членъ ax^4 — высшій членъ полинома.

IV. Форма $\frac{0}{0}$.

254. Выраженіе $\frac{0}{0}$, разсматриваемое само-по-себѣ, означаетъ какое угодно число. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить 0 на 0 значитъ найти такое число, которое, будучи умножено на 0, давало-бы 0; но всякое конечное число имѣетъ это свойство (такъ: $5\times 0=0$, $-2\times 0=0$ и т. д.), слѣд. $\frac{0}{0}$ означаетъ не одно какое-либо число въ частности, но какія угодно числа. Поэтому $\frac{0}{0}$ называютъ символомъ *неопредѣленности*.

Изъ этого слѣдуетъ, что если два количества A и B равны третьему C, то нельзя еще заключить, что $A=B$, не увѣрившись предварительно, что C не есть $\frac{0}{0}$.

255. Теорема. *Когда алгебраическая дробь, которой числитель и знаменатель суть цѣлые раціональные относительно x полиномы, принимаетъ при нѣкоторомъ частномъ значеніи x неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$, — эта неопредѣленность — только кажущаяся, на самомъ же дѣлѣ дробь имѣетъ совершенно опредѣленную величину.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дробь $\frac{A}{B}$, которой числитель и знаменатель обращаются въ ноль при $x=a$; это доказываетъ, что и A, и B, дѣлятся на $x-a$ (§ 63). Пусть частное отъ раздѣленія A на $x-a$ будетъ A'; въ такомъ случаѣ

$$A=(x-a)A';$$

цѣлый относительно x полиномъ A' можетъ также обращаться въ ноль при $x=a$; тогда онъ будетъ имѣть видъ

$$A' = (x - a)\,A'',$$

а слѣд.

$$A = (x - a)^2\,A''.$$

A'', въ свою очередь, также можетъ обратиться въ ноль при $x = a$ и т. д.

Такимъ образомъ можно написать:

$$A = (x - a)^m . P,$$

гдѣ P есть цѣлый относительно x полиномъ, не обращающійся въ ноль при $x = a$; онъ можетъ быть и нулевой степени, т. е. вовсе не содержать буквы x.

Такимъ-же образомъ можемъ написать:

$$B = (x - a)^p . Q,$$

гдѣ Q — цѣлый относительно x полиномъ, который можетъ быть и нулевой степени, не обращающійся въ ноль при $x = a$. Данная дробь имѣетъ, такимъ образомъ, видъ:

$$\frac{(x - a)^m . P}{(x - a)^p . Q}.$$

Изслѣдуемъ всевозможные случаи, полагая послѣдовательно:

$$m > p, \qquad m = p, \qquad m < p.$$

Первый случай. — $m > p$. Положивъ $x = a$, найдемъ, что дробь обращается въ $\frac{0}{0}$. Но, сокративъ ее на $(x - a)^p$, дадимъ ей видъ

$$\frac{(x - a)^{m-p} . P}{Q},$$

гдѣ $m - p$ — положительно; положивъ $x = a$, найдемъ, что $(x - a)^{m-p} = 0$, а P и Q — отличны отъ нуля; поэтому, *истинная величина* дроби при $x = a$ есть ноль.

Примѣръ. Дробь

$$\frac{(x - 3)^4 (x + 1)}{(x - 3)^2 (x + 2)}$$

при $x = 3$ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$; но, сокративъ ее на $(x - 3)^2$, найдемъ

$$\frac{(x - 3)^2 (x + 1)}{(x + 2)},$$

и положивъ $x = 3$, найдемъ

$$\frac{0 \times 4}{5} \text{ или } 0.$$

Второй случай. $m = p$. Положивъ $x = a$, найдемъ, что дробь обращается въ $\frac{0}{0}$, а сокративъ ее на $(x - a)^m = (x - a)^p$, получимъ

$$\frac{A}{B} = \frac{P}{Q},$$

а какъ P и Q не обращаются при $x = a$ въ ноль, то $\frac{A}{B}$ представляетъ нѣкоторое опредѣленное число.

Примѣръ. Дробь

$$\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x-1)^3(x+3)}$$

при $x=1$ обращается въ $\frac{0}{0}$; но, по сокращеніи на $(x-1)^3$, она обращается въ

$$\frac{x+2}{x+3}$$

Положивъ въ этой дроби $x=1$, найдемъ вполнѣ опредѣленное число $\frac{3}{4}$.

Третій случай. — $m<p$. — Положивъ $x=a$, найдемъ $\frac{0}{0}$; но если предварительно сократимъ дробь на $(x-a)^m$, то найдемъ

$$\frac{A}{B}=\frac{P}{(x-a)^{p-m}.Q},$$

такъ-какъ $p-m$ — положительно, то при $x=a$ знаменатель обратится въ ноль; а какъ числитель отличенъ отъ нуля, то дробь обратится въ ∞.

Примѣръ. —Дробь $\frac{(x+1)^3(x-2)}{(x+1)^5(x-3)}$ при $x=-1$ обращается въ $\frac{0}{0}$; но, по сокращеніи на $(x+1)^3$, принимаетъ видъ

$$\frac{x-2}{(x+1)^2.(x-3)},$$

положивъ $x=-1$, найдемъ $\frac{-3}{0(-4)}=\infty$. Такимъ образомъ, истинное значеніе дроби при $x=-1$ есть безконечность.

256. Первый способъ опредѣленія истиннаго значенія неопредѣленности вида $\frac{0}{0}$.

Изъ предыдущаго § слѣдуетъ, что для опредѣленія истиннаго значенія неопредѣленности, или какъ говорятъ, для *раскрытія неопредѣленности*, надо въ числителѣ и знаменателѣ дроби выдѣлить общаго множителя, обращающагося въ ноль при частномъ предположеніи, сократить дробь на этого множителя и потомъ сдѣлать сказанное предположеніе.

Примѣръ I. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{a^2-3a+2}{a^2+a-6}$$

при $a=2$.

Замѣняя a числомъ 2, получаемъ $\frac{0}{0}$, т. е. неопредѣленность; тѣмъ не менѣе, мы утверждаемъ, что при $a=2$ данная дробь имѣетъ совершенно опредѣленную величину. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ уже, что если числитель и знаменатель обращаются при $a=2$ въ ноль, то они дѣлятся на $a-2$, откуда находимъ, что дробь можно представить въ видѣ

$$\frac{(a-2)\ (a-1)}{(a-2)\ (a+3)},$$

сокративъ на $a-2$, находимъ

$$\frac{a-1}{a+3},$$

260. Такимъ образомъ, когда алгебраическое выраженіе принимаетъ видъ $0 \times \infty$, при частномъ значеніи какой либо буквы, то является вопросъ объ опредѣленіи истинной величины этого выраженія.

Примѣръ. Найти истинную величину выраженія

$$(x^2+5x+6) \times \frac{3}{x^2+3x+2}$$

при $x=-2$.

Подставивъ (-2) вмѣсто x, находимъ: $0 \times \infty$. Представивъ данное выраженіе въ видѣ

$$\frac{3(x^2+5x+6)}{x^2+3x+2},$$

приводимъ вопросъ къ раскрытію неопредѣленности $\frac{0}{0}$, при $x=-2$.

Примѣняя пріемъ § 256, находимъ:

$$\frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+1)} = \frac{3(x+3)}{x+1}.$$

Истинное значеніе будетъ:

$$\frac{3(-2+3)}{-2+1}, \text{ или } \frac{3}{-1}=-3.$$

VI. Форма: $\frac{\infty}{\infty}$.

261. Если въ равенствѣ $\frac{\frac{1}{A}}{\frac{1}{B}} = \frac{B}{A}$ положить $A=0$ и $B=0$, то получимъ: $\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0}$. Слѣдовательно, символъ $\frac{\infty}{\infty}$, разсматриваемый самъ по себѣ, означаетъ неопредѣленность.

Неопредѣленность эта можетъ быть только кажущеюся. Такъ:

1) $\frac{2x^5}{x^4}=2x$; положивъ $x=\infty$, найдемъ: $\frac{\infty}{\infty}=\infty$.

2) $\frac{2x^5}{x^5}=2$; положивъ $x=\infty$, найдемъ въ этомъ случаѣ, что $\frac{\infty}{\infty}=2$.

3) $\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$; положивъ $x=\infty$, въ этомъ случаѣ найдемъ: $\frac{\infty}{\infty}=0$.

Итакъ, подъ видомъ неопредѣленности $\frac{\infty}{\infty}$ можетъ скрываться или ∞, или конечное количество, или нуль. Отсюда задача о раскрытіи неопредѣленности разсматриваемаго вида.

262. Въ § 253 мы видѣли, что величина цѣлаго раціональнаго по буквѣ x полинома равна безконечности при $x=\infty$, если коэффиціенты его конечны. Отсюда слѣдуетъ, что алгебраическая дробь, числитель и знаменатель которой суть цѣлые относительно x полиномы, обращается въ $\frac{\infty}{\infty}$ при $x=\infty$. Докажемъ, что истинная величина такой дроби, при x безконечномъ, равна: *нулю, если степень знаменателя выше степени числителя*; *безконечности — если*,

наоборотъ, степень знаменателя ниже степени числителя; и частному отъ раздѣленія коэффиціентовъ при высшихъ степеняхъ буквы x, если степень знаменателя равна степени числителя.

Первый случай. Найти истинную величину дроби

$$\frac{x^2 - x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 4}$$

при $x = \infty$.

Дробь принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$; чтобы раскрыть эту кажущуюся неопредѣленность, раздѣлимъ числ. и знам. на высшую степень x, въ данномъ случаѣ на x^3. Найдемъ

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}}.$$

Если положить $x = \infty$, каждый членъ, содержащій x въ знаменателѣ обратится въ ноль, а дробь въ $\frac{0}{2}$ или въ 0.

Второй случай. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{3x^3 + 2x - 1}{5x^3 - 2x^2 + 3}$$

при $x = \infty$.

Дробь принимаетъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$. Раздѣливъ оба члена ея на высшую степень x, въ данномъ случаѣ на x^3, найдемъ:

$$\frac{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{5 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}}.$$

При $x = \infty$ дроби: $\frac{2}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{2}{x}$ и $\frac{3}{x^3}$ обращаются въ ноль, и данная дробь равна $\frac{3}{5}$, т. е. отношенію коэффиціентовъ при высшихъ степеняхъ x.

Третій случай. Найти истинное значеніе дроби

$$\frac{x^3 - x + 1}{-2x^2 + 5}$$

при $x = \infty$.

Раздѣливъ числителя и знаменателя на x^3, получимъ:

$$\frac{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{-\frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}}, \quad \text{или} \quad \frac{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}\left(-2 + \frac{5}{x^2}\right)}.$$

При $x = \infty$, числитель обращается въ 1, а знаменатель въ 0×-2 или въ -0; истинная величина дроби $= -\infty$.

VII. Форма: $\infty - \infty$.

263. Сумма двухъ безконечностей одного знака, очевидно, равна безконечности съ тѣмъ же знакомъ; разность двухъ безконечностей съ противоположными знаками равна безконечности; но разность двухъ безконечностей одного знака, и сумма двухъ безконечностей противоположнаго знака суть формы неопредѣленныя.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ равенствѣ $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{B - A}{AB}$, положимъ $A = 0$ и $B = 0$, то найдемъ: $\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$, или $\infty - \infty = \frac{0}{0}$.

Укажемъ, какъ раскрывать кажущуюся неопредѣленность этого вида.

Примѣръ I. Найти истинное значеніе выраженія

$$x^3 - x^2$$

при $x = \pm\infty$.

При $x = +\infty$ данная разность принимаетъ видъ $\infty - \infty$. Вынося x^3 за скобки, мы дадимъ ей видъ: $x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, что при $x = +\infty$ обращается въ $+\infty$.

При $x = -\infty$ данное выраженіе $= -\infty - \infty$ или $-\infty$.

Примѣръ. II. Найти истинное значеніе разности

$$(x+1) - \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

при $x = \pm\infty$.

При $x = -\infty$ данная разность обращается въ $-\infty - \infty$ или въ $-\infty$.

При $x = +\infty$, $x + 1$ равняется $+\infty$, равно какъ и $2x^2 - 3x + 1$; сл. мы получаемъ разность двухъ положительныхъ безконечностей—выраженіе неопредѣленное. Чтобы раскрыть эту кажущуюся неопредѣленность, множимъ и дѣлимъ данное выраженіе на сумму $x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$, и получаемъ

$$\frac{(x + 1 - \sqrt{2x^2 - 3x + 1})(x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1})}{x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}},$$

или
$$\frac{(x+1)^2 - (2x^2 - 3x + 1)}{x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}},$$

или
$$\frac{-x^2 + 5x}{x + 1 + \sqrt{2x^2 - 3x + 1}}.$$

Раздѣливъ числ. и знам. на x^2, находимъ

$$\frac{-1 + \frac{5}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}$$

или
$$\frac{-1 + \frac{5}{x}}{\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)},$$

Положивъ здѣсь $x = +\infty$, находимъ $\frac{-1}{0(1 + \sqrt{2})}$ или $-\infty$.

Примѣръ III. Найти истинное значеніе разности

$$x+2-\sqrt{x^2-5x+1}$$

при $x=\pm\infty$.

При $x=-\infty$ находимъ $-\infty$.

При $x=+\infty$ разность принимаетъ неопредѣленный видъ $\infty-\infty$.

Чтобы раскрыть неопредѣленность, множимъ и дѣлимъ данное выраженіе на $x+2+\sqrt{x^2-5x+1}$; находимъ:

$$\frac{(x+2)^2-(x^2-5x+1)}{x+2+\sqrt{x^2-5x+1}},$$

или

$$\frac{9x+3}{x+2+\sqrt{x^2-5x+1}}.$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на x, получаемъ

$$\frac{9+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}.$$

Положивъ $x=+\infty$, находимъ $\frac{9}{1+\sqrt{1}}$ или $\frac{9}{2}$. Итакъ, истинная величина даннаго выраженія, при $x=+\infty$, равна $\frac{9}{2}$.

264. Задачи.

Опредѣлить величины нижеслѣдующихъ выраженій при указанныхъ въ каждомъ случаѣ условіяхъ:

1. $\frac{x^4-2x^2+1}{x^3-x^2-x+1}$ при $x=1$.
2. $\frac{x^5-a^5}{x^3+a^3}$ при $x=-a$.
3. $\frac{x^3+5ax^2-4a^2x-2a^3}{x^2-a^2}$ при $x=a$.
4. $\frac{x^5+ax^4-a^4x-a^5}{x^4+2ax^3-2a^2x^2-2a^3x+a^4}$ при $x=a$.
5. $\frac{2a^2+3a-2}{4a^3+16a^2-19a+5}$ при $a=\frac{1}{2}$.
6. $\frac{75x^4+140x^3-223x^2+92x-12}{45x^4-93x^3+65x^2-19x+2}$ при $x=\frac{2}{5}$ и при $x=\frac{1}{3}$.
7. $\frac{x^2+x}{x^3+x^2}$ при $x=0$.
8. $\frac{a(x^2+c^2)-2acx}{b(x^2+c^2)-2bcx}$ при $x=c$.
9. $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{1-x}$ при $x=1$.
10. $\frac{x.e^{2x}+1-e^{2x}-x}{e^{2x}-1}$ при $x=0$.

11. $\frac{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}{x^4-2x^3-13x^2+14x+24}$ при $x=-1$; $x=-3$; $x=2$; $x=-2$; $x=4$; $x=-4$.

12. $\frac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}$ при $x=2$.

13. $\frac{x^3-x^2(a+2b)+x(a^2+b^2)-a(a-b)^2}{x^2-a^2}$ при $x=a$.

14. $\frac{x^5+y^5-x^4y-xy^4}{x^3-y^3}$ при $x=y$.

15. $\frac{\sqrt{x^2-a^2}-(a+b)\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}+(a-b)\sqrt{x^2-a^2}}$ при $x=a$.

16. $\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3x^2-5}}{\sqrt{4x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2+1}}$ при $x=2$.

17. $\frac{\sqrt{x^3+a^3}-\sqrt{x^2(a-b)-ax(a-b)+2a^3}}{\sqrt{x^3+a^2x-b^3}-\sqrt{ax^2+2a^2x-(a^3+b^3)}}$ при $x=a$.

18. $\frac{7x^3-4x^2+1}{2x^2-3x+5}$ при $x=\infty$.

19. $\frac{2x^2-5x+1}{x^3+2}$; $\frac{2x^4+4x+1}{x-3}$; $\frac{5x^3-x}{x^3+2}$ при $x=\pm\infty$.

20. $\frac{ax^4-(a-b)^2x^3+a^3b^2}{(a-b)x^4-a^3x^2+a^2b^3}$; $\frac{3x-a}{x^2-bx+ab}$ при $x=\infty$.

21. $\frac{x+3\sqrt{x}}{7\sqrt{x}+2x}$; $\frac{2\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}+1}{5\sqrt{x}-1}$; $\frac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$; $\frac{2\sqrt[3]{x}+4\sqrt{x^2-a^2}+x}{5\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x+a}}$; $\frac{3x+\sqrt{2x^2-1}}{5x-\sqrt{4x^2+1}}$; $\frac{\sqrt[3]{x^6+6x^5+8x^4+9x+1}+\sqrt[4]{x^8+5x^7+9x^3+4}}{x-1+\sqrt{x^4+3x-15}}$

при $x=\infty$.

22. $\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$ при $x=1$.

23. $\frac{2x-5+\sqrt{4x^2+2}}{3}$; $3x-\sqrt{x^2-x+1}$ при $x=\pm\infty$.

24. $x+2-\sqrt{x^2+4x+3}$; $3x-\sqrt{x^2+2}$ при $x=+\infty$.

25. $x-\frac{x}{1+\frac{1}{x}}$ при $x=\infty$.

26. $\sqrt{x^2+7x+5}-\sqrt{x^2-5x+3}$ при $x=\infty$.

27. $\sqrt{x^2+19x-7}-\sqrt{x^2+3x+5}$ при $x=\infty$.

28. Показать, что $\sqrt[3]{x^3+1}-x$, при $x=\infty$, равняется 0.

29. $\sqrt{x^4-7x^3+2x+1}-\sqrt{x^4-7x^3+3x^2-4}$ при $x=\infty$.

30. $\sqrt{x^3+a^3}-\sqrt{x^3-b^3}$ при $x=\infty$.

31. $\sqrt{x^3-a^2x+a^2}-\sqrt[3]{x^2-ax+a^2}$ при $x=\infty$.

32. $\sqrt{a^2x^2+bx+c}-ax$ при $x=\infty$.

33. Показать что дробь $\frac{a+x}{a^2-x^2}$, при $x=\infty$, равна 0.

34. Показать, что дробь $\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$, при $x=a$, обращается въ $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

35. Найти величину $\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x^2+3}$ при $x=\infty$.

36. Во что обращается $a-\sqrt{a^2-b^2}$ при $a=\infty$ и $b=\infty$, если при этихъ условіяхъ $\frac{b^2}{a}$ обращается въ m.

37. Даны соотношенія

$$a'=\frac{r+a}{2},\quad r'=\sqrt{ra'};$$

найти величину дроби $\frac{r'-a'}{r-a}$ при $r=a$.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

УРАВНЕНІЯ И НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

ГЛАВА XVIII.

Уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Опредѣленія: равенство, тождество, уравненіе. — Уравненія тождественныя. — Преобразованія уравненія въ другое ему тождественное. — Рѣшеніе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.—Примѣры.

Опредѣленія.

265. Соединеніе двухъ равныхъ количествъ знакомъ $=$ (знакъ равенства) называется *равенствомъ*. Такъ $7=5+2$ есть равенство; общій видъ равенства есть

$$A=B.$$

Количество A, находящееся влѣво отъ знака равенства, наз. *первою частью*, количество же B, стоящее вправо отъ этого знака, *второю частью* равенства. Равенства бываютъ двоякаго рода: *тождества* и *уравненія*.

Всякое *очевидное равенство* называютъ *тождествомъ*.

Такъ, равенства

$$5=5; \qquad 10=7+2+1; \qquad (a+b)^2=(a+b)^2$$

суть тождества.

Тождествомъ называютъ также всякое равенство двухъ буквенныхъ выраженій, вѣрное при всѣхъ, какихъ угодно, значеніяхъ входящихъ въ него буквъ. Такимъ образомъ, равенства

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

суть тождества.

Но если возмемъ равенство $2x-10=0$, то легко убѣдимся, что оно будетъ вѣрно не при всякихъ частныхъ значеніяхъ буквы x; въ самомъ дѣлѣ, чтобы первая часть была нулемъ, нужно чтобы $2x$ равнялось 10, а это воз-

можно только при x равномъ 5, и ни при какомъ другомъ значеніи буквы x. Точно такъ-же равенство $x^2=16$ возможно не при всякомъ значеніи буквы x, а лишь при двухъ частныхъ значеніяхъ этой буквы, именно: при $x=+4$ и при $x=-4$; въ самомъ дѣлѣ, какъ $(+4)^2=16$, такъ и $(-4)^2=16$.

Такія равенства, которыя вѣрны не при всѣхъ, а лишь при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ буквъ, называются *уравненіями.*

Тѣ буквы, которымъ нужно дать особыя значенія для того чтобы существовало равенство между обѣими частями ур—нія, иначе говоря, тѣ буквы при частныхъ значеніяхъ которыхъ уравненіе въ самомъ дѣлѣ обращается въ тождество, называются неизвѣстными количествами уравненія, или просто *неизвѣстными.* Прочія-же количества, входящія въ уравненія, наз. *извѣстными.*

Такъ, если мы ищемъ, при какомъ значеніи x равенство

$$a+b=2x-c$$

будетъ справедливо, т. е. обратится въ тождество, то x будетъ *неизвѣстнымъ* этого уравненія. Легко видѣть, что ур. это обратится въ тождество, если x-су дать значеніе $\frac{a+b+c}{2}$; въ самомъ дѣлѣ, вторая часть обращается при этомъ въ $2\times\frac{a+b+c}{2}-c$ или въ $a+b+c-c$, что равно $a+b$; ур—ніе-же дѣйствительно дѣлается тождествомъ

$$a+b=a+b.$$

Тѣ частныя значенія неизвѣстныхъ, при которыхъ ур—ніе обращается въ тождество, называются *рѣшеніями* или *корнями* уравненія. Въ вышеприведенныхъ примѣрахъ:

ур—ніе $2x-10=0$ имѣетъ одинъ корень $=5$;

ур—ніе $x^2=16$ имѣетъ два корня: $+4$ и -4:

ур—ніе $a+b=2x-c$ имѣетъ одинъ корень: $\frac{a+b+c}{2}$.

Рѣшить уравненіе значитъ найти его корни, т. е. тѣ значенія для неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ уравненіе въ тождество.

Принято говорить, что *корень удовлетворяетъ уравненію*; этимъ сокращенно выражаютъ, что уравненіе обращается въ тождество, если замѣнить въ немъ неизвѣстныя корнями.

Для отличія неизвѣстныхъ количествъ ур—нія отъ извѣстныхъ, принято неизвѣстныя обозначать послѣдними буквами азбуки: x, y, z, t, u, v, ... ; извѣстныя же первыми: a, b, c, d, ... , m, n, . . .

Такъ, въ уравненіи $a+b=2x-c$ неизвѣстное есть x, извѣстныя же: a, b и c.

266. Классификація уравненій. — Уравненіе наз. *алгебраическимъ*, если въ немъ надъ неизвѣстными не совершается иныхъ дѣйствій кромѣ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня.

Во всѣхъ другихъ случаяхъ ур. называется *трансцендентнымъ.*

Такъ уравненіе $10^x=8$ есть трансцендентное; оно называется *показательнымъ*, ибо въ немъ неизвѣстное является показателемъ.

Всѣ алгебраическія уравненія раздѣляются на два класса: на *раціональныя* и *ирраціональныя*.

Алгебраическое ур. называется *раціональнымъ*, если въ немъ *неизвѣстныя не входятъ подъ знакомъ корня*; если же въ уравненіи неизвѣстныя встрѣчаются подъ знакомъ корня, то оно наз. *ирраціональнымъ*.

Такъ, уравненіе

$$\frac{2}{x}+x^2-1=\sqrt{5}$$

есть раціональное, ибо въ немъ неизвѣстное не встрѣчается подъ знакомъ корня.

Уравненіе же

$$\sqrt{5x-1}=2x-3$$

есть ирраціональное, ибо членъ $\sqrt{5x-1}$ содержитъ неизвѣстное подъ знакомъ корня.

Раціональныя уравненія, въ свою очередь, раздѣляются на *цѣлыя* и *дробныя*.

Цѣлымъ наз. такое раціональное ур., которое не содержитъ неизвѣстное въ знаменателѣ; напр. уравненія

$$x^2-5x-4=0 \quad \text{и} \quad \frac{2}{3}x-10=5x-1$$

суть цѣлыя.

Если же уравненіе содержитъ неизвѣстныя въ знаменателѣ, то оно наз. *дробнымъ*. Уравненіе.

$$\frac{3-5x}{1+x}=4$$

есть ур. дробное.

Такимъ образомъ обѣ части цѣлаго алгебраическаго уравненія суть *полиномы цѣлые относительно неизвѣстнаго*.

Степенью цѣлаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ называется высшій показатель при неизвѣстномъ въ этомъ уравненіи. Такъ:

ур—ніе $ax+b=0$ есть ур—ніе первой степени;

ур—ніе $ax^2+bx+c=0$ — второй степени;

ур—ніе $4x^3-2ax^2+5x-1=0$ — третьей степени.

Если же цѣлое ур. содержитъ нѣсколько неизвѣстныхъ, то степенью его наз. наибольшая сумма показателей при неизвѣстныхъ въ одномъ и томъ же членѣ.

Такъ ур—ніе

$$ax+by+cz=d$$

есть ур. первой степени съ тремя неизвѣстными (x, y и z).

Ур. $$4x-5xy-9=4y-11x$$

есть ур. второй степени съ двумя неизвѣстными, ибо наибольшая сумма показателей при неизвѣстныхъ равна 2 (въ членѣ $-5xy$).

Ур. $$x^2y^4+y^2+\frac{xy}{7}+\sqrt{c}=2$$

есть ур. седьмой степени, такъ какъ наибольшая сумма показателей при неизвѣстныхъ въ одномъ и томъ же членѣ равна 7 (въ первомъ членѣ).

Понятно, что нельзя говорить о степени ур—нія, если оно не есть раціональное цѣлое. Такъ мы не можемъ говорить о степени ур—ній

$$x+\sqrt{x}+1=0, \qquad \frac{x}{x-a}+\frac{x-b}{x+a}=c,$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{\frac{a}{b}}-c,$$

ибо они содержатъ члены или дробные, или ирраціональные относительно неизвѣстныхъ.

Уравненія раздѣляютъ еще на *численныя* и *буквенныя*; численнымъ ур—мъ называютъ такое, коэффиціенты котораго суть опредѣленныя числа, а буквеннымъ такое, коэфиціенты коего суть буквенныя выраженія. Такъ

ур—ніе $3x-y^2+5=0$ есть численное;

ур—ніе $a^2x-\frac{a+b}{c}x^2-2=d$ есть ур. буквенное.

Если два ур—нія имѣютъ одинаковые корни, то они наз. *тождественными* ур—ми. Итакъ, уравненія

$$A=B \ \ldots . (1) \qquad \text{и} \qquad A'=B' \ \ldots . (2)$$

будутъ тождественны, если всякій корень ур—нія (1) удовлетворяетъ (2), и обратно, каждый корень (2) удовлетворяетъ (1).

Такъ напр., ур—нія

$$2x+1=7 \ \ldots . (1) \qquad \text{и} \qquad 2x+4=10 \ \ldots . (2)$$

тождественны, ибо какъ то, такъ и другое удовлетворяются однимъ и тѣмъ же корнемъ, равнымъ 3.

267. Процессъ рѣшенія ур—нія заключается въ томъ, что отъ даннаго уравненія, путемъ послѣдовательныхъ преобразованій, стараются придти къ такому уравненію, первая часть котораго есть само неизвѣстное; понятно, что вторая часть такого ур—нія и будетъ искомымъ корнемъ, если послѣднее тождественно съ даннымъ.

Сказанныя преобразованія основаны на слѣдующихъ началахъ.

268. Первое начало. *Придавая къ обѣимъ частямъ уравненія поровну, или отнимая отъ обѣихъ частей равныя количества, получимъ уравненіе тождественное съ даннымъ.*

Пусть данное уравненіе будетъ

$$A=B \ \ldots .. (1)$$

гдѣ A и B суть нѣкоторыя алгебраическія выраженія, содержащія одно или нѣсколько неизвѣстныхъ. Пусть будетъ, далѣе, M нѣкоторое произвольное количество, содержащее или несодержащее неизвѣстныя. Требуется доказать, что уравненіе

$$A+M=B+M \ \ldots .. (2)$$

тождественно съ даннымъ. Это значитъ нужно доказать, что всякій корень

ур—нія (1) служитъ также корнемъ и для (2), и обратно — всякій корень ур—нія (2) удовлетворяетъ и ур—нію (1). Въ самомъ дѣлѣ:

1°. Пусть $x = 5$ будетъ корнемъ ур—нія (1); это значитъ, что при подстановкѣ числа 5 вмѣсто x въ уравненіе (1) количества A и B дѣлаются равными; но такъ какъ M всегда остается равнымъ самому себѣ, то очевидно, что при $x = 5$, и $A + M$ будетъ равно $B + M$, т. е. подстановка 5 вмѣсто x въ уравненіе (2) обращаетъ его въ тождество, а это и значитъ, что 5 есть корень уравненія (2). Такимъ образомъ, мы доказали, что всякій корень уравненія (1) удовлетворяетъ необходимо и уравненію (2).

2°. Наоборотъ: пусть $x = \alpha$ будетъ корнемъ уравненія (2), т. е. что при подстановкѣ количества α вмѣсто x въ уравненіе (2), $A + M$ дѣлается равнымъ $B + M$; но какъ M всегда равно самому себѣ, то равенство суммъ $A + M$ и $B + M$ требуетъ равенства выраженій A и B. Итакъ, при $x = \alpha$ имѣемъ $A = B$, т. е. $x = \alpha$ служитъ корнемъ ур—нія (1).

Итакъ, доказано, что уравненія (1) и (2) имѣютъ совершенно одинаковые корни, т. е. что эти уравненія тождественны.

Если отъ обѣихъ частей ур—нія (1) отнять по M, то уравненіе $A - M = B - M$ также тождественно съ уравненіемъ $A = B$. Въ Самомъ дѣлѣ, отнять M все равно что придать $(-M)$ къ обѣимъ частямъ даннаго ур—нія; но уже доказано, что приданіе равныхъ количествъ къ обѣимъ частямъ уравненія приводитъ къ уравненію, тождественному съ даннымъ.

269. Слѣдствіе I. — *Всякій членъ уравненія можно перенести изъ одной части уравненія въ другую, написавъ его въ этой другой части съ обратнымъ знакомъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть данное уравненіе будетъ

$$ax - b = cx + d \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

придавая къ обѣимъ частямъ по $-cx$, имѣемъ

$$ax - cx - b = cx - cx + d, \quad \text{или} \quad ax - cx - b = + d. \; . \; . \; . \; (2)$$

причемъ, на основаніи доказаннаго начала, ур. (2) тождественно съ (1). Придавая, затѣмъ, къ обѣимъ частямъ ур. (2) по $+b$, находимъ

$$ax - cx - b + b = b + d, \quad \text{или} \quad ax - cx = b + d \; . \; . \; . \; (3),$$

причемъ это ур. тождественно со (2), а слѣд. и съ (1).

Сравнивая ур. (3) съ (1), замѣчаемъ, что членъ cx перешелъ въ первую часть съ знакомъ $-$, между тѣмъ какъ во второй части ур. (1) этотъ членъ имѣлъ знакъ $+$, членъ b перешолъ во вторую часть съ знакомъ $+$, между тѣмъ какъ въ первой части уравненія этому члену предшествовалъ знакъ $-$. Отсюда выводится заключеніе: перенося члены изъ одной части уравненія въ другую, слѣдуетъ у переносимыхъ членовъ мѣнять знаки на противоположные.

270. Слѣдствіе II. — *Всякое уравненіе можно привести къ виду*

$$P = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, перенеся всѣ члены изъ второй части уравненія въ первую, очевидно, будемъ имѣть во второй части 0.

Напримѣръ, уравненіе

$$4x^2 - 7x + 2 = 3x - 6$$

тождественно съ уравненіемъ

$$4x^2-10x+8=0.$$

Если имѣемъ уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, то перенеся всѣ члены въ первую часть и сдѣлавъ приведеніе, дадимъ такому ур—нію видъ

$$ax+b=0,$$

гдѣ a и b суть выраженія, не содержащія x. Это и есть, слѣд., самый общій видъ уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Точно такъ же уравненіе

$$ax^2+bx+c=0,$$

въ которомъ a, b и c не зависятъ отъ x, есть самый общій видъ ур—нія второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Уравненіе.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

представляетъ общій видъ ур—нія третьей степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Наконецъ, уравненіе

$$A_m x^m+A_{m-1}x^{m-1}+A_{m-2}x^{m-2}+\ldots\ldots+A_2x^2+A_1x+A_0=0$$

есть общій видъ ур—нія m-ой степени съ 1 неизвѣстнымъ.

271. Слѣдствіе III. — *Можно перемѣнить знаки у всѣхъ членовъ уравненія на обратные.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть дано уравненіе

$$19-7x=5-4x \quad \ldots\ldots (1)$$

Замѣтимъ прежде всего, что всегда можно переставить части уравненія, т. е. написать вторую часть уравненія влѣво отъ знака равенства и наоборотъ; ибо очевидно, что ур—ніе $M=N$, тождеств. съ $N=M$ [1]). Сдѣлавъ это, найдемъ

$$5-4x=19-7x.$$

Затѣмъ перенесемъ члены второй части въ первую и наоборотъ; получимъ

$$-19+7x=-5+4x \quad \ldots\ldots (2).$$

Сравнивая это ур. съ (1), замѣчаемъ, что оно отличается отъ (1) знаками при всѣхъ членахъ.

272. Второе начало. *Помноживъ обѣ части уравненія на одно и тоже количество, получимъ уравненіе тождественное съ даннымъ, если только взятый множитель не есть ни нуль, ни безконечность, и не содержитъ неизвѣстнаго.*

Пусть дано уравненіе

$$A=B \quad \ldots\ldots (1),$$

и M — количество, не равное ни 0, ни ∞ и не обращающееся ни въ 0, ни въ ∞. Требуется доказать, что при такомъ ограниченіи относительно M, уравненіе

$$A.M=B.M \quad \ldots\ldots (2)$$

1) Дѣйствительно, всякое значеніе неизвѣстнаго, дѣлающее M равнымъ N, дѣлаетъ, наоборотъ, и N равнымъ M.

тождественно съ уравненіемъ $A=B$, т. е. что всякій корень перваго удовлетворяетъ второму и наоборотъ.

Для удобства доказательства замѣнимъ уравненія (1) и (2) тождественными имъ

$$A-B=0\ .\ .\ .\ .\ (I) \qquad \text{и} \qquad (A-B).\ M=0\ .\ .\ .\ .\ (II)$$

ур. (I) тождественно съ (1), и (II) со (2), ибо перенесеніе членовъ изъ одной части въ другую приводитъ всегда къ тождественнымъ съ данными уравненіямъ.

Итакъ, докажемъ, что (I) тождественно со (II).

1°. Пусть $x=\alpha$ будетъ однимъ изъ корней уравненія (I); это значитъ, что при подстановкѣ α вмѣсто x въ ур. (I), это ур. обращается въ тождество, т. е. $A-B$ — въ ноль. Подставимъ теперь α вмѣсто x въ ур. (II); при этомъ $A-B$, какъ уже знаемъ, обратится въ 0; а произведеніе двухъ множителей: $A-B$ и M, изъ коихъ одинъ равенъ нулю, само равняется 0, если только другой множитель не обращается въ ∞; но, по условію, M не есть и не обращается въ ∞, сл. произведеніе $(A-B)\ M$, при $x=\alpha$, дѣйствительно обращается въ 0, а ур. (II) въ тождество $0=0$. Значитъ $x=\alpha$ служитъ корнемъ ур—нія (II).

2°. Пусть $x=\beta$ есть одинъ изъ корней ур—нія (II); это значитъ, что при подстановкѣ β вмѣсто x въ ур—ніе (II) произведеніе $(A-B)M$ дѣлается нулемъ; но чтобы произведеніе двухъ множителей было $=0$, необходимо, чтобы одинъ изъ множителей равнялся 0, и какъ M, по условію, не есть 0, то $A-B$ должно обращаться въ ноль. Итакъ, при подстановкѣ β вмѣсто x, выраженіе $A-B$ обращается въ 0, а сл. $x=\beta$ служитъ корнемъ и (I) уравненія.

Итакъ, мы доказали, что при сдѣланномъ ограниченіи относительно M, всякій корень 1-го уравненія служитъ корнемъ и втораго, и наоборотъ; а слѣд. ур—нія (I) и (II) тождественны, и одно изъ нихъ можетъ быть замѣнено другимъ.

273. Можно раздѣлить обѣ части ур—нія на одно и тоже количество M, лишь бы оно не было $=$ ни нулю, ни безконечности; полученное ур. будетъ тождественно съ даннымъ. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить на M — все равно что помножить на $\frac{1}{M}$; но если M не есть 0 или ∞, то $\frac{1}{M}$ не есть ни ∞, ни 0; а такой множитель, по доказанному, приводитъ къ тождественному съ даннымъ уравненію.

274. Приложеніе. На этомъ началѣ основано уничтоженіе дробей въ уравненіи, когда знаменатели этихъ дробей не содержатъ неизвѣстныхъ. Пусть, напр., требуется освободить отъ дробей уравненіе

$$\frac{7x}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{5x}{12}\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Для этого нужно помножить обѣ части ур—нія, или, что тоже, всѣ члены ур—нія на наименьшее кратное знаменателей, и затѣмъ въ каждомъ членѣ сократить общихъ множителей числителя и знаменателя; такъ-какъ каждый знаменатель входитъ множителемъ въ составъ наименьшаго кратнаго, то очевидно,

что указаннымъ сокращеніемъ всѣ дробные члены будутъ приведены къ цѣлому виду.

Наименьшее краткое знаменателей ур—нія (1) есть $2^3 \times 3 = 24$; умножаемъ всѣ члены на 24; имѣемъ

$$\frac{7x \times 24}{8} - \frac{3 \times 24}{4} = \frac{24}{6} + \frac{5x \times 24}{12},$$

или, сокращая первую дробь на 8, вторую на 4, третью на 6 и четвертую на 12, находимъ

$$7x \times 3 - 3 \times 6 = 4 + 5x \times 2,$$

или, наконецъ

$$21x - 18 = 4 + 10x \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Это ур. (2) тождественно съ (1), ибо множитель въ данномъ случаѣ не содержалъ неизвѣстнаго, поэтому онъ не могъ измѣнять своей величины, а слѣдовательно и не могъ обратиться ни въ 0, ни въ ∞: это была конечная величина 24.

Возьмемъ еще примѣръ: освободить отъ дробей уравненіе

$$\frac{x+a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{x}{a-b} - \frac{x}{a+b}.$$

Наименьшее кратное знаменателей $= ab(a-b)(a+b)$; умноживъ на него всѣ члены уравненія, получимъ:

$$\frac{(x+a)ab(a-b)(a+b)}{b} + \frac{(x-b)\,ab(a-b)(a+b)}{a} = \frac{xab(a-b)(a+b)}{a-b}$$
$$- \frac{xab(a-b)(a+b)}{a+b}.$$

Сокративъ дроби, по-порядку, на b, a, $a-b$ и $a+b$, получимъ:

$$(x+a)a(a^2-b^2) + (x-b)b(a^2-b^2) = x.ab(a+b) - xab(a-b).$$

Такъ какъ множитель въ данномъ случаѣ $= ab(a^2-b^2)$, т. е. количеству, не зависящему отъ неизвѣстнаго, то послѣднее ур. тождественно съ даннымъ.

275. Примѣчаніе относительно множителя, содержащаго неизвѣстное.

При доказательствѣ предыдущей теоремы мы сдѣлали ограниченіе относительно величины множителя M, разумѣя подъ M количество опредѣленное, не содержащее неизвѣстнаго и не обращающееся ни въ 0, ни въ ∞. При этомъ ограниченіи умноженное ур. всегда тождественно съ даннымъ. Но если множитель M есть выраженіе, содержащееене извѣстное, то при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ послѣдняго, оно можетъ обращаться или въ 0, или въ ∞; напримѣръ если $M = x + 2$, то при $x = -2$, M дѣлается нулемъ; если $M = \frac{1}{x-1}$, то при $x = 1$, M обращается въ ∞. Въ такомъ случаѣ разсужденія, служившія намъ при доказательствѣ теоремы, становится уже неприложимыми, и мы не вправѣ заключить, что умноженное ур. будетъ непремѣнно тождественно съ даннымъ. Вопросъ этотъ требуетъ поэтому особаго изслѣдованія. Послѣднее, для большей ясности изложенія, мы подраздѣлимъ на три случая.

1-й случай. Выраженіе $A - B$ и множитель M — цѣлые относительно неизвѣстнаго.

Доказать, что ур-нія

$$A - B = 0 \; . \; . \; . \; . \; (1) \quad \text{и} \quad M(A - B) = 0 \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

не тождественны между собою.

Здѣсь прежде всего необходимо замѣтить, что ур. $P = 0$, гдѣ P цѣлый относительно x многочленъ съ конечными коэффиціентами, не можетъ имѣть безконечнаго корня, ибо цѣлый отн. x многочленъ съ конечными коэф-ми обращается при $x = \infty$ въ ∞, а не въ 0, какъ требуетъ ур. $P = 0$. Сл, ур. (1) имѣетъ конечные корни, и, въ частности, равные нулю.

Переходимъ къ доказательству теоремы.

Всякій корень ур-нія (1), обращая $A - B$ въ ноль, дѣлаетъ нулемъ множителя $A - B$ въ ур-ніи (2); выраженіе же M, какъ цѣлое относительно x. при корняхъ ур-нія (1), какъ конечныхъ количествахъ, не можетъ обратиться въ ∞, а будетъ конечнымъ количествомъ; поэтому произведеніе $M(A - B)$ обратится въ ноль, а ур. (2) въ тождество $0 = 0$.

Итакъ, всякій корень ур-нія (1) удовлетворяетъ и уравненію (2).

Но корни уравненія (2) не необходимо удовлетворяютъ и первому уравненію. Въ самомъ дѣлѣ, кромѣ значеній x-са, обращающихъ $A - B$ въ ноль, ур (2) удовлетворяется еще такими значеніями x, при которыхъ M обращается въ 0, ибо эти значенія, какъ неравныя ∞, не могутъ обратить $A - B$ въ ∞. Но значеніе x-са, обращающія въ ноль выраженіе M, вообще не обратятъ въ 0 количество $A - B$. Итакъ этотъ второй родъ корней ур-нія (2) вообше *не удовлетворяетъ первому ур-нію*, такъ что второе ур-ніе имѣетъ, вообще говоря, большее число корней чѣмъ первое, а потому оно и не тождественно первому.

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ: умноженіе ур-нія на множитель, содержащій неизвѣстное, вообще, приводитъ къ ур-нію, имѣющему лишніе корни сравнительно съ даннымъ; при чемъ эти *лишніе корни суть тѣ значенія неизвѣстнаго, при которыхъ множитель* M *обращается въ ноль.*

Примѣръ. Пусть дано ур-ніе

$$2x - 4 = 3x - 6,$$

корень котораго есть $x = 2$. Умноживъ обѣ части на $x - 1$, найдемъ новое уравненіе

$$(2x - 4)(x - 1) = (3x - 6)(x - 1).$$

Значеніе $x = 2$, удовлетворяющее первому, удовлетворяетъ и второму ур-нію, ибо обращаетъ обѣ его части въ 0. Но второе ур. имѣетъ еще корень $x = 1$, не удовлетворяющій первому. Слѣд. второе ур. не тождественно съ первымъ.

2-й случай. $A - B$ выраженіе цѣлое относительно неизвѣстнаго, M — дробное. Въ этомъ случаѣ ур-нія

$$A - B = 0 \; . \; . \; . \; (1) \quad \text{и} \quad M(A - B) = 0 \; . \; . \; . \; (2)$$

могутъ также не быть тождественными.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x = \alpha$ будетъ одинъ изъ корней ур-нія (1). Обращая, при подстановкѣ во (2), множителя $A - B$ въ ноль, корень этотъ мо-

жетъ обратить M въ ∞; тогда первая часть ур-нія (2) приметъ видъ $\infty \times 0$ что можетъ и не быть нулемъ. Такимъ образомъ второе ур. можетъ не имѣть нѣкоторыхъ корней перваго, т. е. ур-нія могутъ и не быть тождественными.

Примѣръ 1-й. Пусть данное ур. есть

$$(x-1)(x+2)=0 \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Корни его, какъ легко видѣть, суть: $x'=1$ и $x''=-2$.

Помноживъ ур-ніе на $\frac{1}{x-1}$, получимъ

$$\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)(x+2)=0 \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Подставивъ въ это ур. 1 вмѣсто x, замѣчаемъ, что оно принимаетъ видъ

$$\infty \times 0 = 0.$$

Если теперь истинная величина неопредѣленности $\infty \times 0$, при $x=1$, будетъ 0, то $x=1$ будетъ служить корнемъ ур-нія (2); въ противоположномъ случаѣ ур. (2) не имѣетъ корня равнаго 1.

Для опредѣленія истинной величины неопредѣленности, даемъ выраженію видъ: $\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$, сокращаемъ дробь на $x-1$; и затѣмъ въ полученномъ выраженіи $x+2$ полагаемъ $x=1$; въ результатѣ получаемъ 3. Значитъ ур. (2), при $x=1$, беретъ видъ

$$3=0,$$

а потому $x=1$ не есть его корень.

Но $x=-2$ служитъ корнемъ и 2-го ур-нія. Итакъ, вслѣдствіе умноженія на M дробное, ур. потеряло одинъ изъ корней.

Примѣръ 2-й. Пусть данное ур. будетъ

$$x^2+12=7x,$$

имѣющее корни $x'=3$ и $x''=4$.

Умноживъ обѣ части на $\frac{1}{x-3}$, находимъ

$$\frac{x^2+12}{x-3}=\frac{7x}{x-3}, \text{ или } \frac{x^2-7x+12}{x-3}=0, \text{ или } \frac{1}{x-3}\times(x-3)(x-4)=0$$

Это ур. удовлетворяется при $x=4$. Но подставивъ $x=3$, находимъ $\infty \times \times 0=0$: и какъ истинная величина неопредѣленности $\infty \times 0$, при $x=3$, есть -1, то ур. второе не имѣетъ корня $=3$. Здѣсь опять отъ умноженія на $\frac{1}{x-3}$ ур. потеряло корень $x=3$.

3-й случай. A — B — выраженіе дробное относительно неизвѣстнаго, M — цѣлое.

Мы видѣли, что когда A — B и M были выраженія цѣлыя относительно x, то ур. $M(A-B)=0$ имѣло больше корней чѣмъ ур. $A-B=0$, и эти лишніе корни были тѣ значенія неизвѣстнаго, при которыхъ M обращалось въ нуль. Но если при цѣломъ M, A — B будетъ дробное, то значенія x, обращаю-

щія въ ноль выраженіе M, могутъ обратить $A-B$ въ безконечность, а потому произведеніе $M(A-B)$ не будетъ необходимо равно 0, а это означаетъ, что умноженіе на M, въ данномъ случаѣ, можетъ и не ввести постороннихъ рѣшеній, т. е. умноженное ур. можетъ быть тождественно съ даннымъ.

276. Случай дробнаго ур—нія и цѣлаго множителя особенно важенъ, ибо онъ встрѣчается при освобожденіи ур—нія отъ дробей; поэтому мы должны разсмотрѣть съ особеннымъ вниманіемъ всѣ представляемыя имъ обстоятельства.

Приэтомъ, для большаго удобства, предположимъ, что всѣ члены перенесены въ первую часть, приведены къ общему знаменателю и соединены въ одну дробь $\frac{P}{Q}$, гдѣ P и Q — цѣлые относительно x полиномы. Ур. приметъ видъ.

$$\frac{P}{Q}=0;$$

оно всегда м. б. приведено къ этому виду.

Рѣшить это уравненіе — значитъ найти для неизвѣстнаго такія величины, при которыхъ дробь $\frac{P}{Q}$ обратилась бы въ ноль: но дробь можетъ обратиться въ ноль только при слѣдующихъ обстоятоятельствахъ.

1°. Если числитель обращается въ ноль, а знаменатель при этомъ остается отличнымъ отъ нуля.

2°. Если знаменатель обращается въ безконечность, а числитель не дѣлается безконечностью.

3°. Если числитель и знаменатель обращаются: оба въ ноль, или же оба въ ∞, но истинная величина полученныхъ неопредѣленныхъ формъ равна 0.

Разберемъ эти обстоятельства.

1°. Во первыхъ, числитель обращается въ ноль при значеніяхъ x, равныхъ корнямъ ур—нія $P=0$. Поэтому, приравнявъ числителя нулю, опредѣляемъ всѣ корни уравненія $P=0$. Затѣмъ, каждый изъ найденныхъ корней подставляемъ въ знаменателя Q: всѣ корни ур—нія $P=0$, не обращающія знаменателя Q въ ноль, обращаютъ въ ноль дробь $\frac{P}{Q}$, поэтому удовлетворяютъ данному уравненію $\frac{P}{Q}=0$; если-же при какомъ либо корнѣ $x=\alpha$ ур—нія $P=0$ и знаменатель Q обратится въ 0, такъ что дробь $\frac{P}{Q}$ приметъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, нужно будетъ найти истинное значеніе этой неопредѣлености; если это истинное значеніе будетъ ноль, то $x=\alpha$ удовлетворяетъ данному ур—нію; если же истинная величина неопредѣленности, при $x=\alpha$, будетъ отлична отъ нуля, корень α слѣдуетъ отбросить.

2°. Во вторыхъ, такъ какъ знаменатель Q есть полиномъ цѣлый по буквѣ x, то онъ можетъ обратиться въ ∞ только при $x=\infty$; но при этомъ и числитель, какъ цѣлый полиномъ относительно x, также обратится въ ∞, дробь-же $\frac{P}{Q}$ приметъ видъ $\frac{\infty}{\infty}$; истинная величина этой неопредѣленной формы будетъ

нулемъ только тогда, когда степень знаменателя выше степени числителя. Въ этомъ, и только въ этомъ случаѣ, ур. $\frac{P}{Q}=0$ будетъ имѣть безконечный корень.

Это изслѣдованіе приводитъ къ слѣдующему заключенію: для рѣшенія ур-нія, содержащаго неизвѣстное въ знаменателяхъ дробей, собираемъ всѣ члены въ первую часть, приводимъ ихъ къ общему знаменателю и соединяемъ въ одну дробь; приравнявъ числителя этой дроби нулю, рѣшаемъ уравненіе $P=0$. Если окажется, что ни одинъ изъ корней этого ур. не обращаетъ знаменателя Q въ ноль, то заключаемъ что ур. $P=0$ тождественно данному, если оставить въ сторонѣ безконечные корни.

Если же окажется, что какой-либо изъ корней ур-нія $P=0$ обращаетъ и знаменателя Q въ ноль, то истинная величина дроби $\frac{P}{Q}$ при этомъ частномъ значеніи x покажетъ, слѣдуетъ-ли его удержать или отбросить.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ въ поясненіе этого правила.

Примѣръ I. — Рѣшить уравненіе

$$\frac{(x-1)^2(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+2)^3(x+3)^2}=0 \quad \ldots . (1)$$

Приравнивая числителя нулю, рѣшаемъ уравненіе:

$$(x-1)^2(x+2)(x-3)=0 \quad \ldots . (2)$$

Чтб. произведеніе равнялось нулю, нужно чтобы одинъ изъ множителей равнялся 0, а ни одинъ изъ остальныхъ не обращался при этомъ въ ∞. Первый множитель $(x-1)^2$ обращается въ ноль при $x=1$, а остальные два остаются при этомъ конечными; второй обращается въ ноль при $x=-2$, а третій при $x=3$, причемъ въ каждомъ случаѣ остальные два конечны. Слѣд. ур. (2) имѣетъ три корня:

$$x'=1; \quad x''=-2; \quad x'''=3.$$

Подставляемъ каждый изъ нихъ, поочередно, въ знаменателя. При $x=1$ знаменатель обращается въ 0, а вся первая часть въ $\frac{0}{0}$; но сокративъ дробь на $x-1$, и положивъ затѣмъ $x=1$, находимъ, что истинная величина первой части ур-нія (1) есть 0. Заключаемъ, что $x'=1$ есть одинъ изъ корней ур-нія (1).

При $x=-2$, знаменатель снова обращается въ 0, а первая часть ур-нія (1) въ $\frac{0}{0}$; но истинная величина этой неопредѣленности, при $x=-2$, есть ∞, слѣд. корень $x''=-2$ не удовлетворяетъ данному ур-нію.

Наконецъ, корень $x'''=3$ обращая числителя въ 0, знаменателя — дѣлаетъ конечнымъ, а потому удовлетворяетъ ур-нію (1).

Замѣчая, наконецъ, что степень знаменателя ур. (1) выше степени числителя (числитель 4-й степени относительно x, а знаменатель 6-й), заключаемъ, что данное ур. имѣетъ еще безконечный корень.

Итакъ, данное ур. имѣетъ три корня:

$$1, \ 3 \ \text{и} \ \infty.$$

Примѣръ II. — Рѣшить уравненіе

$$1+\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}-6.$$

Собравъ всѣ члены въ 1-ую часть и соединивъ ихъ въ одну дробь, найдемъ уравненіе

$$\frac{x^2-7x+6}{1-x}=0;$$

или разложивъ числитель на множители и умноживъ обѣ части на -1, получимъ

$$\frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)}=0.$$

Приравнивая числитель нулю, находимъ уравненіе $(x-1)(x-6)=0$, которое имѣетъ, какъ легко видѣть, два корня: $x'=1$ и $x''=6$. Изъ нихъ второй, какъ обращающій знаменателя въ конечную величину 5, удовлетворятъ и данному уравненію. Первый же, т. е. 1, обращаетъ дробь $\frac{(x-1)(x-6)}{x-1}$ въ $\frac{0}{0}$; истинная величина этой неопредѣленности, при $x=1$, есть не 0, а -5, сл. корень $x=1$ не удовлетворяетъ предложенному уравненію.

Наконецъ, данное ур. не имѣетъ безконечнаго корня, ибо степень числителя дроби $\frac{x^2-7x+6}{x-1}$ выше степени ея знаменателя.

Итакъ, данное ур. имѣетъ одинъ корень: $x=6$.

Рѣшеніе уравненія I-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

277. Доказанныхъ началъ совершенно достаточно для рѣшенія уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Механизмъ рѣшенія укажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Примѣръ I. — Рѣшить уравненіе

$$\frac{7}{6}-\frac{x}{4}=4-\frac{5x}{3}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (1).$$

Освобождаемъ уравненіе отъ дробей, умножая обѣ части его на общаго знаменателя 12; получимъ

$$\frac{7\times12}{6}-\frac{x\times12}{4}=4\times12-\frac{5x\times12}{3},$$

или, по сокращеніи,

$$14-3x=48-20x\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Перенеся, затѣмъ, неизвѣстные члены въ первую часть, а извѣстные во вторую, найдемъ ур.

$$20x-3x=48-14;$$

сдѣлавши приведеніе въ той и другой части,

$$17x=34;\ .\ .\ .\ .\ .\ .(3).$$

наконецъ, раздѣливши обѣ части на коэффиціентъ 17 при неизвѣстномъ, имѣемъ:

$$x=\frac{34}{17} \quad \text{или} \quad x=2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Уравненія (1), (2), (3) и (4) всѣ тождественны между собою; въ самомъ дѣлѣ, каждое изъ нихъ мы выводимъ изъ предыдущаго или умноженіемъ, или дѣленіемъ обѣихъ частей на одно и то-же число, или перенесеніемъ членовъ изъ одной части въ другую; а всѣ эти преобразованія не измѣняютъ корней ур-нія. Но ур-ніе (4), очевидно, можетъ быть удовлетворено лишь величиною x равною 2; слѣд. 2 служитъ и корнемъ уравненія (1), тождественнаго съ (4).

Изъ предыдущаго выводимъ слѣдующее

Общее правило. — Для рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ нужно:

1. *Освободить ур-ніе отъ дробей, если таковыя имѣются*;

2. *Перенести всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, въ одну часть, а всѣ извѣстные члены въ другую*;

3. *Сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, т. е. всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, соединить въ одинъ членъ, а также и члены извѣстные*;

4. *Раздѣлить обѣ части полученнаго так. обр. уравненія на коэффиціентъ при неизвѣстномъ; частное и будетъ корнемъ предложеннаго уравненія.*

Примѣръ II. — Рѣшить уравненіе

$$\frac{x+1}{2}+\frac{1}{3}(x+2)=16-\frac{1}{4}(x+3).$$

Умноживъ обѣ части на 12 — общаго знаменателя дробей, получимъ

$$6(x+1)+4(x+2)=192-3(x+3);$$

раскрывъ скобки, найдемъ

$$6x+6+4x+8=192-3x-9;$$

сдѣлавъ приведеніе въ каждой части уравненія, получимъ болѣе простое ур-ніе

$$10x+14=183-3x;$$

по перенесеніи членовъ, имѣемъ

$$10x+3x=183-14,$$

по приведеніи:

$$13x=169.$$

Отсюда, раздѣливъ обѣ части на 13, имѣемъ

$$x=13.$$

Повѣрка. Подставивъ вмѣсто x въ данное ур. 13, получимъ

$$\frac{13+1}{2}+\frac{1}{3}(13+2)=16-\frac{1}{4}(13+3), \quad \text{или} \quad 7+5=16-4, \quad \text{или} \quad 12=12.$$

Слѣд. найденное рѣшеніе въ самомъ дѣлѣ удовлетворяетъ данному уравненію.

Примѣръ III. — Рѣшить уравненіе

$$5x-9-\frac{4x}{3}=7x-19.$$

Освободивъ отъ дробей, получимъ

$$15x - 27 - 4x = 21x - 57;$$

по перенесеніи членовъ имѣемъ:

$$15x - 4x - 21x = 27 - 57;$$

по приведеніи:

$$-10x = -30.$$

Умноживъ обѣ части на -1, найдемъ

$$10x = 30;$$

откуда

$$x = 3.$$

Повѣрка не представляетъ никакого затрудненія.

Примѣръ IV. — Рѣшить уравненіе

$$\frac{6x+7}{15} - \frac{2x-2}{7x-6} = \frac{2x+1}{5} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Умножаемъ обѣ части на $15(7x-6)$ и рѣшаемъ полученное уравненіе; если найденный корень не обращаетъ въ нуль знаменателя, то онъ удовлетворяетъ данному уравненію. Но знаменатель $15(7x-6)$ обращается въ нуль при $x = \frac{6}{7}$; сл. если корень освобожденнаго отъ дробей уравненія будетъ отличенъ отъ $\frac{6}{7}$, онъ удовлетворяетъ предложенному ур-нію.

Освобожденное отъ дробей ур-ніе есть

$$(6x+7)(7x-6) - (2x-2)15 = 3(2x+1)(7x-6)$$

или, собирая всѣ члены въ первую часть и въ двухъ изъ нихъ выводя за скобки $7x-6$, находимъ

$$(7x-6).4 - 30(x-1) = 0, \quad \text{или}$$

$$28x - 24 - 30x + 30 = 0, \quad \text{или}$$

$$-2x = -6, \quad \text{откуда}$$

$$x = 3.$$

Итакъ, данному уравненію удовлетворяетъ значеніе x, равное 3, въ чемъ не трудно убѣдиться повѣркою.

Примѣръ V. — Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{x}{x^2+5x+6} = 4 - \frac{9+4x}{x+3} \cdot \quad (1).$$

Для нахожденія общаго знаменателя, разлагаемъ на множителей знаменатели первой части уравненія; находимъ:

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2);$$

$$x^2+4x+3 = (x+1)(x+3);$$

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3);$$

общій знаменатель $= (x+1)(x+2)(x+3)$.

Умноживъ обѣ части на общаго знаменателя и сдѣлавъ надлежащія сокращенія въ дробныхъ членахъ, имѣемъ:

$x+3+2x(x+2)+x^2+x=4(x+1)(x+2)(x+3)-(9+4x)(x+1)(x+2),$

или

$$3x^2+6x+3=4x^3+24x^2+44x+24-4x^3-21x^2-35x-18,$$

или, по приведеніи во второй части и по отнятіи отъ обѣихъ частей по $3x^2$, имѣемъ:

$$6x+3=9x+6 \;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Это уравненіе не необходимо тождественно данному, такъ какъ оно получено умноженіемъ даннаго на выраженіе $(x+1)(x+2)(x+3)$, содержащее неизвѣстное. Но если корень (2) не обращаетъ въ нуль общаго знаменателя, то онъ удовлетворяетъ и ур-нію (1); общій же знаменатель обращается въ 0 при значеніяхъ x, равныхъ $-1, -2$ и -3; поэтому, если корень ур-нія (2) не равенъ ни одному изъ этихъ чиселъ, то онъ необходимо уд-тъ данному ур-нію, если же равенъ одному изъ этихъ чиселъ, то необходимо дальнѣйшее изслѣдованіе.

Рѣшая ур. (2) имѣемъ:

$$6x-9x=6-3$$

или $$-3x=3,$$

откуда $$x=-1.$$

Перенеся всѣ члены даннаго ур-нія въ первую часть и соединивъ ихъ въ одну дробь, имѣемъ

$$\frac{-3x-3}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0 \quad \text{или} \quad \frac{-3(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}=0.$$

Первая часть, при $x=-1$, обращается въ $\frac{0}{0}$; но, сокративъ на $x+1$, и положивъ затѣмъ $x=-1$, найдемъ

$$\frac{-3}{2}, \text{ что не} =0,$$

слѣд. -1 не есть корень даннаго ур-нія. Но какъ степень знаменателя дроби $\frac{-3(x+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ выше степени числителя, то данное ур. имѣетъ корень $=\infty$.

Примѣръ VI. — Рѣшить уравненіе

$$\frac{2x+7b}{2a+b}=1+\frac{x+a}{2a-b}.$$

Умноживъ обѣ части на общаго знаменателя $(2a+b)(2a-b)$, найдемъ

$$(2x+7b)(2a-b)=(2a+b)(2a-b)+(x+a)(2a+b),$$

или, выполнивъ указанныя дѣйствія,

$$4ax+14ab-2bx-7b^2=4a^2-b^2+2ax+2a^2+bx+ab,$$

а по перенесеніи членовъ,

$$4ax-2bx-2ax-bx=4a^2-b^2+2a^2+ab-14ab+7b^2, \quad \text{или}$$

$$(2a-3b)x=6a^2-13ab+6b^2, \quad \text{откуда}$$

$$x=\frac{6a^2-13ab+6b^2}{2a-3b}.$$

Совершивъ дѣленіе, найдемъ окончательно

$$x = 3a - 2b.$$

Если значенія, данныя буквамъ a и b, обращаютъ одного изъ знаменателей въ ноль, тогда мы уже не имѣли бы права умножать ур. на произведеніе $(2a+b)(2a-b)$, какъ равное 0; но въ этомъ случаѣ самое ур., содержа дробь съ знаменателемъ равнымъ 0, не имѣло бы никакого смысла.

Примѣръ VII. — Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{x-6a}+\frac{2}{x+3a}+\frac{3}{x-2a}-\frac{6}{x-a}=0\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Приводя къ общему знаменателю, имѣемъ:

$$\frac{(x+3a)(x-2a)(x-a)+2(x-6a)(x-2a)(x-a)+3(x-6a)(x+3a)(x-a)-6(x-6a)(x+3a)(x-2a)}{(x-6a)(x+3a)(x-2a)(x-a)}=0.$$

Числитель м. б. упрощенъ; вынося въ первыхъ двухъ членахъ общій множитель $(x-2a)(x-a)$, а въ двухъ послѣднихъ $3(x-6a)(x+3a)$, найдемъ

$$(x-2a)(x-a)[x+3a+2x-12a]+3(x-6a)(x+3a)[x-a-2x+4a]=$$
$$(x-2a)(x-a)(3x-9a)+3(x-6a)(x+3a)(-x+3a)=$$
$$3(x-2a)(x-a)(x-3a)-3(x-6a)(x+3a)(x-3a)=$$
$$3(x-3a)[(x-2a)(x-a)-(x-6a)(x+3a)]=3(x-3a)\times 20a^2.$$

Уравненіе принимаетъ, поэтому, видъ

$$\frac{60a^2(x-3a)}{(x-6a)(x+3a)(x-2a)(x-a)}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

Числитель обращается въ 0 только при $x=3a$; и какъ это значеніе x не обращаетъ въ ноль знаменателя, то оно уд—тъ и ур—нію (1). Кромѣ того данное ур. имѣетъ еще безконечный корень, ибо степень знаменателя выше степени числителя. Итакъ ур. имѣетъ два корня

$$x'=3a,\quad \text{и}\quad x''=\infty.$$

Повѣрка. Подставляя $3a$ вмѣсто x въ данное ур., находимъ

$$-\frac{1}{3a}+\frac{2}{6a}+\frac{3}{a}-\frac{6}{2a}=0,\quad \text{или}$$

$$-\frac{1}{3a}+\frac{1}{3a}+\frac{3}{a}-\frac{3}{a}=0,$$

что вѣрно.

Подставивъ ∞ вмѣсто x, замѣчаемъ, что каждый членъ первой части обращается въ 0, сл. ур. также обращается въ тождество $0=0$.

278. Задачи.

1. $5-3(4-x)+4(3-2x)=0.$
2. $3(x-3)-2(x-2)+(x-1)=x+3+2(x+2)+3(x+1).$
3. $\frac{5x-1}{7}+\frac{9x-5}{11}=\frac{9x-7}{5}.$
4. $\frac{7x-8}{11}+\frac{15x+8}{13}=3x-\left(1+\frac{1}{9}\right).$

5. $\frac{7x+5}{3}-\frac{16+4x}{5}+6=\frac{3x+9}{2}.$

6. $\frac{x-3}{8}+\frac{x+9}{12}=\frac{3x+7}{20}+3.$

7. $\frac{5}{6}x-\frac{24-8x}{3}=4{,}5+\frac{3x+1}{2}.$

8. $\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}-\frac{4x}{5}=\frac{5x}{6}-\frac{6x}{7}-81.$

9. $\frac{1}{27}(2x+7)-\frac{1}{15}(2x-7)=\frac{11}{6}-\frac{3x+4}{20}.$

10. $\frac{4x-21}{7}+\frac{7}{3}(x-4)+\frac{47}{6}=x+\frac{23}{6}-\frac{9-7x}{8}.$

11. $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x-1\right)-1\right)-1\right]-1\right\}-1=0.$

12. $4x+\frac{1}{2}(x-2)-2\left[2x-\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{18}\left\{16-\frac{1}{2}(x+4)\right\}\right)\right]=\frac{2}{3}(x+2).$

13. $\frac{25-\frac{1}{3}x}{x+1}+\frac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2}=5+\frac{23}{x+1}.$

14. $(63x-2):\frac{374-77x}{676-143x}=117x-28.$

15. $\frac{1-2x}{3-4x}-\frac{5-6x}{7-8x}=\frac{8}{3}\cdot\frac{1-3x^2}{21-52x+32x^2}.$

16. $\frac{x-9}{x-5}-\frac{x-7}{x-2}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x-8}{x-5}-\frac{x-7}{x-4}-\frac{x-8}{x-2}.$

17. $\frac{4}{x+3}-\frac{1}{x+5}=\frac{4}{x+2}-\frac{1}{x+1}.$

18. $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+2}=\frac{4}{7(x-3)}-\frac{11}{7(x+4)}.$

19. $\frac{0{,}125(0{,}1x+0{,}5)}{0{,}05(7x-30)}=0{,}5.$

20. $\frac{2(x+1{,}5)}{5(0{,}8x-1)}=\frac{15}{19}.$

21. $\frac{x-\frac{2(x-18)}{9}}{8}-\frac{x-18}{6}=x+9-\frac{5x-\frac{2(x+10)}{23}}{4}.$

22. $\frac{x-1\frac{25}{26}}{2}-\frac{2(1-3x)}{13}=x-\frac{5x-\frac{10-3x}{4}}{39}.$

23. $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2+x+1}{x+1}=2x.$

24. $\frac{6}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}+\frac{x^2}{x^2-4}=0.$

25. $\frac{9x+5}{6(x-1)}+\frac{3x^2-51x-71}{18(x^2-1)}=\frac{15x-7}{9(x+1)}.$

26. $\frac{4x+3}{15x-35}-\frac{11x-5}{9x+21}=\frac{375x-86x^2-35}{10(9x^2-49)}.$

27. $[12(13580-x)-9]^2+[5(13580-x)-1]^2=[13(13580-x)-8]^2.$

Положить $13580-x=y.$

28. $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$

29. $\left\{\frac{24-5x}{x+1}+\frac{5-6x}{x+4}\right\}\cdot 31+370=29\left\{\frac{17-7x}{x+2}+\frac{8x+55}{x+3}\right\}.$

30. $\frac{x}{a}+\frac{a(x-b)}{b}=\frac{x}{b}+\frac{b(x-a)}{a}.$

31. $\frac{x}{a+b}+\frac{a}{a-b}=\frac{x}{a-b}+\frac{b}{a+b}.$

32. $\frac{x(a-b)}{(a+b)^2}+\frac{ab}{(a-b)^2}=\frac{x(a+b)}{(a-b)^2}+\frac{ab}{(a+b)^2}.$

33. $\frac{x(a-b)+a^2+b^2}{a}+\frac{ax+b^2}{b}=\frac{bx+a^2}{a}-\frac{x(a+b)-2ab}{b}.$

34. $\frac{(x+a)(x+b)}{a}-\frac{(x-a)(x-b)}{b}=\frac{(x-a)(x+b)}{a}-\frac{(x+a)(x-b)}{b}.$

35. $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{a^2+b^2}{x^2+(a+b)x+ab}.$

36. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{c}+\frac{x-c}{a}=\frac{x-(a+b+c)}{abc}.$

37. $\frac{x^2+ax-b^2}{x-b}-\frac{x^2-(a-b)x-ab}{x+b}=a.$

38. $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x-a}+\frac{x^2-(a-b)x-ab}{x+b}=x+a+\frac{a-b}{a}(x-b).$

39. $\frac{ax}{a+b}+2ab-a^2=\frac{bx}{a-b}-b^2.$

40. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=1.$

41. $\frac{1}{ab-ax}+\frac{1}{bc-bx}=\frac{1}{ac-ax}.$

42. $\frac{a+b}{x-c}=\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}.$

43. $\frac{(a-b)x}{a+b}+5a-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(3a-b)(x-b)a}{a^2-b^2}-2x.$

44. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}.$

45. $\frac{x}{2a^2-3ab+b^2}+\frac{1}{9a^2-b^2}=\frac{2bx}{(a^2-b^2)(2a-b)}+\frac{4a}{9a^3+9a^2b-ab^2-b^3}.$

46. $\frac{3x}{a^3-a^2-2a}-\frac{x-a}{a^3-a}=\frac{5x+a}{a^3-2a^2-a+2}.$

47. $\frac{x-a}{a^2+4ab+3b^2}-\frac{x+b}{a^2-ab-6b^2}=\frac{x}{a^2-9b^2}-\frac{x+a-b}{a^2+4ab+3b^2}.$

48. $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}-1}=\dfrac{3}{14-x}$.

49. $5+\dfrac{2}{3-\dfrac{1}{4-x}}=\dfrac{29}{5}$.

50. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+2}{x-2}}}=\dfrac{12}{12x-17}$.

51. $\dfrac{\dfrac{x+b}{x-b}}{1-\dfrac{x-2b}{x-b}}=\dfrac{3x-5b-8}{b}$.

52. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{4(2x-3)-3(3x-1)}{6(x-1)}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2+2}{3x-2}\right)$.

Рѣшеніе слѣдующихъ уравненій привести къ ур-мъ I-й степени:

53. $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{7}{x+3}=\dfrac{37}{x^2+5x+6}$.

54. $\dfrac{3+2x}{1+2x}-\dfrac{5+2x}{7+3x}=1-\dfrac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$.

55. $46{,}1-\dfrac{28}{5x}+\dfrac{45x}{2(5x-1)}=\dfrac{483}{50}\times\dfrac{6x-2}{x}$.

56. $\dfrac{(x-a)^3}{(x+b)^3}=\dfrac{x-2a-b}{x+a+2b}$.

Сказать, не рѣшая ур-ній, корни слѣдующихъ ур-ній:

57. $[x-(a+b)](c+d)=0$.

58. $(7x-42).13=(7x-42).15$.

59. $(a-b)\left[\dfrac{x}{m-n}-\dfrac{1}{p-q}\right]=(c-b)\left[\dfrac{x}{m-n}-\dfrac{1}{p-q}\right]$.

60. $(3x-12)(5x-25)(7x-42)=0$.

61. $(x-a-b)(x-a+b)(x+a+b)=0$.

62. Какія значенія нужно дать количеству α, чтобы нижеслѣдующія ур-нія были удовлетворены:

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{mx+n}{2\alpha}=\frac{x}{n} \text{ значеніемъ } x=1,$$

а ур.

$$\frac{x+\alpha}{a}+\frac{x-\alpha}{b}=\frac{x}{a+b} \text{ значеніемъ } x=2b.$$

Задачи, приводящія къ уравненіямъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

279. Рѣшеніе алгебраической задачи состоитъ изъ четырехъ частей:

1) *составленія уравненій* или *неравенствъ* изъ условій, связывающихъ данныя величины съ неизвѣстными;

2) *рѣшенія* полученныхъ *уравненій* или *неравенствъ*;

3) *изслѣдованія задачи*, т. е. разсмотрѣнія представляемыхъ ею особенностей и опредѣленія условій, которымъ должны удовлетворять данныя, для того чтобы задача была возможна (въ случаѣ, когда данныя величины изображены буквами). Слѣдуетъ замѣтить, что не всякая задача представляетъ матеріалъ для изслѣдованія.

4) *повѣрки* найденныхъ *рѣшеній*, служащей удостовѣреніемъ въ правильности рѣшенія задачи.

Въ этой главѣ мы займемся рѣшеніемъ только такихъ задачъ, которыя приводятъ къ уравненіямъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; а изслѣдованіемъ рѣшеній займемся въ отдѣльной главѣ, не касаясь пока этого вопроса.

Что касается составленія уравненій изъ условій задачи, то на этотъ счетъ нѣтъ никакихъ общихъ правилъ; все, что можно сказать по этому предмету, сводится къ слѣдующему: назвавъ неизвѣстное (мы ограничиваемся здѣсь случаемъ одного неизвѣстнаго) буквою x, обозначаютъ при помощи этой буквы и данныхъ задачи всѣ дѣйствія, какія должно бы было произвести надъ ними для повѣрки рѣшенія, предполагая, что неизвѣстное найдено; такимъ образомъ получатся выраженія, которыя, по условію задачи, должны быть равны: соединяя ихъ знакомъ равенства, и получимъ искомое уравненіе.

Укажемъ примѣненіе этого правила на нѣсколькихъ вопросахъ.

280. Первая задача. *Часовая и минутная стрѣлки находятся вмѣстѣ, показывая полдень. Въ которомъ часу пройзойдетъ слѣдующая ихъ встрѣча?*

Составленіе уравненія. Циферблатъ часовъ раздѣленъ на 60 равныхъ частей, каждое изъ которыхъ большая стрѣлка проходитъ въ минуту времени, и пусть отъ полудня до встрѣчи стрѣлокъ малая стрѣлка прошла x такихъ дѣленій. Минутная стрѣлка, чтобы догнать часовую, должна обойти весь циферблатъ, т. е. пройти 60 дѣленій, да еще x дѣленій, пройденныхъ часовою, всего $60+x$ дѣленій, Но въ то время какъ часовая проходитъ 5 дѣленій (отъ XII до I), минутная стрѣлка проходитъ 60 такихъ дѣленій, сл. въ 12 разъ большее число ихъ. Изъ этого слѣдуетъ, что въ одно и тоже время путь пройденный минутною стрѣлкою въ 12 разъ больше пути, пройденнаго часовою, т. е. $60+x$ въ 12 разъ больше x.

Итакъ, имѣемъ уравненіе

$$60+x=12x.$$

Рѣшеніе уравненія. Перенеся x во вторую часть, находимъ

$$60=11x;$$

Откуда

$$x=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}\cdot$$

Слѣд., до встрѣчи стрѣлокъ часовая должна пройти $5\frac{5}{11}$ минутн. дѣленій, т. е. встрѣча произойдетъ въ 1 ч. $5\frac{5}{11}$ мин.

Повѣрка. Пространство, пройденное минутною стрѣлкою, должно быть въ 12 разъ больше разстоянія, сдѣланнаго часовою; и въ самомъ дѣлѣ

$$65\frac{5}{11}:5\frac{5}{11}=\frac{720}{11}:\frac{60}{11}=12.$$

281. Вторая задача. *Въ трехзначномъ числѣ цифра десятковъ вдвое больше цифры сотенъ, цифра же единицъ втрое больше цифры сотенъ; если къ искомому числу придать 396, найдемъ число обращенное, т. е. состав-*

ленное тѣми-же цифрами какъ и искомое, но написанными въ обратномъ порядкѣ. Опредѣлить неизвѣстное число?

Составленіе уравненія. Пусть цифра сотенъ искомаго числа будетъ x; тогда цифра десятковъ выразится черезъ $2x$, а цифра единицъ формулою $3x$.

Все число единицъ въ искомомъ числѣ будетъ

$$100x + 20x + 3x.$$

Число единицъ въ обращенномъ числѣ будетъ

$$300x + 20x + x.$$

Придавъ къ первому 396, найдемъ число обращенное; слѣдов.

$$100x + 20x + 3x + 396 = 300x + 20x + x.$$

Рѣшеніе уравненія. Отнявъ отъ обѣихъ частей по $20x$, собравъ неизвѣстные члены въ одну часть и сдѣлавъ приведеніе, получимъ

$$396 = 198x,$$

откуда

$$x = \frac{396}{198} = 2.$$

Итакъ, число сотенъ искомаго числа равно 2; слѣд. число десятковъ $= 4$, а число единицъ 6. Поэтому искомы число есть 246.

Повѣрка. Придавъ къ найденному числу 396, должны получить обращенное число, т. е. 642; и дѣйствительно

$$246 + 396 = 642.$$

282. Третья задача. *Два капитала составляютъ въ совокупности 167280 руб. Первый, помѣщенный, на 4%, принесъ-бы въ 3 м. прибыль вдвое большую той, какую можетъ принести второй капиталъ, помѣщенный на 5%, въ 7 мѣсяцевъ. Опредѣлить оба капитала?*

Составленіе уравненія. Пусть первый капиталъ $= x$; тогда второй будетъ $= 167280 - x$ руб. Каждая сотня перваго капитала, принося въ 1 годъ 4 руб. прибыли, дастъ въ 1 мѣсяцъ $\frac{4}{12}$, въ 3 мѣсяца $\frac{4 \times 3}{12}$ или 1 руб.; слѣд. каждый рубль перваго капитала принесетъ $\frac{1}{100}$ руб. прибыли, а x рублей — $\frac{x}{100}$.

Такимъ же точно образомъ найдемъ, что капиталъ $167280 - x$ р., при 5%, дастъ въ 7 мѣсяцевъ

$$\frac{(167280 - x) \times 5 \times 7}{100 \times 12} \text{ или } \frac{(167280 - x) \times 35}{100 \times 12} \text{ р. прибыли.}$$

По условію, первая прибыль вдвое больше второй, слѣд.

$$\frac{x}{100} = \frac{(167280 - x) \times 35 \times 2}{100 \times 12}.$$

Рѣшеніе уравненія. Освободивъ это ур. отъ дробей, имѣемъ

$$12x = 167280 \times 70 - 70x\,,$$
$$12x + 70x = 167280 \times 70\,,$$
$$82x = 167280 \times 70\,,$$
$$x = \frac{167280 \times 70}{82} = 142800 \text{ р.}$$

Итакъ: капиталъ, помѣщенный на 4%, $= 142800$ р.; капиталовъ, помѣщенный на 5%, $= 167280 - 142800 = 24480$ р.

Повѣрка. Прибыль, приносимая первымъ капиталомъ, равна $\frac{142800 \times 3 \times 4}{12 \times 100} =$ $= 1428$ р.; вторымъ — $\frac{24480 \times 5 \times 7}{12 \times 100} = 714$. Дѣйствительно, 1428 больше 714 въ 2 раза.

283. Четвертая задача. *Лисица, преслѣдуемая собакою, находится впереди послѣдней на 60 своихъ скачковъ, и дѣлаетъ 9 скачковъ въ то время, въ какое собака дѣлаетъ только 6; но 3 скачка собаки равны 7 скачкамъ лисицы. Сколько скачковъ должна сдѣлать собака, чтобы догнать лисицу?*

Когда въ задачѣ рѣчь идетъ о разстояніяхъ, полезно изображать ихъ линіями; этимъ путемъ мы яснѣе представимъ себѣ зависимость между величинами и скорѣе съумѣемъ составить ур—ніе.

Предложенная задача представляетъ примѣръ этого рода.

Составленіе уравненія. Пусть N (см. черт. 3) означаетъ мѣсто, въ которомъ находится собака; 0 — мѣсто, въ которомъ въ тотъ-же самый моментъ находится лисица; M — точка, въ которой собака настигаетъ лисицу. Пусть, затѣмъ, собака должна сдѣлать x скачковъ, чтобы догнать лисицу, т. е. чтобы пробѣжать разстояніе NM.

Выразимъ черезъ x число скачковъ, которое должна сдѣлать лисица на разстояніи OM. Въ то время какъ собака дѣлаетъ 6 скачковъ, лисица дѣлаетъ ихъ 9, сл. пока собака дѣлаетъ 1 скачекъ, лисица дѣлаетъ $\frac{9}{6}$ или $\frac{3}{2}$ скачка; поэтому, въ то время какъ собака дѣлаетъ x скачковъ отъ N до M, лисица сдѣлаетъ x разъ $\frac{3}{2}$ или $\frac{3x}{2}$ скачковъ отъ 0 до M.

Итакъ, на одномъ и томъ же разстояніи NM, собака дѣлаетъ x скачковъ, а лисица $60 + \frac{3x}{2}$ (60 скачковъ на разстояніи отъ N до 0).

Примемъ скачекъ лисицы за единицу мѣры; тогда разстояніе NM, выраженное въ этихъ единицахъ, будетъ $1 \times \left(60 + \frac{3x}{2}\right)$ или $60 + \frac{3x}{2}$ принятыхъ единицъ.

Съ другой стороны, 3 скачка собаки равны 7 скачкамъ лисицы, сл. 1 скачекъ собаки $= \frac{7}{3}$ скачка лисицы; а потому x скачковъ собаки $= \frac{7x}{3}$ принятымъ единицамъ: это другая формула, выражающая разстояніе NM въ тѣхъ-же единицахъ, какъ и формула $60 + \frac{3x}{2}$.

Приравнивая одну формулу другой, имѣетъ ур—ніе

$$\frac{7x}{3}=60+\frac{3x}{2}.$$

Рѣшеніе уравненія:—Освобождая ур. отъ дробей умноженіемъ обѣихъ частей на 6 получаемъ

$$14x=360+9x,$$
$$5x=360,$$
$$x=\frac{360}{5}=72.$$

Итакъ, собака сдѣлала 72 скачка, чтобы догнать лисицу.

Повѣрка не представляетъ затрудненій.

284. Пятая задача. *Два поѣзда выходятъ одновременно со станцій* A *и* B *и идутъ на встрѣчу другъ другу; первый все разстояніе* AB *можетъ пройти въ 4 ч. 20 м.; второй на прохожденіе того же пути употребляетъ 3 ч. 30 м. Разстояніе отъ* A *до* B *равно 211 верстамъ. На какомъ разстояніи отъ* A *оба поѣзда встрѣтятся, полагая, что каждый движется все время съ одинаковою скоростью?*

Составленіе уравненія. Пусть будетъ x искомое разстояніе, т. е. число верстъ отъ A до мѣста встрѣчи; разстояніе отъ мѣста встрѣчи до B равно, поэтому, $211-x$.—Такъ какъ оба поѣзда выходятъ со станцій одновременно, то до встрѣчи они находятся въ дороги *одинаковое время*; выразивъ эти времена и приравнявъ полученныя выраженія, и найдемъ искомое уравненіе.

Первый поѣздъ въ 4 ч. 20 м. или въ 260 м. можетъ пройти 211 верстъ, сл. чтобы пройти одну версту, времени нужно $\frac{260}{211}$ мин., а для прохожденія x верстъ $\frac{260x}{211}$ мин. Такимъ же разсужденіемъ убѣдимся, что второму поѣзду для прохожденія $211-x$ верстъ потребуется $\frac{210(211-x)}{211}$ мин. Сл. ур—ніе есть

$$\frac{260x}{211}=\frac{210(211-x)}{211}.$$

Рѣшеніе уравненія. Освобождая отъ дробей, имѣемъ

$$260x=210(211-x);$$

выполняя умноженіе и перенося члены:

$$260x+210x=44310;$$
$$470x=44310;$$
$$x=\frac{44310}{470}=94\tfrac{13}{47}\ \text{версты.}$$

Итакъ, встрѣча произойдетъ въ разстояніи $94\frac{13}{47}$ версты отъ A.

Провѣрить рѣшенія нетрудно.

285. Шестая задача. *Раздѣлить 5600 р. между пятью лицами такъ, чтобы 2-е имѣло вдвое больше 1-го и еще 200 р.; 3-е втрое больше 1-го безъ 400 руб.; 5-е полусумму частей 2-го и 3-го и еще 150 р.; наконецъ, 5-е четверть суммы остальныхъ четырехъ и еще 475 руб.*

Составленіе уравненія. Пусть будетъ x часть перваго; часть выразится выразится формулою $2x+200$; 3-го $3x-400$.

Четвертый получитъ $\frac{2x+200+3x-400}{2}+150$ или $\frac{5x+100}{2}$.

Сумма частей четырехъ первыхъ лицъ $=$

$x+2x+200+3x-400+\frac{5x+100}{2}$, или $6x-200+\frac{5x+100}{2}$,

или $\frac{17x-300}{2}$.

Пятый получитъ $\frac{17x-300}{8}+475$, т. е. $\frac{17x+3500}{8}$.

По условію задачи части всѣхъ пяти лицъ въ совокупности составляютъ 5600 р.; отсюда уравненіе

$$\frac{17x-300}{2}+\frac{17x+3500}{8}=5600.$$

Рѣшеніе уравненія. Освобождая уравненіе отъ дробей, находимъ

$$68x-1200+17x+3500=44800;$$
$$85x=44800+1200-3500,$$
$$85x=42500,$$
$$x=\frac{42500}{85}=500.$$

Итакъ: часть 1-го $=500$ р.; часть 2-го $=1200$; 3-го $=1100$; 4-го $=1300$; 5-го — 1500 р.

Повѣрка. Дѣйствительно, сумма $500+1200+1100+1300+1500=$ $=5600$.

Примѣчаніе. Задача эта приведена какъ примѣръ, указывающій, насколько полезно сокращать и приводить въ простѣйшій видъ сложный результатъ, прежде чѣмъ переходить къ слѣдующему.

Приводимъ примѣры съ буквенными данными.

286. Седьмая задача. *Число a раздѣлить на двѣ части, которыя относились-бы между собою какъ $m:n$?*

Составленіе уравненія. Пусть первая часть $=x$; тогда вторую можно выразить при помощи x изъ пропорціи

$$x : \text{второй части} = m : n,$$

откуда
$$\text{вторая часть} = \frac{nx}{m}.$$

Отсюда уравненіе

$$x+\frac{nx}{m}=a.$$

Рѣшеніе уравненія. Умноживъ обѣ части на m, найдемъ

$$mx+nx=am;$$
$$(m+n)x=am;$$
$$x=\frac{am}{m+n}.$$

Вторая часть $=\frac{n}{m}x=\frac{n}{m}\cdot\frac{ma}{m+n}=\frac{na}{m+n}$.

Повѣрка. Обѣ части должны въ суммѣ составлять a.

И дѣйствительно

$$\frac{ma}{m+n}+\frac{na}{m+n}=\frac{ma+na}{m+n}=\frac{(m+n)a}{m+n}=a\,.$$

287. Восьмая задача. *Нѣкто долженъ уплатить своему заимодавцу нѣсколько суммъ въ различные сроки, а именно: s руб. черезъ m мѣсяцевъ, s′ руб. черезъ m′ мц., s″ руб. по истеченіи m″ мѣсяцевъ, наконецъ s‴ руб. черезъ m‴ мѣсяцевъ. Заимодавецъ желаетъ получить всю сумму* $s+s'+s''+s'''$ *разомъ. Черезъ сколько мѣсяцевъ должна быть произведена эта уплата, чтобы ни та ни другая сторона не потерпѣли убытку?*

Составленіе уравненія. Допустимъ, что каждые сто руб. приносятъ заимодавцу p % въ мѣсяцъ; тогда прибыль, которую заимодавецъ получилъ-бы съ перваго капитала при уплатѣ его черезъ m мѣсяцевъ, составляетъ $\frac{spm}{100}$ р; прибыль, доставляемая вторымъ капиталомъ, при уплатѣ его черезъ m' мѣсяцевъ, равна $\frac{s'pm'}{100}$; третьимъ — $\frac{s''pm''}{100}$; и четвертымъ $\frac{s'''pm'''}{100}$; слѣдов. общая прибыль, которую долженъ получить заимодавецъ, составляетъ $\frac{spm}{100}+\frac{s'pm'}{100}+\frac{s''pm''}{100}+$ $+\frac{s'''pm'''}{100}$ р. Время по истеченіи котораго вся сумма $s+s'+s''+s'''$ должна быть уплачена разомъ, должно быть таково чтобы вся сумма давала прибыль равную вышеозначенной. Пусть это время $=x$ мѣсяцамъ; прибыль, доставляемая капиталомъ $s+s'+s''+s'''$ по истеченіи этого времени, составляетъ

$$\frac{(s+s'+s''+s''')px}{100}\text{ руб.}$$

Поэтому, уравненіе будетъ

$$\frac{(s+s'+s''+s''')px}{100}=\frac{spm}{100}+\frac{s'pm'}{100}+\frac{s''pm''}{100}+\frac{s'''pm'''}{100}.$$

Рѣшеніе уравненія. Сокращая обѣ части на общаго множителя $\frac{p}{100}$, находимъ

$$(s+s'+s''+s''')x=sm+s'm'+s''m''+s'''m''',$$

откуда

$$x=\frac{sm+s'm'+s''m''+s'''m'''}{s+s'+s''+s'''}.$$

Повѣрка не представляетъ затрудненій.

288. Задачи.

1. Найти вмѣстимость трехъ бочекъ по слѣдующимъ условіямъ: если всю воду, содержащуюся во второй, перелить въ первую бочку, то во второй останется $\frac{2}{9}$ ея содержимаго; если вторую бочку наполнить водою, содержащеюся въ третьей, то въ послѣдней останется $\frac{1}{4}$ ея содержимаго; наконецъ, если всю воду перелить изъ 1-й въ третью, то для наполненія третьей недостанетъ 50 ведеръ.

2. Опредѣлить число, которое, будучи помножено на 10, даетъ $\frac{2}{3}$ своего квадрата.

3. Купецъ удерживаетъ изъ всей суммы, находящейся въ оборотѣ, ежегодно 1000 р. на свое содержаніе. Притомъ ежегодно его капиталъ увеличивается на $\frac{1}{3}$ остающейся суммы, и въ концѣ третьяго года капиталъ удвоивается. Сколько онъ имѣлъ въ началѣ перваго года.

4. Я издержалъ на одну покупку 4 рублями меньше той суммы, какую имѣлъ; на другую покупку 3 руб. больше четверти остатка; наконецъ, на третью—1 р. 20 к. больше $\frac{2}{5}$ новаго остатка. Послѣ этого у меня осталось 24 р. Сколько руб. имѣлъ я вначалѣ?

5. Капиталистъ помѣстилъ $\frac{2}{5}$ своего капитала въ желѣзно-дорожныя акціи, $\frac{1}{3}$ его употребилъ на покупку земли, а остальную сумму на разработку рудниковъ. Первая часть капитала приноситъ ему ежегодно прибыли 13%, вторая—9%, между тѣмъ какъ разработка рудниковъ требуетъ ежегодной прибавки въ 3%. Какъ великъ его капиталъ, если въ общей сложности онъ даетъ 888 руб. ежегодной прибыли?

6. Найти шестизначное число такого свойства, что если первую цифру справа, равную 2, поставить на первое мѣсто слѣва даннаго числа, то получится число, составляющее $\frac{1}{3}$ перваго?

7. Съ вершины горы, высота которой $=412$ метр., поднимается воздушный шаръ на нѣкоторую высоту надъ вершиною, затѣмъ опускается на $\frac{1}{4}$ этой высоты, а потомъ снова поднимается на $\frac{1}{10}$ той высоты, на которой находился, переставъ опускаться. Затѣмъ онъ падаетъ у основанія горы, пройдя при этомъ паденіи $\frac{19}{20}$ достигнутой въ первый разъ высоты. Опредѣлить эту послѣднюю?

8. Корабль, плывущій изъ A въ B, не дойдя 4 миль до мѣста назначенія, былъ отброшенъ противнымъ вѣтромъ на $\frac{1}{19}$ часть пройденнаго пути. Затѣмъ вѣтеръ снова сдѣлался попутнымъ и корабль, проплывъ по направленію къ B $\frac{1}{24}$ часть разстоянія, накоторомъ онъ находился отъ A, снова былъ отброшенъ назадъ на $\frac{1}{20}$ часть своего разстоянія отъ A. Послѣ этого, сдѣлавъ $\frac{1}{9}$ послѣдняго своего разстоянія отъ A, онъ пришолъ въ B. Опредѣлить: сколько миль между A и B, и какое пространство въ сложности прошолъ корабль?

9. Обобщить предыдущую задачу, взявъ вмѣсто чиселъ 4, 19, 24, 20 и 9 общіе знаки n, a, b, c и d?

10. Изъ бочки, наполненной виномъ, было взято $\frac{5}{12}$ всей находившейся въ ней жидкости и 40 литровъ, затѣмъ прибавлено 20-ю литрами меньше $\frac{4}{13}$ оставшагося

вина, и наконецъ взято изъ нея 20-ю литрами меньше $\frac{7}{11}$ новаго остатка. Послѣ этого въ бочкѣ осталось 700 литрами меньше, чѣмъ было вначалѣ. Сколько литровъ содержала бочка вначалѣ?

11. Резервуаръ, наполненный водою, можно опорожнить двумя кранами различной величины. Открывъ первый кранъ, выпускаютъ $\frac{1}{4}$ всей воды; послѣ чего открываютъ и второй кранъ, такъ-что вода вытекаетъ изъ обоихъ; при этомъ черезъ оба крана резервуаръ опоражнивается въ теченіи времени, $\frac{5}{4}$-ми часа бо́льшаго того, какое потребно, чтобы первый кранъ, будучи открытъ одинъ, выпустилъ бы $\frac{1}{4}$ всей воды. Если бы съ самаго начала были открыты оба крана, резервуаръ былъ бы опорожненъ $\frac{1}{4}$-ью часа скорѣе. Сколько времени нужно, чтобы весь резервуаръ былъ опорожненъ: 1) однимъ первымъ краномъ; 2) однимъ вторымъ краномъ; 3) обоими кранами вмѣстѣ?

12. Отецъ, умирая, раздѣлилъ свое имущество слѣдующимъ образомъ: старшему сыну завѣщалъ 1000 р. и шестую часть остатка: второму 2000 р. и шестую часть остатка; третьему 3000 р. и шестую часть остатка; и т. д. Приэтомъ оказалось, что всѣмъ сыновьямъ досталось поровну. Опредѣлить величину всего наслѣдства, часть каждаго и число наслѣдниковъ?

13. Обобщить предыдущую задачу, взявъ вмѣсто 1000, 2000, 3000, ... количества a, $2a$, $3a$, ... и $\frac{1}{n}$ вмѣсто $\frac{1}{6}$.

14. Сосудъ содержитъ смѣсь воды съ виномъ. Отливши четверть смѣси, замѣняютъ ее водою; отливши $\frac{1}{4}$ новой смѣси, опять замѣняютъ ее водою. Сдѣлавши тоже самое третій разъ, находятъ, что сосудъ содержитъ втрое больше воды, чѣмъ вина. Спрашивается, въ какомъ отношеніи находилось количество воды въ количеству вина въ первой смѣси?

15. Нѣкто помѣстилъ на проценты 150255 р., часть по 3% и по курсу 66 р., а часть по $4\frac{1}{2}$% по курсу 96,75. Въ концѣ года онъ купилъ на вырученныя процентныя деньги трехпроцентныя бумаги по курсу 69,3 р. Послѣ этого весь доходъ его составлялъ 7230 р. Найти величину каждой изъ трехъ суммъ, помѣщенныхъ на проценты.

16. Шесть мѣстечекъ A, B, C, D, E и F, расположенныхъ одно за другимъ въ рядъ и находящихся въ разстояніяхъ: A отъ B — равномъ $\frac{3}{8}$, B отъ C $\frac{5}{16}$, C отъ D $\frac{5}{8}$, D отъ E $\frac{1}{4}$ и E отъ F $\frac{1}{8}$ мили, согласились построить на общія средства училище, съ условіемъ, чтобы оно находилось между C и D и чтобы сумма его разстояній отъ A, B и C равнялась суммѣ разстояній отъ D, E и F. Въ какомъ разстояніи отъ C долженъ находиться училищный домъ?

17. Купецъ получилъ бочку масла и бочку риса одинаковаго вѣса брутто. Вѣсъ нетто перваго товара, при опредѣленномъ процентѣ тара, вычтенномъ изъ вѣса брутто, составилъ 536 фунтовъ; вѣсъ нетто втораго товара при $6\frac{7}{8}$%-ми меньшей тарѣ, составилъ 580 фунтовъ. Сколько % составляла тара первой бочки?

18. Я долженъ заплатить двѣ равныя суммы, одну черезъ 9, другую черезъ 15 мѣсяцевъ. Но если я уплачу ихъ сейчасъ, съ опредѣленнымъ, одинаковымъ для обѣихъ суммъ, учетомъ, то вмѣсто первой суммы долженъ отдать 1208, а вмѣсто второй 1160 руб. Какъ велика каждая сумма и по скольку процентовъ дѣлается учетъ?

19. Нѣкоторое предложеніе, подвергнутое голосованію въ собраніи, состоявшемъ изъ 600 лицъ, было отвергнуто. Будучи подвергнуто голосованію во второй разъ въ томъ же собраніи, оно было принято, при чемъ число голосовъ *pro* на этотъ разъ было вдвое больше числа голосовъ *contra* при первомъ голосованіи; большинство же голосовъ *pro* во второй разъ относилось къ числу голосовъ *pro* при первомъ голосованіи какъ 8:7. Сколько лицъ перемѣнили свое мнѣніе?

20. Въ 4 часа утра изъ A выѣзжаетъ почтовая карета, ѣдущая въ B, дѣлая по 8 верстъ въ часъ. Въ 11 ч. 40 м. изъ B въ A отправляется поѣздъ, идущій по желѣзной дорогѣ, проложенной рядомъ съ шоссейной, и дѣлающій по 32 версты въ часъ. Поѣздъ пришелъ въ A 30-ю минутами позже чѣмъ карета пріѣхала въ B. Опредѣлить разстояніе между A и B?

21. Два тѣла движутся на-встрѣчу другъ другу по линіи AB, одно изъ Aвъ B, другое изъ B въ A, проходя въ каждую единицу времени первое v единицъ разстоянія, второе v', при чемъ второе начинаетъ движеніе n единицами времени позже перваго; оба достигаютъ конечныхъ точекъ въ одно время. Найти разстояніе AB?

22. Въ догонку за курьеромъ, ѣдущимъ всегда съ одинаковою скоростью, черезъ 5 дней послѣ его отъѣзда посланъ другой, который, чтобы догнать перваго черезъ 8 дней, долженъ проѣзжать ежедневно $2\frac{1}{2}$ милями больше перваго. Сколько миль проѣзжаетъ въ день первый курьеръ?

23. Обобщить предыдущую задачу.

24. Пѣшеходъ, проходящій въ каждые 7 часовъ по 4 мили, выходитъ изъ нѣкотораго мѣста B. Въ догонку за нимъ, въ тоже самое время, отправляется верховой изъ мѣста A, отстоящаго отъ B на 8 миль, проѣзжая по 4 мили въ каждые 3 часа. Черезъ сколько часовъ верховой догонитъ пѣшехода, полагая, что каждый изъ нихъ употребляетъ на отдыхъ по $1\frac{1}{2}$ часа во время всего пути?

25. Если солнце проходитъ ежедневно дугу въ 1^0, а луна въ 13^0, и если солнце въ извѣстный моментъ находится въ началѣ рака, а черезъ 3 дня послѣ этого луна въ началѣ овна, то опредѣлить мѣсто ихъ перваго соединенія?

Примѣчаніе. Оба свѣтила движутся съ Запада на Востокъ; знаки же зодіака въ томъ же направленіи слѣдуютъ другъ за другомъ въ такомъ порядкѣ: овенъ, телецъ, близнецы, ракъ, ... на разстояніи 30^0 одинъ отъ другаго.

26. Передъ полнымъ центральнымъ солнечнымъ затмѣніемъ, согласно вычисленію, разстояніе центровъ солнечнаго и луннаго дисковъ въ 9 ч. 13 м. до полудня равнялось $5\frac{7}{8}$ ширины луннаго диска. Оба свѣтила имѣли одинаковую кажущуюся величину и двигались въ одномъ направленіи съ Запада на Востокъ. Луна проходила по своей орбитѣ въ каждый часъ $1\frac{1}{16}$, а солнце въ тоже самое время лишь $\frac{1}{12}$ ширины луннаго диска. Въ которомъ часу имѣло мѣсто совпаденіе центровъ обоихъ дисковъ (полное затмѣніе)? Въ которомъ часу произошло первое прикосновеніе (т. е. начало затмѣнія) и второе прикосновеніе (т. е. конецъ затмѣнія)?

Примѣчаніе. Затмѣніе наз. *центральнымъ*, если имѣетъ мѣсто совпаденіе центровъ солн. и лун. диска; оно м. б. *полнымъ*, или же *кольцеобразнымъ*.

27. Пароходъ и корабль плывутъ изъ M въ N; первый совершаетъ въ каждые 3 часа 7 миль, второй въ такое же время только 2 мили. Когда пароходъ вышелъ изъ M, корабль прошелъ уже $3\frac{1}{2}$ мили, но въ N послѣдній прибылъ 5 часами позже перваго. Сколько часовъ пароходъ употребилъ на переѣздъ разстоянія MN, и какъ велико это разстояніе?

28. Два парохода плывутъ изъ C въ D внизъ по теченію, причемъ второй прошелъ уже $\frac{1}{2}$ мили, прежде чѣмъ первый вышелъ изъ пристани. Первый прибылъ въ D, остался здѣсь $1\frac{1}{2}$ часа, и, плывя противъ теченія со скоростью вдвое меньшею чѣмъ по теченію, возвратился въ C въ то самое время, когда второй прибылъ въ D. Первый дѣлалъ въ часъ $2\frac{1}{3}$ мили, а второй только $\frac{2}{3}$ м. по теченію. Опредѣлить разстояніе между C и D?

29. Пароходъ вышелъ изъ A и плыветъ въ B противъ теченія. Черезъ часъ послѣ этого вышелъ пароходъ изъ B, направляясь въ A. Первый въ каждые 4 часа дѣлаетъ 5 миль, второй въ каждые $3\frac{1}{3}$ ч. $8\frac{1}{2}$ миль. Когда оба парохода встрѣтились, то оказалось, что второй прошелъ путь вдвое большій чѣмъ первый. Опредѣлить разстояніе между A и B?

30. Мѣста M и N, находящіяся подъ одною и тою же географическою широтою, причемъ N лежитъ къ западу отъ M, соединены рельсовымъ путемъ. Поѣздъ, выйдя изъ M, проходитъ въ каждый часъ 32 англ. мили. Вслѣдствіе разницы въ мѣстномъ времени поѣздъ выигрываетъ 1 минуту времени на каждыя 10 миль. Опредѣлить разстояніе между A и B, если извѣстно, что поѣздъ, выйдя изъ M въ 9 часовъ утра по мѣстному времени, пришелъ въ N въ 4 ч. 6 м. по-полудни по времени этого мѣста.

31. Дилижансъ, дѣлающій 5 миль въ каждые 4 часа, выѣхалъ изъ A въ B, пробылъ въ B 1 часъ и отправился въ обратный путь. Пѣшеходъ, проходящій по 2 мили въ каждые 3 часа, вышелъ изъ A въ одно время съ дилижансомъ и встрѣтилъ его черезъ 9 часовъ возвращающимся въ A. Каково разстояніе между A и B, и сколько пѣшеходу осталось пройти?

32. Изъ водоема вмѣстимостью въ 1054 литра и до половины наполненнаго, вода вытекаетъ черезъ трубу, уносящую по 51 литру въ каждые 7 минутъ. Черезъ другую трубу вливается въ него по 47 л. въ каждыя 4 минуты. Въ какое время водоемъ будетъ наполненъ, если вторая труба открыта 11-ью минутами позже первой?

33. Изъ двухъ неравныхъ трубъ водоема вытекаетъ вода съ различною скоростью. Если величины отверстій относятся какъ 5:13, а скорости истеченія какъ 8:7, и одна труба выпускаетъ въ извѣстное время 561 куб. футомъ больше воды, чѣмъ другая, то спрашивается: какое количество воды вытечетъ въ это время изъ каждой трубы?

34. Для выкачиванія воды изъ шахты поставлены въ двухъ мѣстахъ 2 паровыя машины, работающія непрерывно днемъ и ночью. Первая поднимаетъ въ каждыя 5 минутъ 11 гектолитровъ воды съ глубины 155 метровъ; вторая въ каждые 10 м. поднимаетъ 31 гектолитръ на высоту 88 метровъ. Для замѣны обѣихъ паровыхъ машинъ нужно бы было 54 лошади. Сколько лошадей замѣняетъ каждая паровая машина въ отдѣльности?

35. Для выкачиванія воды изъ шахты съ глубины $276\frac{5}{6}$ метра поставлены 2 паровыя машины, изъ которыхъ одна, поставленная подъ землею, поднимаетъ воду на извѣстную высоту, накачивая ее въ большой резервуаръ; другая же, находящаяся

на поверхности земли, поднимаетъ воду изъ этого резервуара наружу. Первая машина въ каждые 6 минутъ можетъ поднять 13 гектолитровъ воды на высоту 168 метровъ, другая въ каждыя 3 м. 10 гект. на высоту 72 метровъ. На какомъ разстоянiи надъ дномъ должно помѣстить резервуаръ?

36. Для добыванiя каменнаго угля поставили въ каменоугольной шахтѣ 2 пар. машины. Первая въ каждые 5 часовъ поднимала 2880 центнеровъ угля на высоту 125 метровъ, вторая въ каждые 3 часа 1600 центн. на высоту 180 метровъ. Обѣ машины поставили въ одно мѣсто; и при этомъ оказалось, что хотя первая работала уже $1\frac{3}{4}$ часа прежде чѣмъ вторая начала дѣйствовать, но послѣдняя черезъ 7 часовъ подняла 225 центнерами больше первой. Опредѣлить, съ какой глубины обѣ машины поднимали уголь?

37. Для выкачиванiя воды изъ каменоугольной копи поставлены были 3 паровыя машины: первая можетъ въ каждыя 2 минуты поднять 7 гектолитровъ воды съ глубины 87 метровъ, вторая въ каждыя 5 м. 12 гектолитровъ съ глубины 145 метровъ, а третья въ каждыя 3 мин. $7\frac{1}{4}$ гектолитровъ съ глубины 108 метровъ. Въ какое время всѣ 3 машины вмѣстѣ могутъ поднять 2436 гектолитровъ воды на высоту 270 метровъ?

38. Четыре причины, дѣйствуя отдѣльно, могутъ во времена t^{I}, t^{II}, t^{III} и t^{IV} произвести дѣйствiя e^{I}, e^{II}, e^{III}, e^{IV}. Въ какое время всѣ четыре причины, дѣйствуя одновременно, произведутъ дѣйствiе E?

39. Нѣкто, имѣя вино двухъ сортовъ, хочетъ смѣшать ихъ въ отношенiи 3 : 2. Ведро перваго сорта стоитъ 48 руб. Какой цѣны вино втораго сорта, если ведро смѣси стоитъ 42 руб.?

40. Имѣется $94\frac{1}{2}$ фунта сплава, въ которомъ на 3 части сереба приходится 4 части мѣди. Сколько нужно прибавить мѣди, чтобы на 7 частей ея приходилось 2 части серебра?

41. Имѣется 255 фунтовъ спирта, въ которомъ отношенiе вѣса воды къ вѣсу алкоголя равно 2:3. Сколько воды нужно извлечь изъ этой смѣси дистиллированiемъ, чтобы отношенiе вѣса воды къ вѣсу алкоголя равнялось 3:17?

42. Какое количество солянаго раствора, содержащаго 24% соли, нужно прибавить къ 3715 фунтамъ 6%-го разсола, чтобы смѣсь содержала 16% соли?

43. Серебреникъ имѣетъ два различные сплава золота съ серебромъ. Въ одномъ сплавѣ оба металла находятся въ отношенiи 1:2; въ другомъ сплавѣ въ отношенiи 2:3. Изъ обоихъ сплавовъ желаютъ сдѣлать новый сплавъ въ 11 лотовъ вѣсомъ, въ которомъ бы золото и серебро входили бы въ отношенiи 17:27. Сколько надобно взять отъ каждаго сплава?

44. Нѣкто долженъ уплатить: 1013 р. черезъ $3\frac{1}{2}$ мц., 431 р. 4-мя мѣсяцами позднѣе, и еще нѣкорорую сумму опять 4 мц. позднѣе. Какова эта послѣдняя сумма, если всѣ три суммы онъ можетъ уплатить разомъ черезъ $6\frac{1}{4}$ мѣсяцевъ, безъ прибыли и убытку?

45. Нѣкто долженъ уплатить 1980 р. черезъ $5\frac{1}{2}$ мѣсяцевъ; но какъ онъ не можетъ внести эту сумму разомъ, то уплачиваетъ черезъ 3 мц. 440 р., $1\frac{1}{2}$ мѣся-

цами позднѣе 550 р., а еще черезъ 2 мѣсяца 770 р. Сколько мѣсяцевъ онъ можетъ удерживать у себя остальные 220 р.

46. Нѣкто долженъ уплатить 2000 р. черезъ 14 мѣс., но условился со своимъ заимодавцемъ уплачивать по частямъ въ 5 сроковъ, каждый изъ которыхъ $1^1|_2$ мѣсяцами больше всего предыдущаго срока, внося въ первую уплату 200 р., а въ каждую слѣдующую 100 рублями больше. Черезъ сколько мѣсяцевъ должно произвести первую уплату, если ни та, ни другая сторона не должны терпѣть убытку, ни получать прибыли?

47. Если A можетъ исполнить нѣкоторую работу въ $2m$ дней, B и A вмѣстѣ въ n дней, и A и C, вмѣстѣ работая, въ $m + \frac{n}{2}$ дней, то сколько дней имъ потребуется на окончаніе, если всѣ трое будутъ работать вмѣстѣ?

48. Нѣкто, живя на дачѣ близъ станціи желѣзной дороги, выходя изъ дому за 20 мин. до отхода поѣзда, всегда во-время поспѣвалъ на поѣздъ. Однажды, будучи задержанъ въ домѣ нѣсколько болѣе обыкновеннаго, онъ отправился на поѣздъ, идя со скоростью $= \frac{10}{7}$ обыкновенной скорости своей походки, и все-таки опоздалъ на поѣздъ 2-мя минутами. Сколько минутъ онъ былъ задержанъ въ домѣ?

49. Нѣкто незадолго до своей смерти отказалъ одной вдовѣ, жившей въ другомъ отдаленномъ городѣ, 3800 р., распорядившись, что если она имѣетъ сына, то взяла бы себѣ $\frac{2}{5}$, а сыну отдала бы $\frac{3}{5}$ завѣщанной суммы, если же имѣетъ дочь, то чтобы себѣ взяла $\frac{3}{5}$, а дочери отдала $\frac{2}{5}$ названной суммы. Но оказалось, что вдова имѣетъ сына и дочь, что было неизвѣстно завѣщателю. Спрашивается, какимъ образомъ сумма 3800 р. должна быть раздѣлена согласно съ волею завѣщателя?

50. Въ одной древней китайской ариѳметикѣ, называемой Кіу-чангъ, написанной ученымъ Цзинь-Кіу-чау за 2600 лѣтъ до Р. Х., помѣщены, между прочимъ, слѣдующія двѣ задачи: 1) въ центрѣ квадратнаго пруда, имѣющаго 10 фут. въ длину и въ ширину, растетъ тростникъ, возвышающійся на 1 футъ надъ поверхностью воды. Притянутый къ берегу, къ срединѣ стороны пруда, онъ достигаетъ своей верхушкой берега. Опредѣлить глубину пруда? 2) Бамбуковый стволъ въ 10 фут. вышиною переломленъ бурею такъ, что если верхнюю часть его нагнуть къ землѣ, то верхушка касается земли въ разстояніи 3 футовъ отъ основанія ствола. На какой высотѣ дерево переломлено?

51. Вывести формулу математическаго учета, если занятая сумма есть a, валюта A, срокъ займа t лѣтъ, и годовые проценты i?

52. Выразить разность между коммерческимъ учетомъ и математическимъ? Каково ихъ отношеніе?

53. Въ которомъ часу секундная стрѣлка дѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый часовою и минутною стрѣлками?

54. Три кубическіе сосуда A, B и C, объемы которыхъ относятся какъ 1 : 8 : 27, частію наполнены водою, причемъ количества воды относятся какъ 1 : 2 : 3. Изъ A въ B и изъ B въ C переливаютъ столько воды, чтобы глубина ея во всѣхъ сосудахъ была одинакова. Послѣ этого переливаютъ $128\frac{4}{7}$ куб. ф. воды изъ C въ B, а потомъ изъ B въ A столько, чтобы глубина воды въ A была вдвое больше чѣмъ

ся глубина въ B. Вслѣдствіе этого количество воды въ A дѣлается на 100 куб. фут. меньше чѣмъ было первоначально. Сколько содержалъ каждый сосудъ первоначально?

55. Три лошади A, B и C бѣгутъ по бѣговому пути длиною въ $1\frac{1}{2}$ мили. Когда B пробѣжала $\frac{1}{2}$ мили, она находилась впереди A, и разстояніе ея отъ A было втрое больше чѣмъ отъ C. Затѣмъ лошади бѣжали равномѣрно до того момента, когда B находилась на $\frac{1}{4}$ мили отъ призоваго столба, причемъ въ это время C находилась на столько позади A, на сколько A позади B, а разстояніе между A и B составляло только $\frac{1}{11}$ часть того, какое было между ними въ то время, когда B пробѣжала первую полумилю. Послѣ этого C ускоряетъ свой бѣгъ на $\frac{1}{53}$ прежней величины, и проходитъ мимо B на 176-мъ ярдѣ разстоянія отъ столба, а скорости A и B остаются безъ перемѣны. Каково было разстояніе между A и C въ концѣ гонки?

Примѣчаніе. Миля = 1760 ярдамъ.

56. Пароходъ, отплывъ изъ Таганрогскаго порта въ $11\frac{1}{2}$ часовъ утра для рейса въ Аѳины, проходилъ: въ первыя сутки 6 верстъ и $\frac{1}{16}$ долю оставшагося пути, во вторыя сутки 12 верстъ и опять $\frac{1}{16}$ остальнаго разстоянія, и т. д., т. е. дѣлая въ каждыя новыя сутки 6 верстами больше противъ предшествовавшихъ и еще $\frac{1}{16}$ остающейся дороги до Аѳинъ. Требуется узнать: въ которомъ часу пароходъ проходилъ мимо Константинополя, если морской путь между этимъ городомъ и Аѳинами составляетъ $\frac{16}{45}$ разстоянія между Таганрогомъ и Аѳинами и если пароходъ шелъ постоянно съ одинаковою скоростью?

ГЛАВА XIX.

Уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными.

Опредѣленія. — Начала и методы. — Задачи.

289. Опредѣленія. Одного уравненія со многими неизвѣстными недостаточно для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть два неизвѣстныя x и y связаны однимъ уравненіемъ, наприм.

$$4x - 5y = 12.$$

Выражая отсюда x, имѣемъ

$$x = \frac{12 + 5y}{4},$$

откуда видно, что величина x-са зависитъ отъ y, самый же y остается вполнѣ произвольнымъ, такъ-что ему можемъ давать какія угодно значенія; такъ, положивъ

$$y=0,\quad \text{находимъ, что}\quad x=\frac{12+5\times 0}{4}=3,$$

$$y=1,\quad \text{»}\quad \text{»}\quad x=\frac{12+5\times 1}{4}=\frac{17}{4};$$

$$y=2,\quad \text{»}\quad \text{»}\quad x=\frac{12+5\times 2}{4}=\frac{11}{2};\ \text{и т. д.}$$

Итакъ, *одно ур. съ 2 неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество паръ рѣшеній, и слѣд. неопредѣленно.*

Если уравненіе содержитъ три неизвѣстныя, то двумъ изъ нихъ можно дать произвольныя значенія, а третье неизвѣстное получитъ совершенно опредѣленное значеніе; ур. будетъ имѣть опять безчисленное множество рѣшеній. Вообще, одно уравненіе съ нѣсколькими неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и называется поэтому неопредѣленнымъ.

Система совмѣстныхъ уравненій. Когда нѣсколько неизвѣстныхъ должны удовлетворять одновременно нѣсколькимъ уравненіямъ, то совокупность ур-ній составляетъ то, что называется *системою совмѣстныхъ уравненій.*

Простѣйшую систему составляютъ, очевидно, два уравненія съ двумя неизвѣстными.

Рѣшить систему нѣсколькихъ уравненій со многими неизвѣстными значитъ найти значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія одновременно всѣмъ уравненіямъ. Такъ, система

$$4x-3y=8,$$
$$7x+2y=43$$

имѣетъ рѣшеніемъ $x=5$, $y=4$, потому-что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ и то и другое уравненія обращаются въ тождества.

Двѣ системы уравненій называются *тождественными*, если они принимаютъ одни и тѣже рѣшенія.

Начала и методы.

290. Начало первое. *Если* p, q, p' и q' *суть количества конечныя, т. е. не равныя ни* 0, *ни* ∞, *если притомъ* $pq'-p'q$ *неравно нулю, то системы*

$$\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}\ (1)$$

и

$$\left.\begin{matrix}pA+qB=0\\p'A+q'B=0\end{matrix}\right\}\ (2)$$

тождественны.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ:

1) Пусть $x=\alpha$ и $y=\beta$ суть рѣшенія системы (1): это значитъ, что при подстановкѣ въ A и B вмѣсто x количества α и вм. y количества β, A и B

обращаются въ нули; но какъ p, q, p' и q', по условію, конечны, а произведеніе конечнаго количества на нуль равно 0, то при тѣхъ-же значеніяхъ x и y выраженія $pA+qB$ и $p'A+q'B$ обращаются въ нули. Слѣд. $x=\alpha$ и $y=\beta$ удовлетворяютъ системѣ (2).

2) Пусть теперь $x=a$ и $y=b$ будутъ рѣшенія системы (2), т. е. пусть при этихъ величинахъ x и y выраженія $pA+qB$ и $p'A+q'B$ обращаются въ нули; въ такомъ случаѣ и выраженіе

$$q'(pA+qB)-q(p'A+q'B)\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

въ которомъ q' и q конечны, а $pA+qB$ и $p'A+q'B$ равны нулю, обращается въ ноль; но выраженіе (3) равно

$$(pq'-p'q)A;$$

слѣд. и это послѣднее равно нулю; но по условію $pq'-p'q$ отлично отъ нуля, слѣд. A должно быть равно нулю при $x=a$ и $y=b$. Но тогда и $pA=0$, а потому ур. $pA+qB=0$ обращается въ $qB=0$; а какъ q конечно, то должно быть $B=0$. Итакъ рѣшенія системы (2) удовлетворяютъ уравненіямъ системы (1).

Мы доказали, что системы (1) и (2) тождественны.

На этомъ началѣ основанъ

291. Методъ уравниванія коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ или методъ сложенія и вычитанія.

Пусть имѣемъ систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными

$$\left.\begin{aligned}7x+4y&=76\\ 11x-9y&=43\end{aligned}\right\}\ (1).$$

Исключимъ изъ этихъ уравненій неизвѣстное x; для этого помножимъ обѣ части 1-го ур. на коэффиціентъ при x во второмъ уравненіи, а обѣ части 2-го ур. на -7, т. е. на взятый съ обратнымъ знакомъ коэф. при x въ первомъ ур-ніи, и полученныя уравненія сложимъ. Такимъ обр. получимъ

$$\begin{aligned}77x+44y&=836\\ -77x+63y&=-301\\ \hline 107y&=535.\end{aligned}$$

Для исключенія y изъ системы (1), множимъ обѣ части перваго ур-нія на 9, а обѣ части втораго на 4 и складываемъ почленно полученныя уравненія:

$$\begin{aligned}63x+36y&=684\\ 44x-36y&=172\\ \hline 107x\qquad&=856.\end{aligned}$$

На основаніи доказаннаго начала, система ур-ній

$$107y=535\ \text{ и }\ 107x=856\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

тождественна данной системѣ; поэтому рѣшенія системы (2) будутъ удовлетворять и (1). Рѣшая ур-нія (2), находимъ.

$$y=\frac{535}{107}=5;\qquad x=\frac{856}{107}=8.$$

Нетрудно провѣрить, что рѣшенія

$$x = 8 \quad \text{и} \quad y = 5$$

дѣйствительно удовлетворяютъ даннымъ уравненіямъ.

Отсюда

Правило. Для нахожденія одного изъ неизвѣстныхъ, напр. x, умножаемъ данныя уравненія на такія количества, чтобы коэффиціенты при другомъ неизвѣстномъ (y) сдѣлались равными, но имѣли бы противоположные знаки; затѣмъ полученныя новыя ур-нія почленно складываемъ. Такимъ обр. неизвѣстное y исключится приведеніемъ и получится ур-ніе съ однимъ неизвѣстнымъ x, которое уже легко опредѣлить. Подобнымъ же образомъ найдемъ y, исключивши x.

На практикѣ нужно пользоваться всѣми обстоятельстаами, ведущими къ упрощенію вычисленій. Пояснимъ это примѣрами.

1. Рѣшить уравненія

$$5x - 12y = 17$$
$$3x + 8y = 71.$$

Для исключенія y замѣчаемъ, что нѣтъ надобности множить первое ур. на 8, а второе на 12. Въ самомъ дѣлѣ, наим. кратное чиселъ 12 и 8 есть 24, и для того чтобы коэффиціенты при y сдѣлались равными 24, достаточно первое ур. помножить на 2, а второе на 3. Сдѣлавъ это, найдемъ:

$$10x - 24y = 34$$
$$9x + 24y = 213;$$

сложивъ почленно оба ур-нія, найдемъ

$$19x = 247;$$

откуда

$$x = 13.$$

Умноживъ 1-ое ур. на 3, а второе на -5, имѣемъ

$$15x - 36y = 51$$
$$-15x - 40y = -355;$$

сложивъ эти уравненія, получимъ

$$-76y = -304,$$

откуда

$$y = \frac{-304}{-76} = 4.$$

2. Рѣшить уравненія

$$5x + 2y = 40$$
$$11x - 4y = 4.$$

Для исключенія y достаточно первое ур. умножить на 2, а второе оставить безъ перемѣны (или, что тоже, умножить на 1); найдемъ

$$10x + 4y = 80$$
$$11x - 4y = 4;$$

сложивъ эти уравненія, получимъ

$$21x = 84, \quad \text{откуда} \quad x = 4.$$

Умноживъ первое ур. на 11, а второе на — 5, находимъ

$$55x + 22y = 440$$
$$-55x + 20y = -20;$$

сложивъ, имѣемъ:

$$42y = 420, \text{ откуда } y = 10.$$

3. Рѣшить ур-нія

$$4x + 9y = 127$$
$$8x - 3y = 23.$$

Умноживъ второе ур. на 3 и сложивъ съ первымъ, найдемъ

$$28x = 196, \quad \text{откуда} \quad x = 7.$$

Умноживъ первое на — 2 и сложивъ со вторымъ, получимъ

$$-21y = -231, \quad \text{откуда} \quad y = 11.$$

4. Рѣшить уравненія

$$x + y = a$$
$$x - y = b.$$

Рѣшеніе этой системы встрѣчается на каждомъ шагу, и весьма просто. Складывая почленно оба ур-нія, получимъ

$$2x = a + b, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{a+b}{2};$$

вычитая изъ перваго второе, имѣемъ:

$$2y = a - b, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{a-b}{2}.$$

5. Рѣшить систему уравненій

$$(a+b)x + (a-b)y = a^2 + 2ab - b^2$$
$$(a^3+b^3)x + (a^3-b^3)y = a^4 - b^4 + ab(a^2+b^2).$$

Для исключенія y замѣчаемъ, что $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, откуда видно, что достаточно первое ур. помножить на a^2+ab+b^2, второе на 1, и изъ перваго вычесть второе.

Сдѣлавъ это, найдемъ

$$\{(a+b)(a^2+ab+b^2) - (a^3+b^3)\}x = (a^2+2ab-b^2)(a^2+ab+b^2) - \{a^4 - b^4 + ab(a^2+b^2)\}$$

или

$$2ab(a+b)x = 2a^2b(a+b),$$

откуда

$$x = a.$$

Для исключенія x, т. е. для нахожденія y, замѣчаемъ, что $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, и слѣд. достаточно, умноживъ первое уравн. на

$a^2 - ab + b^2$, а второе на 1, вычесть второе изъ перваго. По упрощеніи, найдемъ

$$y = b.$$

6. Рѣшимъ общія уравненія

$$ax + by = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$a'x + b'y = c' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Для исключенія y умножаемъ 1-е ур. на b', а второе на $-b$ и складываемъ почленно; так. обр. найдемъ

$$(ab' - a'b)x = cb' - bc', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

откуда

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - a'b}.$$

Для исключенія x, съ цѣлію опредѣлить y, умножимъ 1-ое ур. на $-a'$, второе на $+a$; сложивъ почленно оба ур., найдемъ

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

откуда

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Уравненія (3) и (4) тождественны уравненіямъ (1) и (2); въ самомъ дѣлѣ, множители p, q, p', q' имѣютъ здѣсь частныя значенія

$$b', \quad -b, \quad -a', \quad +a;$$

поэтому тождество обѣихъ системъ имѣетъ мѣсто всякій разъ, когда $ab' - a'b$ не равно нулю. Итакъ: *если* $(ab' - a'b)$ *отлично отъ нуля, система ур-ній*

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

имѣемъ единственное конечное и опредѣленное рѣшеніе:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - a'b}, \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - a'b}.$$

292. Начало второе. *Если* p и q *суть количества конечныя и отличныя отъ нуля, то ур-ніе*

$$pA + qB = 0$$

можетъ замѣнить одно изъ ур-ній

$$A = 0, \qquad B = 0;$$

то есть системы

$$\left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right\}(1) \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{c} A = 0 \\ pA + qB = 0 \end{array}\right\}(2)$$

тождественны.

Доказательство. Дѣйствительно:

1°. Всякое рѣшеніе системы (1), обращая A и B въ нули, обращаетъ pA и qB въ нули, ибо p и q конечны, а слѣд. удовлетворяетъ системѣ (2).

2°. Всякое рѣшеніе системы (2), обращая A въ нуль, тѣмъ самымъ удовлетворяетъ первому ур-нію системы (1); но если A обращается въ 0, то и pA

равно нулю, а какъ сумма $pA+qB$, которой одно слагаемое равно 0, также обращается въ ноль, то должно и другое слагаемое qB обратиться въ 0; но q конечно, слѣд. B должно равняться 0. А этимъ доказано, что всякое рѣшеніе системы (2), удовлетворяетъ и второму ур-нію системы (1).

Тождественность системъ (1) и (2) такимъ образомъ доказана.

На этомъ началѣ основаны методы: *подстановленія*, *сравненія величинъ неизвѣстныхъ* и *методъ неопредѣленныхъ множителей* или *методъ Безу* (Bezout).

293. Методъ подстановленія. Пусть даны уравненія

$$\begin{cases} ax+by=c \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1) \\ a'x+b'y=c' \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2) \end{cases}$$

Опредѣлимъ изъ ур-нія (1) x, принимая на время y за извѣстное; находимъ

$$x=\frac{c-by}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Подставляя эту величину въ ур-ніе (2), находимъ ур.

$$a'\left(\frac{c-by}{a}\right)+b'y=c',$$

которое и рѣшаемъ:

$$a'c-a'by+ab'y=ac'$$

$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Подставляя эту величину y-ка въ формулу (3), получимъ

$$x=\frac{c-b\cdot\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}}{a};$$

$$x=\frac{cab'-ba'c-bac'+ba'c}{a(ab'-a'b)};$$

$$x=\frac{a(cb'-bc')}{a(ab'-a'b)}=\frac{cb'-bc'}{ab'-a'b}.$$

Нужно доказать, что найденныя такимъ образомъ величины x и y удовлетворяютъ предложенной системѣ (1) и (2).

Въ самомъ дѣлѣ, перенесеніемъ ax и by въ другую часть замѣняемъ ур. (1) тождественнымъ ему ур-емъ.

$$-ax+(c-by)=0$$

и слѣд. вмѣсто системы (1) и (2) можемъ взять ей тождественную:

$$-ax+(c-by)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1')$$
$$a'x+b'y=c' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Помножая обѣ части ур-нія (1′) на $\frac{a'}{a}$, а (2) на $+1$ и складывая почленно, имѣемъ

$$\frac{a'}{a}\left[-ax+(c-by)\right]+a'x+b'y=c';$$

или

$$a'\left(\frac{c-by}{a}\right)+b'y=c'.$$

А потому, на основаніи начала втораго, можемъ систему (1′), (2), а сл. и данную, замѣнить системою

$$(6).\quad \begin{cases} ax+by=c \\ a'\left(\frac{c-by}{a}\right)+b'y=c', \end{cases}$$

которая и даетъ искомыя рѣшенія.

Ур-нія (6) позволяютъ формулировать слѣд. *правило*: *Выводимъ изъ одного изъ предложенныхъ ур-ній величину одного изъ неизвѣстныхъ, принимая другое за извѣстное, и подставляемъ эту величину во второе уравненіе. Изъ полученнаго так. обр. уравненія опредѣляемъ то неизвѣстное, которое въ немъ содержится; а внеся найденное неизвѣстное въ первое ур., получимъ изъ него величину и втораго неизвѣстнаго.*

Нужно, впрочемъ, замѣтить, что (4) можно замѣнить ур-мъ (5) лишь тогда, когда $ab'-ba' \gtrless 0$.

Приводимъ примѣры.

1. Рѣшить систему уравненій

$$3x-5y=2$$
$$4x+2y=7.$$

Рѣшая первое ур-ніе относительно x, причемъ y принимаемъ на время за извѣстное, находимъ:

$$x=\frac{2+5y}{3}; \quad \ldots\ldots (1)$$

Подставляя эту величину x во второе уравненіе, имѣемъ:

$$4.\frac{2+5y}{3}+2y=7 \quad \ldots\ldots (2).$$

Такимъ образомъ получаемъ систему уравненій (1) и (2), которая, по доказанному, тождественна съ данною. Рѣшая ур. (2), находимъ

$$y=\frac{1}{2};$$

подставляя $\frac{1}{2}$ вмѣсто y въ ур. (1), получаемъ

$$x=\frac{3}{2}.$$

2. Рѣшить систему уравненій

$$(a^2-b^2)(5x+3y)=2ab(4a-b) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$a^2y-\frac{ab^2c}{a+b}+(a+b+c)bx=b^2y+ab(a+2b) \quad \ldots\ldots (2).$$

Выводимъ изъ перваго ур-нія x, принимая на время y за извѣстное; находимъ

$$x=\frac{2ab(4a-b)-3(a^2-b^2)y}{5(a^2-b^2)}.$$

Подставляя это выраженіе x въ ур-ніе (2), имѣемъ:

$$a^2y-\frac{ab^2c}{a+b}+\frac{(a+b+c)\,b.[2ab(4a-b)-3\,(a^2-b^2)y]}{5(a^2-b^2)}=b^2y+ab\,(a+2b).$$

Освобождаемъ это ур. отъ дробей, помножая обѣ его части на $5\,(a^2-b^2)$; найдемъ

$$5a^2(a^2-b^2)\,y-5ab^2c(a-b)+2ab^2\,(a+b+c)(4a-b)-3\,(a^2-b^2)(a+b+$$
$$+c)\,by=5(a^2-b^2)b^2y+5ab(a+2b)(a^2-b^2).$$

Перенося неизвѣстные въ первую часть, а извѣстные члены во вторую и вынося за скобки найдемъ.

$$[5a^2\,(a^2-b^2)-3\,(a^2-b^2)(a+b+c)\,b-5\,(a^2-b^2)\,b^2].y=$$
$$5ab\,(a+2b)(a^2-b^2)+5ab^2c\,(a-b)-2ab^2\,(a+b+c)(4a-b),$$

или

$$(a^2-b^2)[5a^2-8b^2-3ab-3bc]y=ab(5a^3+2a^2b-11ab^2-3abc-8b^3-3b^2c)$$

откуда $$y=\frac{ab}{a-b}.$$

Внося эту величину y въ формулу для x, найдемъ

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

294. Методъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ. Пусть требуется рѣшить уравненія

$$ax+by=c\;\ldots\ldots\;(1)$$
$$a'x+b'y=c'\;\ldots\ldots\;(2).$$

Выражая изъ каждаго уравненія одно неизвѣстное черезъ другое, напр. x черезъ y, найдемъ:

$$x=\frac{c-by}{a}\;\ldots\ldots(3)\quad\text{и}\quad x=\frac{c'-b'y}{a'}\;\ldots\ldots(4)$$

Вставивъ въ (4) на мѣсто x его величину изъ (3), находимъ уравненіе

$$\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}\;\ldots\ldots(5)$$

которое вмѣстѣ съ (3) и составитъ систему, тождественную съ данной. Рѣшая (5), найдемъ y; а подставивъ величину y въ (3), опредѣлимъ x.

Итакъ, надо доказать, что система уравненій (3) и (5) тождественна съ системой (1) и (2). Въ самомъ дѣлѣ, перенеся by и $b'y$ во вторыя части данныхъ ур-ній, найдемъ имъ тождественныя:

$$ax=c-by\;\ldots\ldots\;(1')$$
$$a'x=c'-b'y\;\ldots\ldots\;(2')$$

Помноживъ (1′) на $\frac{1}{a}$, и (2′) на $-\frac{1}{a'}$, и сложивъ, получимъ

$$0=\frac{c-by}{a}-\frac{c'-b'y}{a'}\;\ldots\ldots\;(6).$$

а это ур. вмѣстѣ съ (1′), на основаніи начала втораго, можетъ замѣнить систе-

му (1′) и (2′), а слѣдовательно данную. Умноживъ обѣ части ур-нія (1′) на $\frac{1}{a}$ получимъ

$$x=\frac{c-by}{a};$$

а перенеся $-\frac{c'-b'y}{a'}$ изъ второй части ур-нія (6) въ первую, находимъ

$$\frac{c'-b'y}{a'}=\frac{c-by}{a}:$$

ур-нія, тождественныя ур-мъ (1′) и (6). Такимъ образомъ данная система тождественна съ

$$x=\frac{c-by}{a} \text{ и } \frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}:$$

требуемое доказано.

Примѣненіе этого метода, согласно началу II, требуетъ, чтобы a и a' были количества конечныя, отличныя отъ нуля; а рѣшеніе ур-нія (5) требуетъ кромѣ того, чтобы $ab'-a'b$ было отлично отъ нуля.

Изъ сказаннаго выводимъ третій пріемъ рѣшенія:

Выводимъ изъ обоихъ данныхъ ур-ній величину одного и того же неизвѣстнаго, напр. x *и полученныя выраженія сравниваемъ; такимъ образомъ получаемъ одно ур. съ однимъ неизвѣстнымъ* y, *которое и опредѣляемъ. Внеся найденную для* y *величину въ одну изъ формулъ для* x, *находимъ и это неизвѣстное.*

Примѣръ. Рѣшить систему

$$x+\frac{1}{2}(3x-y-1)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(y-1),$$

$$\frac{1}{5}(4x+3y)=\frac{7y}{10}+2.$$

Освобождаемъ ур-нія отъ дробей, и для этого множимъ обѣ части перваго на 4, а втораго на 10.—Находимъ:

$$4x+2(3x-y-1)=1+3(y-1),$$

$$2(4x+3y)=7y+20.$$

По перенесеніи членовъ и по упрощеніи, имѣемъ

$$10x-5y=0, \quad \text{или} \quad 2x-y=0,$$

$$8x-y=20.$$

Опредѣляя изъ каждаго ур-нія y, получаемъ:

$$y=2x \quad \text{и} \quad y=8x-20.$$

Сравнивая оба выраженія для y, находимъ

$$2x=8x-20, \quad \text{или} \quad -6x=-20; \quad \text{откуда}$$

$$x=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}.$$

Вставляя найденное для x число въ формулу $y=2x$, найдемъ

$$y=2\times\frac{10}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}\cdot$$

295. Методъ Безу. Этотъ методъ по существу одинаковъ съ методомъ сравненія коэффиціентовъ или сложенія и вычитанія. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ. Помноживъ одно изъ данныхъ уравненій на произвольнаго множителя, складываютъ съ нимъ или вычитаютъ изъ него другое, и получаютъ такимъ образомъ уравненіе, содержащее оба неизвѣстныя и произвольный множитель. Произволомъ послѣдняго пользуются для исключенія одного изъ неизвѣстныхъ, и слѣд. для полученія одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Приложимъ этотъ методъ къ системѣ

$$6x+7y=46 \;\dots\dots\; (1)$$
$$5x+3y=27 \;\dots\dots\; (2).$$

Помножимъ первое ур. на произвольнаго множителя m и изъ полученнаго ур-нія вычтемъ второе (или, что тоже, придадимъ (2), помноженное на -1); получимъ

$$6mx-5x+7my-3y=46m-27, \quad \text{или}$$
$$(6m-5)x+(7m-3)y=46m-27.$$

Это ур., въ соединеніи съ однимъ изъ данныхъ, напр. съ (2), составляетъ, въ силу начала втораго, систему, тождественную съ данною. Такимъ образомъ вопросъ приводится къ рѣшенію ур-ній

$$(6m-5)x+(7m-3)y=46m-27 \;\dots\; (3)$$

и

$$5x+3y=27 \;\dots\dots\dots\; (4)$$

Произволомъ количества m воспользуемся для исключенія одного изъ неизвѣстныхъ, напр. y. Для этого опредѣлимъ m подъ условіемъ, чтобы коэффиціентъ при y обратился въ ноль, т. е. чтобы

$$7m-3=0 \;\dots\dots\; (5)$$

Но значеніе m, обращающее $7m-3$ въ ноль, есть корень ур-нія (5); его найдемъ, рѣшивъ это ур:

$$m=\frac{3}{7}\cdot$$

Подставивъ въ ур-ніе (3) $\frac{3}{7}$ вмѣсто m, получимъ ур. съ однимъ неизвѣстнымъ x, именно:

$$(6.\frac{3}{7}-5)x=46.\frac{3}{7}-27, \quad \text{откуда} \quad x=3.$$

Подставивъ найденную для x величину въ ур. (4), найдемъ

$$5.3+3y=27, \quad \text{откуда} \quad y=4.$$

Приложимъ способъ Безу къ рѣшенію *системы двухъ уравненій въ общемъ видѣ:*

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'.$$

Множимъ первое уравненіе на произвольнаго множителя m и вычитаемъ изъ него второе уравненіе; найдемъ

$$(am-a')x+(bm-b')y=cm-c'.$$

Для исключенія y положимъ $bm-b'=0$, откуда $m=\frac{b'}{b}$.

Вставивъ это значеніе m въ предыдущее уравненіе, получимъ:

$$\left(\frac{ab'}{b}-a'\right)x=\frac{cb'}{b}-c';$$

умноживъ обѣ части на b, находимъ:

$$(ab'-a'b)x=cb'-c'b, \quad \text{откуда} \quad x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}.$$

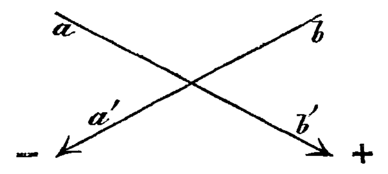
Для исключенія x, полагаемъ $am-a'=0$, откуда $m=\frac{a'}{a}$; вставивъ эту величину m въ то же самое ур., имѣемъ:

$$\left(\frac{ba'}{a}-b'\right)y=\frac{ca'}{a}-c';$$

умноживъ обѣ части на $-a$, получимъ:

$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c, \quad \text{откуда} \quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

Полученныя формулы для x и y имѣютъ одинаковаго знаменателя, который легко получить, не рѣшая ур-ній, слѣдующимъ искуственнымъ пріемомъ: выписываемъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ изъ перваго уравненія, и подъ ними пишемъ коэффиціенты втораго ур-нія:



затѣмъ перемножаемъ эти коэффиціенты на-крестъ, какъ указываютъ стрѣлки, причемъ въ произведеніи, взятомъ слѣва на право не измѣняемъ знака (это указывается знакомъ $+$), а въ произведеніи справа на лѣво перемѣняемъ знакъ на противный (это указано знакомъ минусъ). Такимъ образомъ составится выраженіе

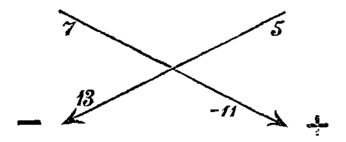
$$ab'-a'b,$$

представляющее общаго знаменателя корней. Изъ знаменателя легко составить числителей; для этого нужно только въ знаменателѣ коэффиціенты опредѣляемаго неизвѣстнаго замѣнить извѣстными членами изъ соотвѣтствующихъ ур-ній; т. е. для составленія числителя неизвѣстнаго x нужно вмѣсто a и a' подставить c и c', а для составленія числителя y, надо въ знаменателѣ буквы b и b' замѣнить соотвѣтственно буквами c и c'.

Такъ, если имѣемъ ур-нія

$$7x+5y=60$$
$$13x-11y=10,$$

то знаменатель рѣшеній найдемъ, составивъ табличку,



изъ которой имѣемъ: $7.(-11)-5\times 13$.

Подставивъ въ это выраженіе вмѣсто 7 и 13 соотвѣтственно 60 и 10, и вмѣсто 5 и —11 числа 60 и 10, найдемъ числителей: для x: $60.(-11)-5\times 10$, а для y: $7.10-60\times 13$. Итакъ:

$$x=\frac{60.(-11)-5.10}{7.(-11)-5.13}=\frac{-660-50}{-77-65}=\frac{-710}{-142}=5.$$

$$y=\frac{7.10-60.13}{7.(-11)-5.13}=\frac{70-780}{-142}=\frac{-710}{-142}=5.$$

296. Всѣ четыре метода рѣшенія ур-ній имѣютъ одну и туже цѣль: изъ двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными *исключить* одно изъ неизвѣстныхъ и получить такимъ образомъ одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, поэтому всѣ четыре методы суть *методы исключенія.*

Изъ всѣхъ четырехъ способовъ исключенія — *способъ уравниванія коэффиціентовъ* самый удобный и всего чаще употребляемый; онъ ведетъ къ болѣе симметричнымъ вычисленіямъ; но неудобенъ, когда коэффиціенты при неизвѣстныхъ выражаются большими числами или десятичными дробями. Въ послѣднемъ случаѣ удобнѣе примѣнять *способъ подстановленія*; этотъ же способъ удобопримѣнимъ и тогда, когда коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ равенъ единицѣ, такъ какъ въ этомъ случаѣ выраженіе неизвѣстнаго черезъ другое не имѣетъ знаменателя. Способъ сравненія неизвѣстныхъ имѣетъ то неудобство, что какъ и предыдущій способъ, вводитъ въ уравненія дроби; но при большомъ числѣ неизвѣстныхъ имѣетъ то преимущество, что дѣлаетъ рѣшеніе уравненій однообразнымъ. Наконецъ, способъ Безу имѣетъ скорѣе теоретическое, нежели практическое, значеніе.

297. Задачи.

Рѣшить уравненія:

1. $6x-y=34$
   $5x-4y=3.$

2. $7x-4y=13.$
   $3x+2y=13.$

3. $11x-13y=25$
   $8x+3y=68.$

4. $21x+12y=87$
   $35x-18y=69.$

5. $\frac{4x}{3}-\frac{2y}{5}=\frac{3x}{4}+\frac{19y}{40}$
   $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\frac{1}{4}.$

6. $\frac{x+2y}{5}-\frac{4x-3y}{4}=\frac{11}{30}$
   $\frac{5y-3x}{8}+\frac{7x-5y}{6}=\frac{37}{144}.$

7. $\frac{y-1}{2}+\frac{3-2y}{5}-\frac{x-8}{11}=\frac{138}{100}$
   $\frac{5x-1}{6}+\frac{4y-5x}{10}=\frac{3y-8x}{4}-\frac{29}{300}.$

8. $\frac{2x}{3}+\frac{y+2x}{2}=8-\frac{9y-10}{12}+\frac{3x+7}{4}$
   $\frac{y-3x}{6}=\frac{25}{6}-2x.$

9. $\dfrac{3x+4y+3}{10}-\dfrac{2x+7-y}{15}=5+\dfrac{y-8}{5}$

$\dfrac{9y+5x-8}{12}-\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{7x+6}{11}.$

10. $1{,}2345x+1{,}3579y=97{,}657$

$7{,}447x+5{,}225y=54{,}815.$

11. $\dfrac{x^2-1}{y^2-1}\cdot\dfrac{1+y}{x+x^2}\left(1-\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{2}{3(1+x)}$

$\dfrac{3-3x}{6-2y}\cdot\dfrac{9-y^2}{1-x^2}=\dfrac{3}{2}.$

12. $(a-b)x+(a+b)y=c$

$(a^2-b^2)(x+y)=d.$

13. $\dfrac{2ax}{3}-\dfrac{5by}{6}=\dfrac{ab}{2}$

$\dfrac{4bx}{5}-2ay=\dfrac{6(b^2-a^2)}{5}.$

14. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1-\dfrac{x}{c}$

$\dfrac{y}{a}+\dfrac{x}{b}=1+\dfrac{y}{c}.$

15. $ax+by=c^2$

$\dfrac{a}{b+y}=\dfrac{b}{a+x}.$

16. $ax-by=a^2$

$(x+a)(y+b)=(x-b)(y+a)+ab.$

17. $axy=c(bx+ay)$

$bxy=c(ax-by).$

18. $(a^2-b^2)x+b(a+b+c)y=ab(a+2b)+\dfrac{ab^2c}{a+b}$

$(a^2-b^2)(3x+5y)=8a^2b-2ab^2.$

19. $x+y=\dfrac{2bc(a^3-2a^2b+3a^2c)}{abc-2b^2c+3bc^2}$

$a(x-a^2)+b(y+b^2)=ab(a+b)+(a-b)^2.$

20. $8y-\dfrac{4(4+15y)}{3x-1}=\dfrac{16xy-107}{2x+5}$

$2+6x+9y=\dfrac{27y^2-12x^2+38}{3y-2x+1}.$

21. $3+\dfrac{6-8y}{3-2y}=\dfrac{10-7x}{4-x}$

$\dfrac{5x-4y+9}{4x-5y}-\dfrac{3x-2y-1}{3y-2x}=\dfrac{22(x+y)^2-90xy+23y+x+1}{(4x-5y)(2x-3y)}.$

22. $\dfrac{21}{3x+4y-17}+\dfrac{105}{8x-7y+22}=4.$

$\dfrac{3x+4y-17}{3}=\dfrac{8x-7y+2}{5}+4.$

23. $\dfrac{1}{1-x+y}-\dfrac{1}{x+y-1}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{1-x+y}-\dfrac{1}{1-x-y}}=\dfrac{3}{4}.$

24. $\dfrac{x}{y}=\dfrac{a-b+\dfrac{b^2}{a-b}\left(1-\dfrac{b(a+b)}{a^2+ab+b^2}\right)}{\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^3}{a^2+ab+b^2}}$; $x-y=2b^5.$

25. $(a^2-ab+b^2)x+(a^2+ab+b^2)y=a^3(a+b)-b^3(a-b)$

$\dfrac{(a+b)x}{b}-\dfrac{(a-b)y}{a}=4ab.$

26. $\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{a^2+ab+b^2}=ab$

$\frac{x}{a^2+b^2}+\frac{y}{a^2-ab+b^2}=a(2a+b).$

27. $(a+b)x+(a^2+b^2)y=a^3+b^3$

$(a-b)x+(a^2-b^2)y=a^3-b^3.$

28. $\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}}\cdot ab+\frac{\frac{x}{b}-\frac{x}{a}}{\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}}=\frac{(a+b)(a^4-b^4)}{2ab^2}$

$bx+ay=2a^2b.$

29. $(ap^m+bq^m)x+(ap^{m+1}+bq^{m+1})y=ap^{m+2}+bq^{m+2}$

$(ap^n+bq^n)x+(ap^{n+1}+bq^{n+1})y=ap^{n+2}+bq^{n+2}.$

30. $a(x+y)+b(y+2c)=bx+2am$

$a(x-y)+b(x-m)=c(2a+b+1)+y-m.$

ГЛАВА XX.

Рѣшеніе системы трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

Опредѣленія. — Начала и методы. — Задачи.

298. Опредѣленія. Всякое ур. первой степени съ тремя неизвѣстными можно привести къ виду

$$ax+by+cz=d,$$

гдѣ a, b, c и d суть нѣкоторыя цѣлыя количества. Если x, y и z должны удовлетворять только одному уравненію, то очевидно, что такое ур. будетъ неопредѣленно, потому-что двумъ неизвѣстнымъ можно давать совершенно произвольныя значенія. Тоже самое будетъ и въ томъ случаѣ, когда три неизвѣстныя должны удовлетворять двумъ уравненіямъ. Такъ, система

$$ax+by+cz=d$$
$$a'x+b'y+c'z=d'$$

неопредѣленна, потому-что одному изъ неизвѣстныхъ можно давать произвольныя значенія: тогда система послужитъ для опредѣленія остальныхъ двухъ неизвѣстныхъ.

Но если неизвѣстныя должны удовлетворять тремъ уравненіямъ

$$ax+by+cz=d$$
$$a'x+b'y+c'z=d'$$
$$a''x+b''y+c''z=d'',$$

то существуетъ, вообще, одна система рѣшеній, удовлетворяющихъ этимъ ур-мъ.

Двѣ системы называются тождественными, если они удовлетворяются одними и тѣми же рѣшеніями.

299. Начало I. *Система трехъ уравненій*

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

тождественна съ системою

$$A = 0, \qquad pA + qB = 0, \qquad p'A + q'C = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

если количества p, q, p', q' конечны и отличны отъ нуля.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія системѣ уравненій (1), обращаютъ каждое изъ выраженій A, B и C въ ноль; стало быть эти значенія обратятъ въ ноль и произведенія pA, qB, $p'A$ и $q'C$, ибо p, q, p' и q' конечны; слѣдовательно, величины неизвѣстныхъ, удовлетворяющія системѣ (1), удовлетворяютъ и системѣ (2).

2) значенія неизвѣстныхъ x, y, z, удовлетворяющія уравненіямъ (2), обращая въ ноль выраженіе A, обратятъ въ ноль и pA и $p'A$, такъ какъ p и p' конечны; но эти значенія обращаютъ въ ноль суммы $pA + qB$ и $p'A + q'C$, слѣд. они обращаютъ въ ноль и qB и $q'C$; но q и q' отличны отъ нуля, слѣд. B и C обращаются въ нули при сказанныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ. Итакъ, корни системы (2) удовлетворяютъ уравненіямъ системы (1).

Примѣчаніе. Можно выбрать p, p', q и q' такъ, чтобы уравненія

$$pA + qB = 0 \qquad \text{и} \qquad p'A + q'C = 0$$

содержали только два изъ трехъ неизвѣстныхъ; т. е. *можно исключить одно изъ трехъ неизвѣстныхъ изъ одного изъ данныхъ ур-ній и каждаго изъ двухъ остальныхъ.*

На этомъ началѣ основаны способы исключенія: чрезъ уравниваніе коэффиціентовъ, чрезъ подстановленіе и чрезъ сравненіе величинъ неизвѣстныхъ.

300. Способъ уравниванія коэффиціентовъ. Пусть требуется рѣшить ур-нія

$$3x - 2y + 5z = 13 \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$5x + 4y - 3z = 25 \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$11x - 6y - 8z = 24 \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

удобнѣе исключить изъ этихъ уравненій y.

Для исключенія y изъ (1) и (2), множимъ первое на 2 и складываемъ со (2), помноженнымъ на $+1$; получимъ

$$11x + 7z = 51 \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Подобнымъ же образомъ, для исключенія y изъ (1) и (3), множимъ (1) на -3, (3) на $+1$ и складываемъ; находимъ

$$2x - 23z = -15 \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

На основаніи начала I, система уравненій (1), (4) и (5) тождественна съ данной; и какъ уравненія (4) и (5) содержатъ только два неизвѣстныхъ x и z; то и опредѣляемъ изъ нихъ эти неизвѣстныя. Для этого множимъ (4) на 2, (5) на -11 и складываемъ; получаемъ

$$267z = 267,$$

откуда

$$z = 1.$$

Подставивъ вмѣсто z найденную величину въ ур. (5), имѣемъ

$$2x - 23 = -15, \quad \text{откуда} \quad 2x = 23 - 15 = 8,$$

и слѣд.

$$x = 4.$$

Подставивъ въ ур. (1) найденныя для x и z величины, имѣемъ

$$12 - 2y + 5 = 13,$$

откуда

$$y = 2.$$

Итакъ, искомыя рѣшенія суть:

$$x = 4; \quad y = 2; \quad z = 1.$$

Легко убѣдиться прямою подстановкою ихъ въ ур-нія, что онп дѣйствительно удовлетворяютъ даннымъ уравненіямъ.

301. Способъ подстановленія. Пусть требуется рѣшить уравненія

$$ax + by + cz = d \quad \ldots . (1)$$
$$a'x + b'y + c'z = d' \quad \ldots . (2)$$
$$a''x + b''y + c''z = d'' \quad \ldots (3).$$

Принимая на-время y и z за извѣстныя, рѣшаемъ ур. (1) относительно x:

$$x = \frac{d - by - cz}{a} \quad \ldots . (4).$$

Подставивъ вмѣсто x это выраженіе въ уравненія (2) и (3), получаемъ:

$$\frac{a'(d - by - cz)}{a} + b'y + c'z = d' \quad \ldots . (5)$$
$$\frac{a''(d - by - cz)}{a} + b''y + c''z = d'' \quad \ldots (6).$$

Рѣшаемъ уравненія (5) и (6) относительно y и z. Освободивъ ихъ отъ дробей и отъ скобокъ, имѣемъ:

$$a'd - a'by - a'cz + ab'y + ac'z = ad'$$
$$a''d - a''by - a''cz + ab''y + ac''z = ad'',$$

или

$$(ab' - a'b)y + (ac' - a'c)z = ad' - a'd$$
$$(ab'' - a''b)y + (ac'' - a''c)z = ad'' - a''d.$$

Примѣняя формулы § 291, 6, имѣемъ

$$y = \frac{(ad' - a'd)(ac'' - a''c) - (ad'' - a''d)(ac' - a'c)}{(ab' - a'b)(ac'' - a''c) - (ab'' - a''b)(ac' - a'c)}$$
$$z = \frac{(ab' - a'b)(ad'' - a''d) - (ab'' - a''b)(ad' - a'd)}{(ab' - a'b)(ac'' - a''c) - (ab'' - a''b)(ac' - a'c)}.$$

Раскрывая скобки въ знаменателѣ и въ обоихъ числителяхъ, получаемъ: для знаменателя выраженіе:

$$a^2b'c'' - aa'bc'' - aa''b'c + a'a''bc - a^2b''c' + aa''bc' + aa'b''c - a'a''bc;$$

по приведенiи и по вынесенiи за скобки общаго множителя a, этотъ многочленъ принимаетъ видъ

$$a(ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' + a'b''c) \;.\;.\;.\;. (7).$$

Для числителя формулы y находимъ

$$a^2c''d' - aa'c''d - aa''cd' + a'a''cd - a^2c'd'' + aa''c'd + aa'cd'' - a'a''cd,$$

или, вынеся за скобки a:

$$a(ac''d' - a'c''d - a''cd' - ac'd'' + a''c'd + a'cd'') \;.\;.\;.\;. (8).$$

Раскрывъ скобки въ числителѣ формулы z, получимъ:

$$a^2b'd'' - aa'bd'' - aa''b'd + a'a''bd - a^2b''d' + aa''bd' + aa'b''d - a'a''bd,$$

или, по приведенiи и по вынесенiи за скобки a:

$$a(ab'd'' - a'bd'' - a''b'd - ab''d' + a''bd' + a'b''d) \;.\;.\;.\;. (9).$$

Внося выраженiя (7), (8) и (9) въ формулы для y и z, и сокращая на a, найдемъ:

$$y = \frac{ac''d' - a'c''d - a''cd' - ac'd'' + a''c'd + a'cd''}{ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' + a'b''c}$$

$$z = \frac{ab'd'' - a'bd'' - a''b'd - ab''d' + a''bd' + a'b''d}{ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' + a'b''c}.$$

Подставляя найденныя для y и z выраженiя въ уравненiе (4), находимъ

$$x = \frac{d - \dfrac{b(ac''d'-a'c''d-a''cd'-ac'd''+a''c'd+a'cd'')}{ab'c''-a'bc''-a''b'c-ab''c'+a''bc'+a'b''c} - \dfrac{c(ab'd''-a'bd''-a''b'd-ab''d'+a''bd'+a'b''d)}{ab'c''-a'bc''-a''b'c-ab''c'+a''bc'+a'b''c}}{a}$$

$$= \frac{\begin{array}{c} ab'c''d-a'bc''d-a''b'cd-ab''c'd+a''bc'd+a'b''cd-abc''d'+a'bc''d+a''bcd' \\ +abc'd''-a''bc'd-a'bcd''-ab'cd''+a'bcd''+a''b'cd+ab''cd'-a''bcd'-a'b''cd \end{array}}{a(ab'c''-a'bc''-a''b'c-ab''c'+a''bc'+a'b''c)}.$$

Сдѣлавъ приведенiе и сокративъ на a, получимъ

$$x = \frac{b'c''d - b''c'd - bc''d' + bc'd'' - b'cd'' + b''cd'}{ab'c'' - a'bc'' - a''b'c - ab''c' + a''bc' + a'b''c}.$$

302. Докажемъ теперь, что уравненiя (4), (5) и (6) тождественны даннымъ.

Уравненiе (4) получено изъ (1) перенесенiемъ членовъ by и cz во вторую часть и дѣленiемъ обѣихъ частей на a, которое предполагается отличнымъ отъ нуля; сл. это уравненiе тождественно съ (1).

Помножая уравненiе

$$\frac{d - by - cz}{a} = x$$

на a' и складывая со (2), найдемъ, по упрощенiи:

$$\frac{a'}{a}(d - by - cz) + b'y + c'z = d'.$$

Умножая то же самое ур. на a'' и складывая съ (3), по упрощенiи найдемъ

$$\frac{a''}{a}(d - by - cz) + b''y + c''z = d''.$$

А, въ силу начала I, эти три ур-нiя тождественны съ данными: требуемое доказано.

303. Способъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ.

Пусть требуется рѣшить уравненія:

$$5x - 2y + 3z = 35 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$
$$8x + 7y - 5z = 67 \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$
$$9x - 3y + 2z = 58 \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Опредѣляя изъ каждаго ур-нія z, причемъ x и y на-время считаемъ извѣстными, найдемъ

$$z = \frac{35 - 5x + 2y}{3} \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$
$$z = \frac{-67 + 8x + 7y}{5} \; . \; . \; . \; . \; (5)$$
$$z = \frac{58 - 9x + 3y}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Приравнивая первое выраженіе z поочередно—второму и третьему, получаемъ:

$$\frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{-67 + 8x + 7y}{5} \; . \; . \; (7); \quad \frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{58 - 9x + 3y}{2} \; . \; . \; (8)$$

уравненія съ двумя неизвѣстными x и y.

Докажемъ, что система уравненій: (4), (7) и (8) тождественна данной. Съ этою цѣлью перенесемъ въ данныхъ уравненіяхъ всѣ члены, за исключеніемъ содержащихъ z, во-вторую часть; такимъ образомъ найдемъ:

$$3z = 35 - 5x + 2y$$
$$-5z = 67 - 8x - 7y$$
$$2z = 58 - 9x + 3y.$$

Помножая первое изъ этихъ ур-ній на $\frac{1}{3}$, второе на $\frac{1}{5}$, и третье на $-\frac{1}{2}$, и сложивъ первое сначала со вторымъ, а потомъ съ третьимъ, имѣемъ:

$$0 = \frac{35 - 5x + 2y}{3} + \frac{67 - 8x - 7y}{5}$$
$$0 = \frac{35 - 5x + 2y}{3} - \frac{58 - 9x + 3y}{2}$$

или, по перенесеніи:

$$\frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{-67 + 8x + 7y}{5} \quad \text{и} \quad \frac{35 - 5x + 2y}{3} = \frac{58 - 9x + 3y}{2}.$$

Эти два ур-нія, вмѣстѣ съ (4), на осн. начала I, составляютъ систему, тождественную съ данной. Освобождая ур-нія (7) и (8) отъ дробей, перенеся извѣстные члены въ одну часть, а неизвѣстные въ другую, и сдѣлавъ приведеніе, дадимъ имъ видъ

$$-49x - 11y = -376; \; 17x - 5y = 104.$$

Рѣшивъ эти ур-нія, найдемъ: $x = 7$, а $y = 3$. Подставивъ эти числа въ ур. (4), найдемъ: $z = 2$.

304. Начало II.—*Система уравненій*

$$A=0,\ B=0,\ C=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

тождественна съ системою

$$A=0$$
$$B=0$$
$$mA+nB+pC=0.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

гдѣ m, n и p—*количества конечныя, отличныя отъ нуля.*

Въ самомъ дѣлѣ: 1) Всякое рѣшеніе системы (1), обращая въ ноль выраженія A, B и C, обратитъ въ ноль и выраженія mA, nB и pC, такъ какъ множители m, n и p конечны; слѣд. рѣшеніе первой системы удовлетворяетъ второй.

2) Обратно: всякое рѣшеніе второй системы, обращая A и B въ нули, удовлетворяетъ первымъ двумъ уравненіямъ системы (1). Затѣмъ при $A=0$ и $B=0$, произведенія mA и Bn также обращаются въ нули, потому-что m и n—конечны; но какъ разсматриваемое рѣшеніе обращаетъ въ ноль выраженіе $mA+nB+pC$, котораго два первые члена—нули; то и pC должно обращаться въ ноль; но p конечно, поэтому C должно обращаться въ ноль; т. е. рѣшеніе системы (2) удовлетворяетъ и третьему ур-нію системы (1).

На этомъ началѣ основанъ способъ Безу.

305. Способъ Безу. — Способъ этотъ состоитъ въ употребленіи множителей, которые затѣмъ опредѣляютъ подъ условіемъ исключенія двухъ какихъ-нибудь изъ трехъ неизвѣстныхъ. Приложимъ этотъ способъ къ общей системѣ:

$$ax+by+cz=d\ .\ .\ .\ .\ (1)$$
$$a'x+b'y+c'z=d'\ .\ .\ .\ .\ (2)$$
$$a''x+b''y+c''z=d''\ .\ .\ .\ .\ (3).$$

Помноживъ ур. (1) на произвольный множитель λ, ур. (2) на μ, а третье на $+1$, и сложимъ ихъ почленно; получимъ ур.

$$(\lambda a+\mu a'+a'')x+(\lambda b+\mu b'+b'')y+(\lambda c+\mu c'+c'')z=\lambda d+\mu d'+d''..(4).$$

Это ур., въ силу начала II § 304, можетъ замѣнить въ данной системѣ одно изъ трехъ уравненій.

Располагаемъ произвольными множителями λ и μ такъ, чтобы исключить изъ ур-нія (4) неизвѣстныя y и z. Для этого, очевидно, надо, чтобы коэффиціенты при y и z обращались въ нули, т. е. надо положить:

$$\begin{matrix}\lambda b+\mu b'+b''=0\\ \lambda c+\mu c'+c''=0\end{matrix}\quad \text{или}\quad \left.\begin{matrix}\lambda b+\mu b'=-b''\\ \lambda c+\mu c'=-c''\end{matrix}\right\}(5).$$

Значенія λ и μ, удовлетворяющія ур-мъ (5) найдемъ, рѣшивъ эти уравненія относительно λ и μ; примѣняя правило § 295, получимъ:

$$\lambda=\frac{b'c''-c'b''}{bc'-cb'},\quad \mu=\frac{cb''-bc''}{bc'-cb'}.$$

Подставляя эти значенія λ и μ въ ур. (4), мы исключимъ этимъ самымъ y и z, и получимъ ур-ніе съ однимъ неизвѣстнымъ x:

$$\left(\frac{b'c''-c'b''}{bc'-cb'}\cdot a+\frac{cb''-bc''}{bc'-cb'}\cdot a'+a''\right)\cdot x=\frac{b'c''-c'b''}{bc'-cb'}\cdot d+\frac{cb''-bc''}{bc'-cb'}\cdot d'+d'',$$

откуда

$$x=\frac{(b'c''-c'b'')\,d+(cb''-bc'')\,d'+(bc'-cb')\,d''}{(b'c''-c'b'')\,a+(cb''-bc'')\,a'+(bc'-cb')\,a''},$$

или, по раскрытіи скобокъ:

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

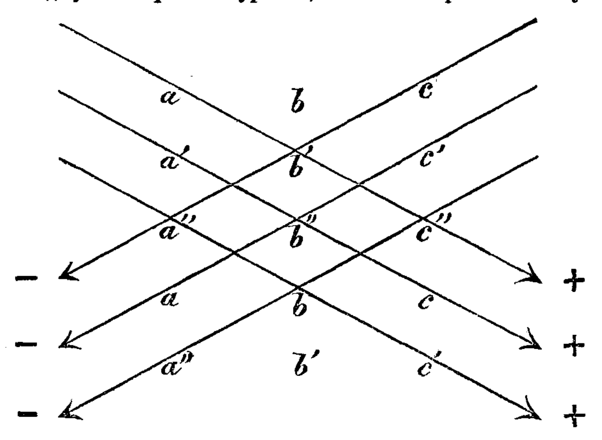
Приравнивая въ ур-ніи (4) коэффиціенты при x и z нулю, найдемъ y; а опредѣливъ для λ и μ такія значенія, при которыхъ обращаются въ ноль коэффиціенты при x и y, найдемъ z:

$$y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

306. Разсмотрѣніе общихъ формулъ предыдущаго параграфа приводитъ къ къ слѣдующему правилу механическаго рѣшенія трехъ ур-ній съ 3 неизвѣстными (такъ называемое правило *Саррюса*).

Для составленія общаго знаменателя неизвѣстныхъ, выписываютъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ изъ всѣхъ трехъ уравненій, и подъ ними еще разъ коэффиціенты изъ двухъ первыхъ ур-ній; такимъ образомъ получается табличка:



Затѣмъ перемножаютъ выписанныя буквы наклонно: сначала слѣва на право, не измѣняя знаковъ этихъ произведеній (что указывается знакомъ +), а потомъ справа налѣво, перемѣнивъ при каждомъ произведеніи знакъ (что указывается знакомъ —). Такимъ образомъ получается общій знаменатель искомыхъ рѣшеній:

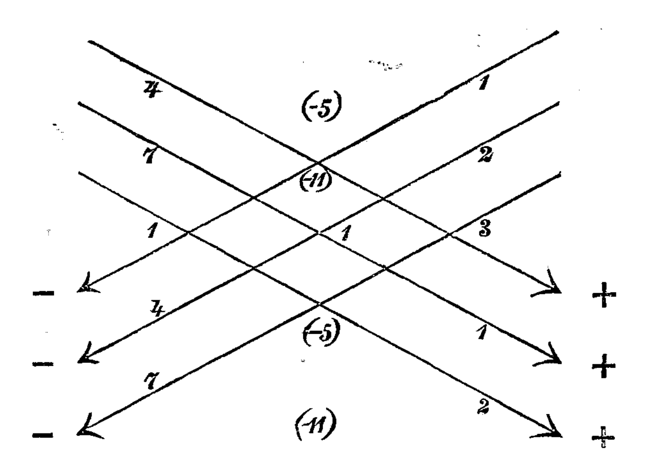
$$ab'c''+a'b''c+a''bc'-cb'a''-c'b''a-c''ba'.$$

Для полученія числителей: 1) неизвѣстнаго x—нужно въ знаменатель вмѣсто коэффиціентовъ этого неизвѣстнаго т. е. вмѣсто a, a' и a'' подставить извѣстные члены изъ соотвѣтствующихъ ур-ній, т. е. d, d' и d''; 2) неизвѣстнаго y—вмѣсто его коэффиціентовъ: b, b' и b'' подставить d, d' и d''; 3) наконецъ, неизвѣстнаго z—вмѣсто c, c' и c'' подставить d, d' и d''.

Примѣръ. Примѣнимъ этотъ механическій пріемъ къ рѣшенію системы:

$$4x-5y+z=6$$
$$7x-11y+2z=9$$
$$x+y+3z=12.$$

Общій знаменатель D, составляемъ указаннымъ способомъ при помощи таблички:



найдемъ:

$$D = 4.(-11).3 + 7.1.1 + 1.(-5).2 - 1.(-11).1 - 2.1.4 - 3.(-5).7$$
$$= -132 + 7 - 10 + 11 - 8 + 105 = -27.$$

Назвавъ числителей неизвѣстныхъ x, y и z, соотвѣственно буквами N_x, N_x и N_z, найдемъ:

$$N_x = 6(-11).3 + 9.1.1. + 12.(-5).2 - 12.(-11).1 - 2.1.6 - 3.(-5).9$$
$$= -198 + 9 - 120 + 132 - 12 + 135 = -54.$$
$$N_y = 4.(9).3 + 7.12.1 + 1.6.2 - 1.9.1 - 2.12.4 - 3.6.7$$
$$= 108 + 84 + 12 - 9 - 96 - 126 = -27.$$
$$N_z = 4(-11).12 + 7.1.6 + 1.(-5).9 - 1.(-11).6 - 9.1.4 - 12.(-5).7$$
$$= -528 + 42 - 45 + 66 - 36 + 420 = -81.$$

Итакъ:

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{-54}{-27} = 2; \quad y = \frac{N_y}{D} = \frac{-27}{-27} = 1; \quad z = \frac{N_z}{D} = \frac{-81}{-27} = 3.$$

307. Задачи.

Рѣшить уравненія

1. $3x - 2y + 4z = 9$
   $5x - 4y - 6z = 1$
   $x + y - 3z = 1$

2. $5x - 3y + 2z = 19$
   $4x + 5y - 3z = 31$
   $3x + 7y - 4z = 31$

3. $5x - 2y + 3z = 12$
   $4x + 3y + 7z = 19$
   $7x - 4y + 8z = 25$

4. $23x - 35y + 52z = 118$
   $24x + 75y - 42z = 53$
   $-51x + 67y + 32z = 183$

5. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58.$
   $\frac{5x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 76.$
   $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} + \frac{7z}{40} = \frac{147}{5}$

6. $13x - 3y + 7z = 58$
   $15x + 4y - 3z = 97$
   $3x + 8z = 31.$

7. $1,5x - 2,5y + 2z = 2,5$
   $3,5x + y - 1,5z = 1.$
   $2x + 1,5y - 0,5z = 3,5.$

8. $\frac{5x - 7y + 2}{12} - \frac{8x + 3z - 4}{21} = \frac{11y - 5z - 4x + 18}{14}$
   $\frac{11x - 5z + 12}{14} - \frac{3y + 7z - 2x}{18} = \frac{8z - 3x + 82}{21}$
   $3x - y - 2z = 16.$

9. $$\frac{3x-7y+5}{18}+\frac{7-4y-11z}{9}=\frac{5x-7z}{8}-\frac{18x+27y+11z-30{,}5}{36}$$

$$\frac{4x-9y+11}{22}-\frac{5y-3x-9}{4}=\frac{6y+5z}{11}+\frac{7x-17y-3z+19\frac{6}{11}}{8}$$

$$\frac{5y+6z-17}{54}-\frac{2y+7z+5}{9}=\frac{x+9y}{27}-\frac{2x+7y+11z+18\frac{1}{3}}{18}.$$

10. $y+\frac{x}{2}=41.$

$x+\frac{z}{4}=\frac{41}{2}$

$y+\frac{z}{3}=34.$

11. $x+y+z=0$
$(a+b)x-(a-c)y+(b+c)z=0$
$abx-acy+bcz=0.$

12. $bx+ay=0$
$cy+bz=0$
$cx+az=1.$

13. $ax+by+cz=m^2$
$(a+h)x+(b+h)y+(c+h)z=n^2$
$(a+2h)x+(b+2h)y+(c+2h)z=p^2.$

14. $x-ay+a^2z=a^3$
$x-by+b^2z=b^3$
$x-cy+c^2z=c^3.$

15. $x+y+z=a+b+c.$
$bx+cy+az=cx+ay+bz=$
$=a^2+b^2+c^2.$

16. $ax+by+cz=0$
$a^2x+b^2y+c^2z=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0.$

17. $ax+by+cz=(b+c)^2-a^2$
$bx+cy+az=(c+a)^2-b^2$
$cx+ay+bz=(a+b)^2-c^2.$

18. $ax+by+cz=3$

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=\frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{abc}$$

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}.$$

19. $x+y+z=0$
$(b+c-a)x+(c+a-b)y+(a+b-c)z=0$
$a^2x+b^2y+c^2z=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$

20. $x+y+z=0$

$$\frac{a^2x}{a-d}+\frac{b^2y}{b-d}+\frac{c^2z}{c-d}=0$$

$$\frac{ax}{a-d}+\frac{by}{b-d}+\frac{cz}{c-d}=d(a-b)(b-c)(c-a).$$

ГЛАВА XXI.

Рѣшеніе системы уравненій первой степени съ какимъ угодно числомъ неизвѣстныхъ.

Общій методъ. — Методъ Безу. — Случаи упрощенія; искуственные пріемы. — О системахъ уравненій, въ которыхъ число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій: случаи несовмѣстности (условныя уравненія) и неопредѣленности. — Задачи.

Общій методъ.

308. Начало. — *Пусть дана система p уравненій первой степени съ p неизвѣстными:*

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ D=0, \ldots \ldots K=0,\ L=0 \ldots (1)$$

если m_1, n_1, m_2, n_2, ... , m_{p-1}, n_{p-1} *суть количества конечныя и отличныя отъ нуля, то система p уравненій*

$$\left.\begin{array}{r} A=0, \\ m_1A+n_1B=0, \\ m_2A+n_2C=0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ m_{p-1}A+n_{p-1}L=0 \end{array}\right\} (2)$$

тождественна данной.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) рѣшенія системы (1), какъ обращающія въ нули выраженія A, B, C, . . . , K, L, обращаютъ въ нули и произведенія m_1A, n_1B, m_2A, n_2C, ... , $m_{p-1}A$, $n_{p-1}L$, такъ какъ количества m_1, n_1, . . . конечны; слѣд. эти рѣшенія удовлетворяютъ системѣ (2).

2) Рѣшенія системы (2), обращая въ нуль A и (m_1A+n_1B), обращаютъ въ ноль и B, такъ какъ m_1 конечно, и n_1 отлично отъ нуля; такимъ же образомъ они обратятъ въ нуль и C, D, . . . L; слѣд. эти рѣшенія удовлетворяютъ системѣ (1).

309. Методъ. — Количества m_1, n_1, ... , m_{p-1}, n_{p-1} выбираютъ такимъ образомъ, что исключить одно и тоже неизвѣстное изъ $(p-1)$ уравненій, напр. изъ послѣднихъ; такимъ образомъ данная система (1) замѣнится новою:

$$A=0,\ B_1=0,\ C_1=0,\ D_1=0, \ldots\ldots,\ K_1=0,\ L_1=0 \ldots (2)$$

тождественною съ (1); но въ ней ур. $A=0$ содержитъ всѣ неизвѣстныя, а остальныя $p-1$ уравненій содержатъ только $p-1$ одинаковыхъ неизвѣстныхъ.

Подобнымъ же образомъ систему (2) замѣняютъ системою

$$A=0,\ B_1=0,\ C_2=0,\ D_2=0, \ldots\ldots,\ K_2=0,\ L_2=0 \ldots (2)$$

тождественною со (2), а слѣд. и съ (1); но въ этой новой системѣ уравненіе $A=0$ содержитъ всѣ неизвѣстныя, $B_1=0$ только $p-1$ неизвѣстныхъ, а остальныя уравненія содержатъ однѣ и тѣ-же неизвѣстныя въ числѣ $p-2$.

Продолжая такимъ же образомъ, достигнемъ наконецъ того, что данная система будетъ замѣнена новою, ей тождественною системою

$$A=0,\ B_1=0,\ C_2=0,\ D_3=0,\ \ldots\ldots,\ H_{p-3}=0,\ K_{p-2}=0,\ L_{p-1}=0,$$

въ которой уравненіе $L_{p-1}=0$ содержитъ только одно неизвѣстное, $K_{p-2}=0$ содержитъ это-же самое неизвѣстное и еще одно, $H_{p-3}=0$ содержитъ эти два неизвѣстныя и новое, и т. д., наконецъ ур. $A=0$ содержитъ всѣ неизвѣстныя.

Рѣшивъ ур. $L_{p-1}=0$, опредѣлимъ то неизвѣстное, которое въ немъ содержится. Внеся его величину въ ур. K_{p-2}, найдемъ изъ него еще одно неизвѣстное. Внеся величины этихъ двухъ неизвѣстныхъ въ ур. $H_{p-3}=0$, найдемъ третье неизвѣстное, и т. д. всѣ неизвѣстныя будутъ послѣдовательно найдены.

Примѣръ. — Рѣшить уравненія

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & 3x-4y+3z+3v-6u=11 \\
2) & 3x-5y+2z-4u=11 \\
3) & 10y-3z-2v+3u=2 \\
4) & -2x+5z+2v+4u=3 \\
5) & 4x-2y-3v+6u=6
\end{array}\right\}\ \text{I.}$$

Исключаемъ изъ данныхъ уравненій неизвѣстное x; для этого комбинируемъ ур. (1) съ каждымъ изъ остальныхъ, за исключеніемъ (3), которое уже не содержитъ x. Вычтя (2) изъ (1), находимъ:

$$y+z+3v-2u=0.$$

Помноживъ (1) на 2, а (4) на 3, и сложивъ ихъ, имѣемъ

$$-8y+21z+12v=31.$$

Наконецъ, умноживъ (1) на 4, а (5) на -3, и сложивъ, получимъ:

$$-10y+12z-42u+21v=26.$$

Такимъ образомъ, на основаніи общаго начала, замѣняемъ данную систему ей тождественною:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & 3x-4y+3z+3v-6u=11 \\
2) & y+z+3v-2u=0 \\
3) & -8y+21z+12v=31 \\
4) & -10y+12z+21v-42u=26 \\
5) & 10y-3z-2v+3u=2
\end{array}\right\}\ \text{II.}$$

Исключаемъ теперь y изъ (2) уравненія системы II и каждаго за нимъ слѣдующаго; для этого множимъ ур. (2) на 8 и складываемъ съ (3); затѣмъ множимъ (2) на 10 и складываемъ съ (4); наконецъ, помноживъ (2) на 10, вычитаемъ изъ него (5). Такимъ образомъ найдемъ систему III, тождественную II, а слѣдовательно и предложенной:

$$\left.\begin{array}{r}
3x-4y+3z+3v-6u=11 \\
y+z+3v-2u=0 \\
29z+36v-16u=31 \\
22z+51v-62u=26 \\
13z+32v-23u=-2
\end{array}\right\}\ \text{III.}$$

Исключая z изъ трехъ послѣднихъ уравненій, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} 3x-4y+3z+3v-6u&=11\\ y+z+3v-2u&=0\\ 13z+32v-23u&=-2\\ -460v+459u&=461\\ 41v+300u&=-382 \end{aligned}\right\}\ \text{IV}.$$

систему, тождественную данной.

Исключая наконецъ u изъ послѣднихъ двухъ уравненій системы IV, находимъ тождественную ей систему;

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad 3x-4y+3z+3v-6u=11\\ &2)\quad y+z+3v-2u=0\\ &3)\quad 13z+32v-23u=-2\\ &4)\quad +41v+300u=-382\\ &5)\quad 156819v=-313638 \end{aligned}\right\}\ \text{V}.$$

Послѣднее ур. этой системы прямо даетъ: $v=-2$. Подставляя вмѣсто v число -2 въ ур. (4), находимъ: $u=-1$. Подставляя найденныя для u и v величины въ ур. (3), находимъ: $z=3$. Наконецъ, изъ втораго и перваго ур. получаемъ: $y=1$ и $x=2$.

Методъ Безу.

310. Начало. — *Если* α, β, γ, ... , λ *суть количества конечныя и отличныя отъ нуля, то уравненіе*

$$\alpha A+\beta B+\gamma C+\ldots+\lambda L=0$$

можетъ замѣнить одно изъ n уравненій системы

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,\ \ldots\ldots,\ L=0,$$

т. е. системы

$$\left.\begin{aligned} A&=0\\ B&=0\\ &\cdot\\ &\cdot\\ &\cdot\\ &\cdot\\ L&=0 \end{aligned}\right\}\ \text{I}\quad и\quad \left.\begin{aligned} \alpha A+\beta B+\gamma C+\ldots+\lambda L&=0\\ B&=0\\ C&=0\\ &\cdot\\ &\cdot\\ &\cdot\\ L&=0 \end{aligned}\right\}\ \text{II}$$

тождественны.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) всякое рѣшеніе системы I удовлетворяетъ уравненіямъ системы II, такъ какъ B, C, . . . , L, а также и сумма $\alpha A+\beta B+\ldots+\lambda L$ обращаются въ нули; 2) обратно, всякое рѣшеніе системы II, обращая въ нуль выраженія B, C, . . . , L, удовлетворяетъ всѣмъ уравненіямъ системы I, кромѣ ур-нія $A=0$; а обращая въ нуль, вмѣстѣ съ выраженіями B, C, . . , L, также и выраженіе $\alpha A+\beta B+\gamma C+\ldots+\lambda L$, приводитъ первое ур. системы II къ виду $\alpha A=0$, откуда и $A=0$, ибо α отлично отъ нуля.

311. Примѣненіе метода Безу состоитъ въ выборѣ неопредѣленныхъ множителей такъ, чтобы изъ ур-нія $\alpha A+\beta B+\ldots+\lambda L=0$ исключить всѣ неизвѣстныя, за исключеніемъ одного; а это всегда возможно, потому-что приравнивая нулю коэффиціенты этихъ $n-1$ неизвѣстныхъ, получимъ $n-1$ уравненій, которыя умѣемъ рѣшать.

Примѣръ. — Рѣшить систему уравненій:

$$x+2y+3z+4u=27 \qquad (1)$$
$$3x+5y+7z+u=48 \qquad (2)$$
$$5x+8y+10z-2u=65 \qquad (3)$$
$$7x+6y+5z+4u=53 \qquad (4).$$

Помноживъ первое ур. на m, второе на n, третье на p, четвертое на 1 и сложивъ ихъ, найдемъ:

$$(m+3n+5p+7)x+(2m+5n+8p+6)y+(3m+7n+10p+5)z+(4m+n-2p+4)u$$
$$=27m+48n+65p+53 \ldots\ldots (5).$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при x, y и z, находимъ первую вспомогательную систему уравненій:

$$m+3n+5p=-7$$
$$2m+5n+8p=-6$$
$$3m+7n+10p=-5.$$

Рѣшивъ эту систему, найдемъ: $m=17$, $n=-8$, $p=0$. Подставивъ эти величины въ уравненіе (5), получимъ: $64u=128$, откуда $u=2$.

Подставивъ найденную для u величину въ первыя три изъ данныхъ уравненій, найдемъ систему уравненій съ тремя неизвѣстными:

$$x+2y+3z=19 \qquad (6)$$
$$3x+5y+7z=46 \qquad (7)$$
$$5x+8y+10z=69 \qquad (8).$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на r, второе на q, третье на 1 и сложивъ ихъ, имѣемъ:

$$(r+3q+5)x+(2r+5q+8)y+(3r+5q+10)z=19r+46q+69 \ldots\ldots (9).$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при x и y, получаемъ другую вспомогательную систему уравненій:

$$r+3q=-5$$
$$2r+5q=-8;$$

рѣшая ее, находимъ: $r=1$, $q=-2$. Подставляя эти величины r и q въ уравненіе (9), находимъ: $z=4$.

Подставивъ найденную для z величину въ ур-нія (6) и (7), имѣемъ

$$x+2y=7 \ldots\ldots (10)$$
$$3x+5y=18 \ldots\ldots (11).$$

Умноживъ ур. (10) на s и сложивъ съ (11), имѣемъ:

$$(s+3)x+(2s+5)y=7s+18 \ldots\ldots (12).$$

Положивъ $s+3=0$, откуда $s=-3$, и подставивъ эту величину s въ ур. (12), имѣемъ

$$-y=-3, \quad \text{или} \quad y=3.$$

Подставивъ 3 вмѣсто y въ уравненіе (10), найдемъ: $x=1$.

312. Случаи упрощенія. — Изъ предыдущаго видно, что процессъ рѣшенія системы уравненій вообще довольно сложенъ, особенно если число неизвѣстныхъ велико. Но иногда его можно упростить; случаи для упрощенія представляются тогда, когда не всѣ неизвѣстныя входятъ въ каждое уравненіе, или же когда уравненія представляютъ нѣкоторую симметрію по отношенію къ неизвѣстнымъ.

Когда не всѣ уравненія содержатъ всѣ неизвѣстныя, тогда начинаютъ съ исключенія того неизвѣстнаго, которое входитъ въ наименьшее число уравненій, ибо тѣ уравненія, въ которыя это неизвѣстное не входитъ, можно считать результатами его исключенія.

Примѣръ I. — Рѣшить систему уравненій

$$\begin{aligned} 2x \qquad -5z+4u &= 7 \\ -y+6z-3u &= 3 \\ -7x+4y \qquad\qquad &= 10 \\ -5x \qquad +6z \qquad &= 20. \end{aligned}$$

Исключая u, которое входитъ только въ первыя два уравненія, получаемъ ур-ніе

$$6x-4y+9z=33,$$

которое вмѣстѣ съ уравненіями

$$\begin{aligned} -y+6z-3u &= 3 \\ -7x+4y \qquad\qquad &= 10 \\ -5x \qquad +6z \qquad &= 20 \end{aligned}$$

составляетъ систему, тождественную съ данною.

Исключая во второй системѣ y изъ перваго и третьяго уравненій, получаемъ систему

$$\begin{aligned} -y+6z-3u &= 3 \\ -x \qquad +9z \qquad &= 43 \\ -7x+4y \qquad\qquad &= 10 \\ -5x \qquad +6z \qquad &= 20 \end{aligned}$$

тождественную со второю, а слѣд. и съ данною.

Исключая въ ней x изъ втораго и четвертаго уравненій, находимъ тождественную данной систему:

$$\begin{aligned} -y+6z-3u &= 3 \\ -7x+4y \qquad\qquad &= 10 \\ -x \qquad +9z \qquad &= 43 \\ 39z \qquad &= 195. \end{aligned}$$

Изъ послѣдняго уравненія находимъ: $z=5$. Вставивъ вмѣсто z его величину въ третье уравненіе, найдемъ: $x=2$; затѣмъ изъ втораго урав. получимъ: $y=6$; наконецъ, изъ перваго: $u=7$.

Примѣръ II. — Рѣшить систему уравненій

$$\begin{aligned} x+2y&=5\\ y+3z&=11\\ z+4u&=19\\ u+5t&=29\\ t+6x&=11. \end{aligned}$$

Выражая изъ пятаго уравненія t черезъ x, имѣемъ: $t=11-6x$. Вставляя вмѣсто t его величину въ четвертое ур,, получимъ: $u=29-5(11-6x)=-26+30x$. Вставляя вмѣсто u полученную величину въ третье ур., найдемъ: $z=123-120x$. Подобнымъ же образомъ, изъ втораго ур. имѣемъ: $y=-358+360x$. Вставивъ вмѣсто y найденное выраженіе въ 1-ое ур., найдемъ изъ него: $x=1$. Всѣ остальныя неизвѣстныя выражены черезъ x, а потому ихъ легко теперь вычислить. Найдемъ: $y=2$, $z=3$, $u=4$ и $t=5$.

Примѣръ. III. — Рѣшить систему уравненій:

$$\begin{aligned} x+y+z+u&=a\\ y+z+u+t&=b\\ z+u+t+x&=c\\ u+t+x+y&=d\\ t+x+y+z&=e. \end{aligned}$$

Въ этой системѣ неизвѣстныя выходятъ симметрично—каждое одинаковое число разъ; это обстоятельство позволяетъ найти сумму всѣхъ неизвѣстныхъ: для этого стоитъ только сложить всѣ уравненія и результатъ раздѣлить на 4. Такимъ образомъ получимъ

$$x+y+z+t+u=\frac{a+b+c+d+e}{4}\quad \ldots\ldots (1).$$

А какъ въ каждое уравненіе не входитъ по одному только неизвѣстному, то вычитая изъ уравненія (1) послѣдовательно каждое изъ данныхъ, опредѣлимъ всѣ неизвѣстныя. Получимъ:

$$\begin{aligned} t&=\frac{b+c+d+e-3a}{4},\\ x&=\frac{a+c+d+e-3b}{4}\\ y&=\frac{a+b+d+e-3c}{4}\\ z&=\frac{a+b+c+e-3d}{4}\\ u&=\frac{a+b+c+d-3e}{4} \end{aligned}$$

Здѣсь сумма всѣхъ неизвѣстныхъ, съ опредѣленія которой мы начали, представляла *вспомогательное неизвѣстное,* позволившее скорѣе опредѣлить каждое неизвѣстное въ отдѣльности. Вотъ еще примѣры употребленія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ.

Примѣръ. IV. — Рѣшить систему уравненій

$$\frac{a}{x+y}+\frac{b}{x-y}=c$$
$$\frac{d}{x+y}+\frac{e}{x-y}=f.$$

Освобождая уравненія отъ дробей, мы нашли бы уравненія, въ которыхъ нѣкоторые члены содержали бы вторыя степени неизвѣстныхъ; но легко избѣжать полученія уравненій второй степени, введя вспомогательныя неизвѣстныя, и именно полагая:

$$\frac{1}{x+y}=u,\quad \frac{1}{x-y}=v.$$

Данныя уравненія примутъ видъ:

$$au+bv=c, \qquad du+ev=f.$$

Рѣшая ихъ, найдемъ:

$$u=\frac{ce-bf}{ae-bd} \quad \text{и} \quad v=\frac{af-cd}{ae-bd}.$$

Подставивъ вмѣсто u и v ихъ выраженія черезъ x и y, найдемъ

$$\frac{1}{x+y}=\frac{ce-bf}{ae-bd} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x-y}=\frac{af-cd}{ae-bd},$$

откуда

$$x+y=\frac{ae-bd}{ce-bf} \quad \text{и} \quad x-y=\frac{ae-bd}{af-cd}.$$

Сначала складывая, а потомъ вычитая эти ур-нія, найдемъ:

$$x=\frac{1}{2}\left\{\frac{ae-bd}{ce-bf}+\frac{ae-bd}{af-cd}\right\} \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{2}\left\{\frac{ae-bd}{ce-bf}-\frac{ae-bd}{af-cd}\right\}.$$

Примѣръ V. Рѣшить систему уравненій

$$ax+m(y+z+u)=\alpha$$
$$by+m(z+u+x)=\beta$$
$$cz+m(u+x+y)=\gamma$$
$$du+m(x+y+z)=\delta.$$

Введемъ вспомогательное неизвѣстное, положивъ: $x+y+z+u=S$; данныя уравненія примутъ видъ:

$$ax+m(S-x)=\alpha$$
$$by+m(S-y)=\beta$$
$$cz+m(S-z)=\gamma$$
$$du+m(S-u)=\delta.$$

Выводя изъ перваго ур-нія x, изъ втораго y и т. д., найдемъ:

$$x=\frac{\alpha-mS}{a-m},\ y=\frac{\beta-mS}{b-m},\ z=\frac{\gamma-mS}{c-m},\ u=\frac{\delta-mS}{d-m}. \ . \ . \ . \ . \ (1).$$

Складывая почленно эти уравненія и замѣчая, что въ первой части получается $x+y+z+u$ или S, найдемъ:

$$S=\frac{\alpha-mS}{a-m}+\frac{\beta-mS}{b-m}+\frac{\gamma-mS}{c-m}+\frac{\delta-mS}{d-m}.$$

Изъ этого уравненія—первой степени относительно S, найдемъ это вспомогательное неизвѣстное; зная его, изъ уравненій (1) найдемъ x, y, z и u.

Приведемъ еще примѣры искуственныхъ пріемовъ, облегчающихъ рѣшеніе уравненій.

Примѣръ VI. Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{xy}{ay+bx}=\frac{1}{c};\quad \frac{xz}{az+cx}=\frac{1}{b};\quad \frac{yz}{bz+cy}=\frac{1}{a}.$$

Обращая дроби, найдемъ:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=c;\quad \frac{a}{x}+\frac{c}{z}=b;\quad \frac{b}{y}+\frac{c}{z}=a.$$

Складывая эти уравненія и обозначая, для краткости, сумму $a+b+c$ черезъ $2S$, находимъ

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=S.$$

Вычитая отсюда поочередно каждое изъ предыдущихъ уравненій, находимъ:

$$\frac{c}{z}=S-c;\quad \frac{b}{y}=S-b;\quad \frac{a}{x}=S-a;$$

откуда

$$x=\frac{a}{S-a},\quad y=\frac{b}{S-b},\quad z=\frac{c}{S-c}.$$

Примѣръ VII. Рѣшить систему уравненій:

$$z+ay+a^2x+a^3=0$$
$$z+by+b^2x+b^3=0$$
$$z+cy+c^2x+c^3=0.$$

Можно-бы было рѣшить эти уравненія способомъ исключенія черезъ сложеніе и вычитаніе, но проще употребить слѣдующій искуственный пріемъ. Данныя уравненія выражаютъ, что полиномъ

$$X^3+xX^2+yX+z$$

обращается въ нуль при подстановкѣ вмѣсто X количествъ a, b и c; слѣд. онъ дѣлится на произведеніе $(X-a)(X-b)(X-c)$, причемъ частное равно 1, потому-что первый членъ дѣлителя есть X^3. Итакъ, имѣемъ тождество:

$$X^3+xX^2+yX+z=(X-a)(X-b)(X-c),$$

или, по раскрытіи произведенія:

$$X^3+xX^2+yX+z=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc,$$

откуда, приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ X, находимъ:

$$x=-(a+b+c);\quad y=ab+ac+bc;\quad z=-abc.$$

313. О системахъ уравненій, въ которыхъ число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій. Когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, то система имѣетъ, вообще, одно опредѣленное рѣшеніе. Разсмотримъ теперь случаи, когда число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій.

314. Теорема.—*Система уравненій, которыхъ число меньше числа неизвѣстныхъ, неопредѣленна.*

Пусть имѣемъ m уравненій, содержащихъ $m+p$ неизвѣстныхъ. Можно дать произвольныя значенія p неизвѣстнымъ; тогда получится система m уравненій, изъ которой опредѣлятся остальныя m неизвѣстныхъ. Слѣд., система имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, что выражаютъ однимъ словомъ, говоря, что система *неопредѣленна.*

315. Теорема. — *Система уравненій, число которыхъ больше числа неизвѣстныхъ, вообще невозможна.*

Пусть число уравненіи превышаетъ число неизвѣстныхъ; пусть напр. имѣемъ $m+p$ уравненій съ m неизвѣстными. Взявъ m изъ числа данныхъ уравненій, въ которыя входили бы m неизвѣстныхъ, и рѣшивъ ихъ, опредѣлимъ эти m неизвѣстныхъ. Если окажется, что найденныя величины удовлетворяютъ и остальнымъ p уравненіямъ, то заключаемъ, что система имѣетъ одно опредѣленное рѣшеніе. Если же окажется, что значенія, найденныя для m неизвѣстныхъ, не удовлетворяютъ остальнымъ p уравненіямъ, это будетъ значить, что система не имѣетъ рѣшеній; въ такомъ случаѣ говорятъ, что она *невозможна*, или что уравненія *несовмѣстны.*

Примѣръ I. Рѣшить систему трехъ уравненій съ двумя неизвѣстными:

$$\begin{aligned} 3x+2y-5&=0\\ 7x-3y+2&=0\\ -x+7y-12&=0. \end{aligned}$$

Рѣшаемъ послѣднія два уравненія и находимъ, что имъ удовлетворяютъ: $x=\frac{11}{23}$ и $y=\frac{41}{23}$. Вставивъ эти величины въ первое уравненіе, замѣчаемъ, что оно обращается въ тождество. Слѣд. система возможна и имѣемъ рѣшеніе: $x=\frac{11}{23}$, $y=\frac{41}{23}$.

Примѣръ II. Рѣшить систему

$$\begin{aligned} 6x+7y&=46\\ 5x+3y&=27\\ x+2y&=14. \end{aligned}$$

Первыя два уравненія имѣютъ рѣшеніе: $x=3$, $y=4$. Но эти значенія не удовлетворяютъ третьему уравненію, слѣд. предложенная система несовмѣстна.

Когда число уравненій превышаетъ число неизвѣстныхъ, и ур-нія имѣютъ буквенные коэффиціенты, то можно предложить себѣ вопросъ: при какой зависимости между коэффиціентами найденныя дла m неизвѣстныхъ величины будутъ удовлетворять и остальнымъ p уравненіямъ? Эти p условій обыкновенно называютъ *условными уравненіями.*

Примѣры. I. $6x+7y=46$, $5x+3y=27$, $ax+2y=14$.

Первыя два уравненія удовлетворяются при $x=3$ и $y=4$.

Для того чтобы всѣ три уравненія были совмѣстны, необходимо, чтобы тѣ же значенія x и y удовлетворяли и третьему уравненію, т. е. чтобы существовало тождество

$$3a+8=14, \text{ откуда } a=2.$$

Итакъ, система совмѣстна при $a=2$.

II. $ax+by+c=0$; $a'x+b'y+c'=0$; $a''x+b''y+c''=0$.

Рѣшая первыя два уравненія, найдемъ:

$$x=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'},\qquad y=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}.$$

Для того чтобы система была совмѣстна, необходимо, чтобы тѣ же рѣшенія обращали въ тождество и третье уравненіе, т. е. чтобы (по освобожденіи отъ знаменателя)

$$a''(bc'-cb')+b''(ca'-ac')+c''(ab'-ba')=0,$$

или

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0.$$

Легко видѣть, что первая часть этого условія есть ничто иное какъ знаменатель значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющимъ тремъ уравненіямъ съ 3 неизвѣстными въ общемъ видѣ.

III. Пусть даны шесть уравненій съ 3 неизвѣстными:

$$\begin{aligned}x+y+z&=9\\3x-y+2z&=10\\2x+7y-3z&=8\\ax-by+cz&=20\\ax+by+cz&=44\\10ax+3by-cz&=26.\end{aligned}$$

и требуется опредѣлить, при какихъ значеніяхъ коэффиціентовъ a, b и c эти шесть уравненій будутъ удовлетворены одними и тѣми же значеніями неизвѣстныхъ.

Рѣшивъ первыя три уравненія, не содержащія a, b и c, найдемъ: $x=1$, $y=3$, $z=5$. Эти величины должны удовлетворять тремъ послѣднимъ уравненіямъ, т. е. должны существовать равенства

$$\begin{aligned}a-3b+5c&=20\\a+3b+5c&=44\\10a+9b-5c&=26.\end{aligned}$$

Рѣшивъ эти уравненія относительно a, b и c, находимъ, что они удовлетворяются при $a=2$, $b=4$, $c=6$: при этихъ значеніяхъ коэффиціентовъ шесть предложенныхъ уравненій совмѣстны.

316. Задачи.

Рѣшить уравненія:

1. $x+3y+2z=11$
   $2x+y+3z=14$
   $3x+2y+z=11.$

2. $5x-6y+4z=15$
   $7x+4y-3z=19$
   $2x+y+6z=46.$

3. $x+2y+3z=6$
   $2x+4y+2z=8$
   $3x+2y+8z=101.$

4. $6y-4x=3z-7$
   $5z-x=2y-3z$
   $y-2z=3y-2x.$

5. $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=58$
   $\frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76$
   $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{7z}{40}=\frac{174}{5}.$

6. $3{,}14x - 7{,}13y + 2{,}05z = 7{,}431$
$0{,}9x + 4{,}21y - 1{,}04z = 3{,}993$
$2{,}57x - 0{,}84y + 2{,}11z = 10{,}418.$

7. $3x - 4y + 5z = 13$
$9x - 15 - 3z = 6u$
$7y - 8z + 4u = 21$
$19 - 3x + 4u = 10z.$

8. $\frac{8x-2y}{6} - \frac{19-3x+4y}{4} = \frac{3x-2y+4z}{5} - \frac{5}{3}$
$\frac{5x-8z}{4} - \frac{8y-3x}{2} - \frac{4z-3y-13}{5} = \frac{13}{20}$
$\frac{21x-5y}{15} - \frac{14-3z}{6} - \frac{7z-5x}{4} = 9 - \frac{17}{48}.$

9. $7x - 2z + 3u = 17$
$4y - 2z + t = 11$
$5y - 3x - 2u = 8$
$4y - 3u + 2t = 9$
$3z + 8u = 33.$

10. $2x - 3y + z = 5$
$2u - 3x + y = 5$
$5y - 2z + 3t = 6$
$4z - 5t + u = 6$
$2t - 3u - 4x = -17.$

11. $2x - 3z + u = 3$
$3y + 2z - t = 17$
$4z - y - 2u = 4$
$5y - 8u + 2t = 6$
$z + 2u = 7.$

12. $2x - 3y = 2$
$5y + 4z - 9u = 3$
$6z - 7u = 9$
$8u - 3x = 12.$

13. $4x - 3z = 10$
$2y - 5u = 5$
$z + 3v = 19$
$3x + y = 13$
$2y - 3u = 11.$

14. $\frac{2}{x} - \frac{5}{3y} + \frac{1}{z} = 3\frac{4}{27}$
$\frac{1}{4x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 6\frac{11}{72}$
$\frac{5}{6x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 12\frac{1}{36}.$

15. $3z + 2u - 5y = 18$
$3x + y - 4u = 9$
$x + 7z - 6y = 33$
$5z - 2x - 8y + 2u = 15.$

16. $\frac{12}{2x+3y} - \frac{7{,}5}{3x+4z} = 1$
$\frac{30}{3x+4z} + \frac{37}{5y+9z} = 3$
$\frac{222}{5y+9z} - \frac{8}{2x+3y} = 5$

17. $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5}$
$\frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6}$
$\frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7}.$

18. $\frac{xy}{4y-3x} = 20$
$\frac{xz}{2x-3z} = 15$
$\frac{yz}{4y-5z} = 12.$

19. $x + y + z = a + b + c$
$bx + cy + az = a^2 + b^2 + c^2$
$cx + ay + bz = a^2 + b^2 + c^2.$

20. $ax + by + cz = (b+c)^2 - a^2$
$bx + cy + az = (c+a)^2 - b^2$
$cx + ay + bz = (a+b)^2 - c^2.$

21. $ax + by - cz = 2ab$
$by + cz - ax = 2bc$
$cz + ax - by = 2ac.$

22. $ax + by + cz = 0$
$a^2x + b^2y + c^2z = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$
$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0$

23. $ax + by + cz = 3$
$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = \frac{bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)}{abc}$
$(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = \frac{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)}{abc}$

24. $\frac{x-a}{(b+c)^2-a^2} = \frac{y-b}{(c+a)^2-b^2} = \frac{z-c}{(a+b)^2-c^2}$
$x + y + z = k(a + b + c).$

25. $x + y + z = 0$
$(b+c-a)x + (c+a-b)y + (a+b-c)z = 0$
$a^2x + b^2y + c^2z = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$

26. $x + y + z = 0.$
$\frac{a^2x}{a-d} + \frac{b^2y}{b-d} + \frac{c^2z}{c-d} = 0$
$\frac{ax}{a-d} + \frac{by}{b-d} + \frac{cz}{c-d} = d(a-b)(b-c)(c-a).$

27. $x + y + z + u = 4a$
$(a+3b)x + (a+b)y + 2(a-b)z = 4(a^2 - 3b^2)$
$3x + 2y + z - u = 5a - 13b.$
$x + 2y + 3z - 3u = 3a - 11b.$

28. $x + y - z = a - 1$
$y + z - u = 2a - 8$
$z + u - v = a + 4$
$u + v - x = 6a + 2$
$v + x - y = 5a + 3.$

29. $xy + yz + zx = 9xyz$
$yz + 2zx - 3xy = -4xyz$
$3yz - 2zx + xy = 4xyz.$

30. $(z + x)a - (z - x)b = 2yz$
$(x + y)b - (x - y)c = 2zx$
$(y + z)c - (y - z)a = 2xy.$

31. $x + y + z = (a + b + c)^2$
$ay + bz + cx = 3(ab^2 + bc^2 + ca^2)$
$ax + by + cz = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc.$

32. $x + ay + a^2z + a^3t = m$
$x + by + b^2z + b^3t = n$
$x + cz + c^2z + c^3t = p$
$x + dy + d^2z + d^3t = q.$

33. $x + y + z + t + u + v = (a + b + c)^2$
$x + y + t = (a + b)^2$
$ct + bu + av = 6abc$
$(t - u)(b + c) = 2a(y - z)$
$(u - v)(a + b) = 2c(x - y)$
$ax + by + cz = a^3 + b^3 + c^3.$

34. $x + y + z + u = 1$
$ax + by + cz + du = k$
$a^2x + b^2y + c^2z + d^2u = k^2$
$a^3x + b^3y + c^3z + d^3u = k^3.$

35. $\frac{x}{r} + \frac{y}{r - b} + \frac{z}{r - c} = 1.$
$\frac{x}{m} + \frac{y}{m - b} + \frac{z}{m - c} = 1.$
$\frac{x}{n} + \frac{y}{n - b} + \frac{z}{n - c} = 1.$

36. $yztu + xztu + xytu + xyzu + xyzt = xyztu$
$yztv + xztv + xytv + xyzv + xyzt = xyztv$
$yzuv + xzuv + xyuv + xyzv + xyzu = xyzuv$
$ytuv + xtuv + xyuv + xytv + xytu = xytuv$
$ztuv + xtuv + xzuv + xztv + xztu = xztuv$
$ztuv + ytuv + yzuv + yztv + yztu = yztuv.$

37. $ax + b(y + z - t) = a^2 + 3b^2$
$ay + b(z + t - x) = 2ab$
$az + b(t + x - y) = a^2 + 3ab - 2b^2$
$at + b(x + y - z) = a^2 - ab.$

38. $(a + 1)x + ay + (a - 1)z = a$
$(a + 1)y + az + (a - 1)x = a + 2$
$(a + 1)z + ax + (a - 1)y = 7a - 2.$

39. $x + \frac{y}{a} = b$
$y + \frac{z}{a} = c$
$z + \frac{t}{a} = d$
$t + \frac{x}{a} = e.$

40. Указать, какія изъ нижеслѣдующихъ системъ неопредѣленны, и какія несовмѣстны:

I. $3x - 2y + 5z = 14$, $2x + y - 8z = 10$, $6x - 4y + 10z = 27$

II. $3x - 2y + 5z = 14$, $2x + y - 8z = 10$, $6x - 4y - 10z = 28$

III. $3x - 2y + 5z = 14$, $2x + y - 8z = 10$, $8x - 3y + 2z = 38$.

IV. $3x - 2y + 5z = 14$, $6x - 4y - 2z = 15$, $9x - 6y - 7z = 20$.

V. $2x - 3y + z = 20$, $6x - 9y + 3z = 60$, $8x - 12y + 4z = 79$.

VI. $5x + 4y - 7z = 4$, $3x - y + 2z = 5$, $11x + 2y - 3z = 12$.

41. При какомъ условіи уравненія

$$6x + 7y = 46, \qquad 5x + 3y = 27, \qquad \text{и} \qquad ax + by = 14$$

совмѣстны?

42. Доказать, что уравненія

$$y = ax + b, \qquad y = a'x + b', \qquad y = a''x + b''$$

совмѣстны при условіи

$$ab' - ba' + ba'' - ab'' + a'b'' - b'a'' = 0.$$

43. Показать, что уравненія

$$ax - by = c, \qquad bx - ay = d, \qquad a(cx - dy) = c^2 + d^2$$

совмѣстны при условіи $b^2(c^2 + d^2) = 2abcd$.

44. При какомъ условіи совмѣстны уравненія

$$2x + 3y + c = 0, \qquad 4x - 5y + c' = 0, \qquad 7x - 4y + c'' = 0?$$

45. При какомъ условіи совмѣстны уравненія:

$$2Ay + Bx + D = 0, \qquad By + 2Cx + E = 0, \qquad Dy + Ex + 2F = 0?$$

46. Тотъ же вопросъ относительно системы

$$ax + by = c, \qquad a^2x + b^2y = c^2, \qquad a^3x + b^3y = c^3.$$

47. Тотъ же вопросъ относительно системы

$$(l - m)x + (m - n)y + n - l = 0,$$
$$lx + my + n = 0$$
$$lmx + mny + nl = 0.$$

48. Опредѣлить коэффиціенты a, b и c такъ, чтобы слѣдующія шесть уравненій удовлетворялись одними и тѣми же значеніями x, y и z:

$$ax - by + cz = 3 \qquad 5x - 3y - 12z = 1$$
$$cx - ay + bz = 25 \qquad 7x - 6y + 8z = 42$$
$$bx - ay - cz = 39 \qquad 3x + 8y - 15z = 34.$$

49. При какомъ условіи совмѣстны уравненія:

$$x = az + p, \qquad y = bz + q, \qquad x = a'z + p', \qquad y = b'z + q',$$

50. При какомъ условіи совмѣстны уравненія

$$(A - S)x + B''y + B' = 0,$$
$$B''x + (A' - S)y + B = 0,$$
$$B'x + By + A'' - S = 0.$$

51. Найти при какихъ условіяхъ 5 слѣдующихъ уравненій

$$\frac{A}{1 + x^2} = \frac{A'}{1 + y^2} = \frac{A''}{1 + z^2} = \frac{B}{yz} = \frac{B'}{xz} = \frac{B''}{xy}$$

удовлетворяются одною и тою же системою неизвѣстныхъ x, y и z.

полное количество серебра — формулою

$$\frac{6}{19}x+\frac{5}{15}y+\frac{65}{190}z \text{ гр.};$$

а количество мѣди равно

$$\frac{8}{19}x+\frac{7}{15}y+\frac{9}{19}z \text{ гр.}$$

Но по условію, четвертый слитокъ долженъ содержать 79 гр. золота, 118— серебра и 162—мѣди; такимъ обр. имѣемъ три уравненія:

$$\frac{5}{19}x+\frac{3}{15}y+\frac{35}{190}z=79,$$

$$\frac{6}{19}x+\frac{5}{15}y+\frac{65}{190}z=118.$$

$$\frac{8}{19}x+\frac{7}{15}y+\frac{9}{19}z=162,$$

или, по освобожденіи отъ дробей:

$$50x+38y+35z=15010,$$

$$36x+38y+39z=13452,$$

$$120x+133y+135z=46170.$$

Исключивъ изъ первыхъ двухъ уравненій y, получимъ ур:

$$7x-2z=779,$$

а исключивъ y изъ втораго и третьяго:

$$4x+z=608.$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ

$$x=133, \quad z=76 \text{ гр.}$$

Подставивъ эти величины въ первое уравненіе, получимъ:

$$y=150 \text{ гр.}$$

Примѣръ II. *Въ бассейнъ проведены три трубы:*

1-ая и 2-я, будучи открыты вмѣстѣ, наполняютъ бассейнъ въ 12 ч.;
2-ая и 3-ья, « « « « « 20 ч.,
3-я и 1-я, « « « « « 15 ч.

Во сколько часовъ всѣ три трубы, открытыя одновременно, наполнятъ бассейнъ?

Пусть первая труба, будучи открыта одна, наполняетъ бассейнъ въ x часовъ; вторая, дѣйствуя также отдѣльно, наполняетъ бассейнъ въ y ч., а третья — въ z часовъ. Въ такомъ случаѣ

1-ая труба въ 1 ч. наполнитъ $\frac{1}{x}$ часть бассейна;

2-ая « « « $\frac{1}{y}$ « « ;

3-я « « « $\frac{1}{z}$ « « .

слѣдовательно, всѣ три трубы, дѣйствуя вмѣстѣ, наполнятъ въ 1 часъ часть бассейна, равную

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z};$$

а потому весь бассейнъ наполнится во столько часовъ, сколько разъ дробь $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ заключается въ объемѣ цѣлаго бассейна т. е. въ 1. Итакъ, время необходимое для наполненія бассейна тремя трубами, выражается формулою:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}:$$

это и есть искомое задачи.

Для его опредѣленія мы изъ условій задачи имѣемъ три уравненія

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12},$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20},$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}.$$

Складывая ихъ, находимъ:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{15},$$

откуда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10},$$

а потому

$$1:\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=10.$$

Для наполненія бассейна нужно 10 часовъ, что нетрудно провѣрить.

Примѣръ III. *Опредѣлить время изобрѣтенія Гуттенбергомъ книгопечатанія на основаніи слѣдующихъ данныхъ: 1) цифра десятковъ года, въ который совершилось это событіе, вдвое меньше цифры единицъ; 2) цифра тысячъ равна разности между цифрою сотенъ и цифрою десятковъ; 3) сумма всѣхъ четырехъ цифръ искомаго числа равна 14; 4) если увеличить искомое число на 4905, то получится число обращенное.*

Обозначимъ, по порядку, цифры единицъ, десятковъ, сотенъ и тысячъ буквами x, y, z, t. Первыя три условія прямо даютъ слѣдующія уравненія:

$$2y=x \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$t=z-y \; . \; . \; . \; (2)$$

$$x+y+z+t=14 . \; . \; . \; (3)$$

Искомое число изображается формулою: $x+10y+100z+1000t$; обращенное число — формулою $1000x+100y+10z+t$. Четвертое условіе выражается уравненіемъ

$$x+10y+100z+1000t+4905=1000x+100y+10z+t,$$

или, короче:

$$111x+10y-10z-111t=545 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Вычтя (2) изъ (3), находимъ

$$x+y+z=14-z+y,$$

откуда

$$x=14-2z.$$

Въ такомъ случаѣ ур. (1) дастъ

$$2y=x=14-2z,$$

откуда

$$y=7-z;$$

а слѣд.

$$t=z-y=2z-7.$$

Подставивъ въ ур. (4) вмѣсто x, y и t ихъ выраженія черезъ z, находимъ:

$$111(14-2z)+10(7-z)-10z-111(2z-7)=545,$$

откуда

$$z=4;$$

а потому: $x=6$, $y=3$, $t=1$. Итакъ, книгопечатаніе изобрѣтено было въ 1436 году.

Примѣръ IV. *Два свѣчныхъ завода конкуррируютъ другъ съ другомъ. Второй открытъ 40 днями позже перваго, и на немъ работаетъ 70 человѣкъ по 12 часовъ въ день, между тѣмъ какъ на первомъ только 60 рабочихъ, занятыхъ по 10 часовъ въ день. Черезъ сколько дней оба завода приготовятъ одинаковое число свѣчей, полагая, что каждый рабочій на той и другой фабрикѣ изготовляетъ одинаковое число свѣчей въ часъ?*

Пусть искомое число дней, считая со времени открытія перваго завода, будетъ x; пусть, кромѣ того, каждый рабочій изготовляетъ въ часъ y свѣчей. 60 рабочихъ перваго завода, работая по 10 часовъ въ день, изготовятъ въ x дней $y.10.x.60$ свѣчей; 70 рабочихъ втораго завода, работая по 12 часовъ въ день, изготовятъ въ $x-40$ дней $y.12.(x-40).70$ свѣчей. По условію, оба числа свѣчей равны, слѣд. получается уравненіе съ двумя неизвѣстными:

$$y.10.x.60=y.12.(x-40).70.$$

Обѣ части уравненія дѣлятся на произведеніе $y.10.12$; это дѣленіе позволительно, такъ какъ y, по смыслу задачи, отлично отъ нуля. Сокративъ, найдемъ

$$5x=7(x-40),$$

откуда

$$x=140.$$

Примѣчаніе. Для составленія уравненія пришлось ввести *вспомогательное неизвѣстное* y, котораго величина остается неопредѣленною.

Приводимъ еще одну задачу, въ которой составленіе уравненій требуетъ введенія двухъ *вспомогательныхъ неизвѣстныхъ*; это — исторически извѣстная задача Ньютона.

Примѣръ V. **Задача Ньютона.**—*Площади трехъ луговъ равны соотвѣтственно: $3\frac{1}{3}$ десятинамъ, 10 и 24 десятинамъ; причемъ на всѣхъ трехъ лугахъ трава имѣетъ одинаковую высоту и растетъ равномѣрно съ одинаковою быстротою. Первый лугъ прокормилъ 12 быковъ въ продолженіи четырехъ не-*

дѣлъ, второй 21 быка въ теченіи 9 недѣль. Сколько быковъ можетъ прокормить третій лугъ въ теченіи 18 недѣль?

Пусть искомое число быковъ равно x. Для облегченія составленія уравненій нужно ввести *два вспомогательныхъ неизвѣстныхъ*, именно: высоту травы на каждомъ лугу, которую обозначимъ буквою y, и скорость, съ которою трава растетъ, т. е. количество, на которое увеличивается ея высота въ недѣлю; пусть это неизвѣстное будетъ z.

На первомъ лугу количество травы вначалѣ было $y \times 3\frac{1}{3}$ или $\frac{10}{3}y$, а приростъ ея въ 4 недѣли равенъ $z \times 3\frac{1}{3} \times 4$, или $\frac{40}{3}z$. Полное количество травы, съѣденной 12-ью быками въ 4 недѣли, равно

$$\frac{10}{3}y + \frac{40}{3}z, \quad \text{или} \quad \frac{10(y+4z)}{3};$$

слѣд. одинъ быкъ въ 1 недѣлю съѣдалъ

$$\frac{10(y+4z)}{3 \times 4 \times 12}, \quad \text{или} \quad \frac{5(y+4z)}{72}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что объемъ травы, съѣденной однимъ быкомъ въ одну недѣлю на второмъ лугу, равенъ

$$\frac{10(y+9z)}{9 \times 21}, \quad \text{или} \quad \frac{10(y+9z)}{189};$$

а на третьемъ онъ равенъ

$$\frac{24(y+18z)}{18 \times x}, \quad \text{или} \quad \frac{4(y+18z)}{3x}.$$

Выражая, что количество травы, поѣдаемой на каждомъ лугу однимъ быкомъ въ одну недѣлю, одно и тоже, получимъ уравненія:

$$\frac{5(y+4z)}{72} = \frac{10(y+9z)}{189},$$

$$\frac{5(y+4z)}{72} = \frac{4(y+18z)}{3x}.$$

Такимъ образомъ получили два уравненія съ тремя неизвѣстными, сл. имѣемъ случай неопредѣленности; но здѣсь неопредѣленны только y и z, между тѣмъ какъ главное неизвѣсное x имѣетъ величину вполнѣ опредѣленную. Въ самомъ дѣлѣ, два полученныя уравненія даютъ возможность опредѣлить отношеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ $\frac{y}{z}$ и главное неизвѣстное x. Дѣйствительно, раздѣливъ обѣ части каждаго уравненія на z и положивъ $\frac{y}{z} = u$, найдемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными x и u:

$$\frac{5(u+4)}{72} = \frac{10(u+9)}{189}$$

$$\frac{5(u+4)}{72} = \frac{4(u+18)}{3x},$$

изъ которыхъ и можно опредѣлить эти неизвѣстныя. Изъ перваго уравненія найдемъ: $u=12$; вставивъ вмѣсто u его величину во второе, найдемъ: $x=36$.

Слѣд., третій лугъ могъ прокормить 36 быковъ въ теченіи 18 недѣль.

318. Задачи.

1. Нѣкоторую сумму денегъ дѣлятъ поровну между нѣсколькими лицами. Еслибы было 3 лицами больше, каждое получило бы 1 рублемъ меньше; а еслибъ было 2 лицами меньше, каждое получилобы 1 рублемъ больше. Сколько было лицъ и какъ велика раздѣленная между ними сумма?

2. Двузначное число втрое больше суммы своихъ цифръ, а квадратъ этой суммы равенъ утроенному искомому числу. Найти это число?

3. Изъ двухъ игроковъ A и B, A выигрываетъ въ первую игру 8-ью рублями меньше того, что онъ имѣетъ; и такимъ образомъ у него оказывается вдвое больше денегъ, нежели остается у B. Во вторую игру B выигрываетъ 4 рублями меньше того, что у него осталось; и такимъ образомъ у него оказывается столько же денегъ, сколько и у A. Сколько денегъ имѣлъ каждый: 1) начиная игру, и 2) окончивъ ее.

4. Два лица A и B должны уплатить равныя суммы: A — черезъ 3, B—черезъ 11 мѣсяцевъ; вмѣсто этого они теперь же платятъ: A—3523 р. 50 к., а B—3319 р. 50 к., при одинаковомъ $\%$ учета. По скольку руб. должны были они заплатить, и сколько $\%$ годовыхъ составляетъ учетъ?

5. Два капитала, изъ которыхъ одинъ отданъ былъ по 5%, а другой по $4\frac{1}{2}\%$, принесли въ годъ 284 р. 12 к. процентныхъ денегъ. Но еслибы первый капиталъ былъ отданъ по столько $\%$, по скольку второй, а второй—по сколько первый, то процентныхъ денегъ получилось бы 4 р. 50 к. меньше. Какъ велики были оба капитала?

6. Хозяйка наняла двухъ служанокъ съ жалованьемъ по 40 р. въ годъ, и съ обязательствомъ давать ежегодно каждой по 1 платью и по 1 парѣ обуви опредѣленной стоимости. Одна изъ служанокъ, получивъ впередъ платье, оставила службу черезъ 8 мѣсяцевъ, причемъ по расчету ей пришлось получить жалованья $26\frac{1}{2}$ руб. Вторая, получившая впередъ пару обуви, оставила службу черезъ $9\frac{1}{2}$ мѣсяцевъ, причемъ жалованья ей пришлось получить $35\frac{1}{2}$ руб. Во сколько цѣнилось платье и во сколько пара обуви?

7. Разстояніе между точками A и B равно 301 метру. Нѣкоторое тѣло движется съ равномѣрною скоростью изъ A въ B, и не останавливаясь въ B, возвращается въ A, съ тою же скоростью. 11-ю секундами позже второе тѣло начинаетъ движеніе изъ точки B въ A, съ равномѣрною, но меньшею, скоростью, и черезъ 10 секундъ отъ начала своего движенія встрѣчаетъ первое тѣло въ первый разъ, а черезъ 45 секундъ отъ начала своего движенія встрѣчается съ нимъ во второй разъ. Сколько метровъ въ секунду проходитъ каждое тѣло?

8. Купецъ, имѣя два сорта нѣкотораго товара, продаетъ одинъ сортъ съ прибылью въ 8%, а другой съ убыткомъ въ 12%. Опредѣленныя количества того и другаго сорта продаетъ онъ купцу B, получая приэтомъ 20-ью рублями больше, чѣмъ ему стоили проданныя количества товара. Другому купцу C онъ продаетъ перваго сорта втрое, а втораго въ семь разъ больше количества, проданнаго лицу B, приэтомъ получаетъ 84-мя рублями меньше, чѣмъ эти количества товара стоили ему самому. Сколько заплатилъ ему B за оба сорта товара?

9. Къ 300 фунтамъ сплава, состоящаго изъ 2 частей цинка, 3 частей мѣди и 4 частей олова, прибавлено 200 ф. другаго сплава, состоящаго изъ тѣхъ же металловъ; въ полученномъ сплавѣ оказалось: цинка—3 части, мѣди 4, а олова 5 частей. Въ какомъ отношеніи были эти три металла въ прибавленномъ сплавѣ?

10. Водоемъ, содержащій опредѣленное количество воды, черезъ одну трубу наполняется водою, между тѣмъ какъ другая служитъ для спуска воды. Черезъ первую трубу въ каждую минуту втекаетъ 4-мя ведрами больше, чѣмъ изъ второй вытекаетъ. Если открыть обѣ трубы, но первую часомъ раньше второй, то въ извѣстное время водоемъ получитъ 1760 ведеръ. Если же вторую трубу открыть часомъ раньше первой, то въ тоже самое время водоемъ потеряетъ половину того количества воды, какое онъ въ первомъ случаѣ получилъ. Какое количество воды даетъ каждая труба въ минуту, и сколько времени оба раза каждая труба была открыта?

11. Найти три числа, которыхъ сумма, разность и произведеніе находятся въ отношеніи 5 : 1 : 18?

12. Два купца A и B въ разное время вели совмѣстную торговлю. Въ первый разъ капиталъ A находился въ оборотѣ 4 мѣсяца, а капиталъ B пять мѣсяцевъ, причемъ общая прибыль составляла 3458 р. Во второй разъ капиталъ A находился въ оборотѣ 7 мѣсяцевъ, а капиталъ B—4 мѣсяца, общая же прибыль была 3591 р. Наконецъ, въ третій разъ капиталъ A, съ прибавленіемъ 500 р., былъ въ оборотѣ $7\frac{3}{4}$ мѣсяца, а B—11 мѣсяцевъ, общая же прибыль составляла 7651 р. Опредѣлить капиталы A и B, если извѣстно, что во всѣхъ трехъ случаяхъ прибыль была, относительно, одинакова?

13. Четыре игрока A, B, C и D играютъ на слѣдующихъ условіяхъ: каждый проигравшій платитъ всѣмъ остальнымъ по столько рублей, сколько каждый изъ нихъ имѣетъ въ концѣ этой игры. Первую игру проигралъ A, вторую B, третью C и четвертую D, послѣ чего у каждаго оказалось по 32 р. Сколько каждый имѣлъ первоначально?

14. Нѣкто, помѣстивъ свой капиталъ на извѣстные $\%$, черезъ годъ прибавляетъ къ капиталу 1000 р. и получая 1% больше, увеличиваетъ этимъ получаемую прибыль на 80 р. Еще черезъ годъ онъ прибавляетъ къ капиталу 500 р., получаетъ еще 1% больше, и увеличиваетъ такимъ образомъ доходъ 70-ю рублями. Опредѣлить первоначальные—капиталъ и проценты?

15. Капиталистъ помѣстилъ капиталы x, y и z слѣдующимъ образомъ; на первый капиталъ онъ пріобрѣлъ 3-хъ процентныя бумаги по курсу 69 р., на второй—$4\frac{1}{2}$ процентныя бумаги по курсу 94,5, на третій капиталъ—желѣзнодорожныя облигаціи, приносящія каждая по 15 р. дохода, по курсу 285 р. Весь доходъ его составлялъ 8425 р. Если-бы на пріобрѣтеніе перваго рода бумагъ онъ употребилъ капиталъ z, на покупку вторыхъ x, а на покупку третьихъ y, то его доходъ былъ бы 8375 р. Наконецъ, если бы капиталъ x онъ употребилъ на покупку 5%-хъ бумагъ, капиталъ y на покупку желѣзнодорожныхъ облигацій, приносящихъ каждая 25 р. ренты, по курсу 475 р , а капиталъ z на покупку пятипроцентныхъ бумагъ по курсу 70 р., его доходъ былъ бы 10292 р. Опредѣлить x, y и z.

16. Опредѣлить четырехзначное число на основаніи слѣдующихъ условій: 1) цифра сотенъ равна суммѣ цифръ десятковъ и единицъ; 2) цифра десятковъ равна удвоенной суммѣ цифръ тысячъ и единицъ; 3) раздѣливъ число на сумму его цифръ, находимъ въ частномъ 109, а въ остаткѣ 9; 4) вычтя искомое число изъ обращеннаго числа, находимъ въ остаткѣ 819.

17. Пассажирскій поѣздъ идетъ изъ A черезъ B въ C, останавливаясь въ B на 5 минутъ. Черезъ 14 минутъ послѣ выхода изъ B онъ встрѣчаетъ курьерскій поѣздъ, идущій ему на-встрѣчу со скоростью вдвое большею. Курьерскій поѣздъ вышелъ изъ точки C въ тотъ моментъ, когда пассажирскій находился въ 25 верстахъ отъ A. Извѣстно, что курьерскій поѣздъ употребляетъ 2 часа на переѣздъ изъ C въ B, и что, еслибы, придя въ A, онъ, не останавливаясь въ этой точкѣ, тотчасъ же отправился бы въ обратный путь, то пришелъ-бы въ C черезъ $\frac{3}{4}$ часа послѣ прихода туда пассажирскаго поѣзда. Сколько верстъ каждый поѣздъ дѣлаетъ въ часъ и какъ велики разстоянія между станціями A, B и C?

18. Нѣкто, умирая, оставилъ четыремъ своимъ сыновьямъ, изъ коихъ первому было 11 лѣтъ, второму 17, третьему 19, а четвертому 20 лѣтъ, сумму въ 46200 р., съ тѣмъ, чтобы части всѣхъ четверыхъ наслѣдниковъ, помѣщенныя тотчасъ же на 5%, составили равныя суммы ко времени совершеннолѣтія ихъ, т. е. ко времени, когда каждому исполнится 21 годъ. Какъ раздѣлить завѣщенную сумму?

19. Разстоянія планетъ: Марса, Цереры и Юпитера отъ солнца можно вычислить приблизительно слѣдующимъ образомъ: вообразимъ, что сперва Марсъ и Церера, затѣмъ Марсъ и Юпитеръ, наконецъ Юпитеръ и Церера отодвигаются отъ солнца на столько, на сколько они удалены отъ него; и что въ тоже время третья планета каждый разъ на столько миль приближается къ солнцу, на сколько двѣ другія планеты вмѣстѣ удаляются. Такою перемѣною всѣ три планеты были бы приведены къ одинаковому разстоянію отъ Солнца, равному 64 милліонамъ геогр. миль.

20. Поѣздъ и почтовая карета выѣзжаютъ изъ двухъ мѣстъ A и B, послѣдняя 2-мя часами раньше перваго, на-встрѣчу другъ другу, и встрѣчаются черезъ 6 часовъ послѣ выхода поѣзда. Если бы они дѣлали въ каждый часъ $\frac{1}{4}$-ю мили больше, то встрѣча произошла бы черезъ $5\frac{1}{2}$ часовъ; а еслибы проѣзжали въ часъ $\frac{1}{4}$-ю мили меньше, и карета выѣхала бы 2-мя часами позже, то они встрѣтились бы черезъ 7 ч. 5 м. послѣ выхода поѣзда. Сколько проходитъ поѣздъ и сколько карета въ часъ, и сколько миль между A и B?

21. 4 металла сплавлены въ отношеніи $1 : 3 : 5 : 7$. Если къ этому сплаву прибавить другой, вѣсящій въ $2\frac{3}{8}$ разъ больше и состоящій изъ тѣхъ же металловъ сплавъ, то отношеніе металловъ будетъ $= 3 : 4 : 5 : 6$. Въ какомъ отношеніи находятся металлы въ прибавленномъ сплавѣ?

22. Въ бассейнъ, наполненный до нѣкоторой высоты, проведены три трубы; первая труба можетъ его наполнить въ 7, вторая въ 5, третья въ $8\frac{3}{4}$ часа. Если будетъ открыта первая труба и если брать по 28 ведеръ въ часъ, то бассейнъ опорожнится въ 40 часовъ. Если же открыть вторую трубу и брать по 39 ведеръ въ часъ, то онъ опорожнится въ 120 часовъ. Черезъ сколько часовъ бассейнъ будетъ опорожненъ, если открыть третью трубу и брать по 23 ведра въ часъ? Сколько ведеръ содержитъ бассейнъ и сколько ведеръ даетъ первая труба въ часъ?

23. Учитель предложилъ тремъ ученикамъ перемножить два числа. По умноженіи множимаго на различныя цифры множителя, одинъ изъ учениковъ при сложеніи частныхъ произведеній забылъ удержать въ умѣ одну единицу нѣкотораго разряда; раздѣляя, при повѣркѣ, результатъ на меньше число, онъ нашолъ въ частномъ 971, а въ остаткѣ 214. Второй въ сказанномъ разрядѣ не сдѣлалъ ошибки, но при сложеніи цифръ слѣдующаго высшаго разряда забылъ придать двойку; дѣлая повѣрку такимъ

же образомъ какъ и первый, онъ получилъ въ частномъ 965, а въ остаткѣ 198. Третій сдѣлалъ подобную же ошибку на 1 при сложеніи цифръ слѣдующаго высшаго разряда, и получилъ при повѣркѣ—въ частномъ 940, а въ остаткѣ 48. Опредѣлить данныя для умноженія числа, и указать, на какихъ мѣстахъ были сдѣланы ошибки?

24. На двухъ колесахъ, которыхъ окружности относятся какъ 5 : 3, намотаны двѣ веревки; разность между длинами веревокъ 28-ью метрами больше разности между окружностями; сверхъ того, большая веревка дѣлаетъ на большемъ колесѣ 12-ю оборотами больше, чѣмъ меньшая веревка на своемъ колесѣ. Наконецъ, если первое колесо будетъ вертѣться втрое скорѣе другаго, то обѣ веревки размотаются въ одинаковое время. Найти длины: веревокъ и окружностей колесъ.

25. Пакетботъ, выйдя изъ Дувра съ попутнымъ вѣтромъ, пришелъ въ Кале черезъ 2 часа. На возвратномъ пути дулъ противный вѣтеръ, вслѣдствіе чего судно дѣлало въ часъ одною милею меньше, чѣмъ въ предыдущемъ переѣздѣ. Пройдя половину пути, оно снова пошло съ попутнымъ вѣтромъ, увеличившимъ его скорость на 4 мили. Благодаря этому, судно пришло въ Дувръ скорѣе, нежели оно могло бы придти туда въ томъ случаѣ, еслибы вѣтеръ не измѣнился во второй разъ въ отношеніи 5 : 7. Каково разстояніе между Дувромъ и Кале и каковы скорости пакетбота на обратномъ пути?

26. Государственныя подати увеличились по случаю войны въ отношеніи $2\frac{1}{4} : 1$ и чрезъ это, по уплатѣ расходовъ по взыманію и процентовъ съ долговъ, государственный доходъ увеличился въ отношеніи $3\frac{12}{23} : 1$. Но еслибы, при тѣхъ же обстоятельствахъ, подати уменьшились бы въ отношеніи $1\frac{7}{9} : 1$, то по исключеніи расходовъ, доходъ уменьшился бы въ отношеніи $7\frac{2}{3} : 1$ и составлялъ бы 4 милліона рублей. Какъ велики были первоначально подати и проценты долга, если принять, что расходы по взыманію пропорціональны квадратнымъ корнямъ изъ увеличенныхъ податей?

27. Число N имѣетъ первоначальными множителями два послѣдовательныя цѣлыя числа. Если показатель перваго множителя увеличить на 2, а показатель втораго на 4, то новое число N′ будетъ имѣть 50-ью дѣлителями больше. Если же первый показатель уменьшить на 3, а второй увеличить на 5, то новое число N″ будетъ имѣть только десятью множителями больше чѣмъ N. Найти N, N′ и N″.

ГЛАВА XXIII.

Теорія пропорцій.

Пропорція ариѳметическая. — Пропорція геометрическая; производныя и сложныя пропорціи; свойства ряда равныхъ отношеній. — О пропорціональности величинъ. — Гармоническая пропорція. — Приложенія. — Задачи.

319. Въ этой главѣ мы займемся изученіемъ особаго вида равенствъ, называемыхъ *пропорціями*; изученіе свойствъ этихъ равенствъ важно въ виду многочисленныхъ и разнообразныхъ ихъ примѣненій.

Пропорція ариѳметическая.

320. Разность двухъ количествъ a и b называется *разностнымъ* или *ариѳметическимъ* ихъ *отношеніемъ*; письменно оно выражается такъ: $a-b$. Количества a и b называются *членами* отношенія: a — *предыдущимъ*, b — *послѣдующимъ;* числовая величина $a-b$ наз. *разностью* отношенія.

Если два ариѳметическія отношенія $a-b$ и $c-d$ равны, то соединяя ихъ знакомъ равенства, получимъ равенство

$$a-b=c-d,$$

называемое *разностною* или *ариѳметическою пропорціею.*

Пропорція читается такъ: a относится къ b, какъ c къ d. Количества a, b, c и d называются членами пропорціи: a — первымъ, b — вторымъ, c — третьимъ, d — четвертымъ; кромѣ того, a и d называются *крайними*, b и c — *средними.*

321. Главное свойство ариѳметической пропорціи. — Если въ равенствѣ

$$a-b=c-d$$

перенесемъ d въ первую, а b во вторую часть, то получимъ

$$a+d=b+c,$$

т. е. *во всякой ариѳметической пропорціи сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ.*

Обратно: взявъ равенство

$$a+d=b+c$$

и перенеся b въ первую, а d во вторую часть, найдемъ

$$a-b=c-d,$$

т. е. *если сумма двухъ количествъ равна суммѣ двухъ другихъ, то эти четыре количества ариѳметически пропорціональны.*

322. Опредѣленіе неизвѣстныхъ членовъ. — Перенеся въ пропорціи

$$a-b=c-d$$

членъ b во вторую часть, найдемъ:

$$a=(b+c)-d \ldots\ldots (1).$$

Опредѣляя изъ той-же пропорціи b, находимъ

$$b=(a+d)-c \ldots\ldots (2).$$

Равенство (1) показываетъ, что *крайній членъ ариѳм. пропорціи равенъ суммѣ среднихъ безъ другаго крайняго*; а равенство (2), что *средній членъ равенъ суммѣ крайнихъ безъ другаго средняго.*

323. Непрерывная пропорція. Ариѳметическая средина. — Если въ ариѳметической пропорціи равны оба крайніе, или оба средніе члена, то пропорція называется *непрерывною.* Таковы напр. пропорціи: $5-3=7-5$; $2-10=10-$ -18; вообще

$$a-b=b-c \quad \text{и} \quad p-q=r-p$$

суть пропорціи непрерывныя. Въ первой b, а во второй p называются *ариѳметическими срединами* двухъ другихъ членовъ.

Примѣняя главное свойство къ одной изъ этихъ пропорцій, напр. къ первой, находимъ:

$$2b = a + c, \quad \text{откуда} \quad b = \frac{a+c}{2};$$

т. е. *ариѳметическая средина между двумя количествами равна ихъ полусуммѣ.*

Обобщая этотъ выводъ, *называютъ ариѳметическою срединою нѣсколькихъ количествъ—сумму ихъ, дѣленную на число ихъ.*

Такимъ образомъ, если имѣемъ n количествъ

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$$

то ариѳметическая средина ихъ будетъ

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n}{n}.$$

Опредѣленіе ариѳметическихъ срединъ весьма важно для наблюдательныхъ наукъ. Пусть напр., опредѣляя угломѣрнымъ приборомъ нѣкоторый уголъ въ нѣсколько пріемовъ, нашли: при первомъ измѣреніи $28^0 52' 36''$, при двухъ слѣдующихъ $28^0 51' 52''$ и при четвертомъ измѣреніи $28^0 51' 24''$. Какова величина угла? Такъ какъ всѣ четыре измѣренія не согласуются между собою, то остается одно средство—взять *среднюю величину*:

$$x = \frac{28^0 52' 36'' + 28^0 51' 52'' \times 2 + 28^0 51' 24''}{4} = 28^0 51' 56''.$$

Пропорція геометрическая.

324. Частное отъ раздѣленія двухъ количествъ $\frac{a}{b}$ наз. *кратнымъ* или *геометрическимъ отношеніемъ* a къ b; численная величана отношенія наз. *знаменателемъ* отношенія.

Равенство двухъ геометрическихъ отношеній называется кратною или геометрическою пропорціею, напр.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \ldots \quad (1).$$

325. Главное свойство геометрической пропорціи. — *Во всякой геометрической пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, приведя въ вышенаписанной пропорціи дроби къ общему знаменателю и откинувъ его, найдемъ

$$ad = bc \quad \ldots \quad (2).$$

Наоборотъ, *если произведеніе двухъ количествъ равно произведенію двухъ другихъ количествъ, то такія четыре количества пропорціональны.*

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ обѣ части равенства $ad = bc$ на bd, найдемъ:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

326. Опредѣленіе неизвѣстныхъ членовъ. Если обѣ части равенства (2), вытекающаго изъ пропорціи (1), раздѣлимъ на d, то найдемъ:

$$a=\frac{bc}{d}\cdot\cdot\cdot(3).$$

Раздѣливъ же обѣ части (2) на c, находимъ

$$b=\frac{ad}{c}\cdot\cdot\cdot(4).$$

Равенство (3) показываетъ, что *во всякой геометрической пропорціи крайній членъ равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній*; а равенство (4), что *неизвѣстный средній равенъ произведенію крайнихъ, дѣленному на другой средній.*

Опредѣленіе неизвѣстнаго члена, когда остальные три члена извѣстны, называется *рѣшеніемъ* пропорціи.

327. Непрерывная пропорція. Геометрическая средина. Когда равны оба крайніе, или оба средніе члена, пропорція называется *непрерывною*; напр. $12:6=24:12$, или $2:4=4:8$.

Каждый изъ равныхъ членовъ непрерывной пропорціи наз. *среднимъ геометрическимъ* между двумя другими. Приравнявъ въ непрерывной пропорціи $a:b=b:d$ произведеніе среднихъ произведенію крайнихъ, получимъ $b^2=ad$, откуда

$$b=\sqrt{ad};$$

слѣд. *геометрическая средина двухъ количествъ равна квадратному корню изъ ихъ произведенія.*

По аналогіи съ этимъ выводомъ, среднимъ геометрическимъ нѣсколькихъ количествъ называютъ корень порядка, равнаго ихъ числу, изъ ихъ произведенія. Потому, геометрическая средина n количествъ: a_1, a_2, a_3, . . . , a_n будетъ

$$\sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 \ldots\ldots a_n}.$$

328. Производныя пропорціи. Если пропорція получается изъ другой пропорціи посредствомъ нѣкоторыхъ преобразованій, то первая называется *производною* отъ второй. Ознакомимся съ различными видами производныхъ пропорцій.

I. Взявъ пропорцію

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\cdot\cdot(1)$$

приравняемъ въ ней произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ, и раздѣлимъ полученное равенство $ad=bc$ послѣдовательно на: cd, ab и ac, по сокращеніи найдемъ:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\cdot\cdot\cdot(2)\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}\cdot\cdot\cdot(3)\quad \frac{d}{c}=\frac{b}{a}\cdot\cdot\cdot(4).$$

Переставивъ въ каждой изъ этихъ четырехъ пропорцій самыя отношенія, найдемъ еще четыре пропорціи:

$$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\cdot\cdot(5)\quad \frac{b}{d}=\frac{a}{c}\cdot\cdot\cdot(6)\quad \frac{c}{a}=\frac{d}{b}\cdot\cdot\cdot(7)\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\cdot\cdot\cdot(8).$$

Такимъ образомъ *въ каждой пропорціи можно перемѣнять мѣста: среднихъ членовъ, киайнихъ, и тѣхъ и другихъ вмѣстѣ.* Чрезъ это всякую пропорцію можно представить въ восьми различныхъ видахъ.

II. Придавъ къ обѣимъ частямъ равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ldots(1)$ по 1, а потомъ вычтя по 1, получимъ по приведеніи каждой части къ общему знаменателю:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ldots(2) \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\ldots(3).$$

Пропорціи (2) и (3) показываютъ, что: *сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ своему послѣдующему такъ, какъ сумма или разность членовъ втораго отношенія къ своему послѣдующему.*

Раздѣливъ почленно каждую изъ пропорцій (2) и (3) на (1), найдемъ:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\ldots(4) \quad \text{и} \quad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}\ldots(5)$$

т. е.: *сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ предыдущему того же отношенія такъ, какъ сумма или разность членовъ втораго отношенія къ предыдущему того же отношенія.*

Перемѣнивъ въ пропорціяхъ (2), (3), (4) и (5) мѣста среднихъ членовъ, имѣемъ:

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}\ldots(6),\ \frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}\ldots(7),\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}\ldots(8) \text{ и } \frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}\ldots(9)$$

т. е. *сумма или разность членовъ перваго отношенія относится къ суммѣ или разности членовъ втораго отношенія такъ, какъ предыдущій къ предыдущему или послѣдующій къ послѣдующему.*

Раздѣливъ пропорцію (2) на (3), найдемъ

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\ \ldots(10)$$

т. е. *сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ втораго отношенія къ ихъ разности.*

Перемѣнивъ въ пропорціи (1) мѣста среднихъ членовъ и примѣнивъ къ новой пропорціи $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ преобразованія, указываемыя равенствами (2), (3) и т. д., найдемъ:

$$\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}\ (11),\ \frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d}\ (12),\ \frac{a+c}{a}=\frac{b+d}{b}\ (13),\ \frac{a-c}{a}=\frac{b-d}{b}\ (14),$$

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}\ (15),\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}\ (16),\ \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}\ (17),\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}\ (18).$$

Изъ сравненія же (15) съ (16) имѣемъ

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}, \quad \text{откуда} \quad \frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}.$$

Результаты, выражаемые этими равенствами, нетрудно выразить словесно.

329. Сложныя пропорціи. Пропорція, выводимая изъ нѣсколькихъ другихъ пропорцій, называется *сложною.*

I. Посмотримъ, при какихъ условіяхъ возможно почленное сложеніе или вычитаніе двухъ пропорцій. Пусть данныя пропорціи будутъ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'};$$

изслѣдуемъ, при какихъ условіяхъ возможна пропорція

$$\frac{a\pm a'}{b\pm b'}=\frac{c\pm c'}{d\pm d'} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

гдѣ знакъ (+) относится къ почленному сложенію, а (—) къ почленному вычитанію. Преобразуемъ испытуемое равенство, приравнявъ произведеніе крайнихъ членовъ произведенію среднихъ; сдѣлавъ это, найдемъ:

$$(a\pm a')(d\pm d')=(b\pm b')(c\pm c').$$

Выполняя умноженіе и замѣчая, что верхніе знаки надо брать съ верхними, а нижніе съ нижними, находимъ:

$$ad\pm a'd\pm ad'+a'd'=bc\pm b'c\pm bc'+b'c'.$$

Но изъ данныхъ пропорцій имѣемъ: $ad=bc$ и $a'd'=b'c'$; отнявъ по-ровну изъ обоихъ частей, найдемъ

$$\pm a'd\pm ad'=\pm b'c\pm bc'.$$

Здѣсь совокупно написаны два равенства: въ одномъ членамъ предшествуетъ знакъ +, въ другомъ — всѣмъ членамъ предшествуетъ (—); помноживъ обѣ части втораго на (—1), увидимъ, что оно ничѣмъ не отличается отъ перваго, такъ-что оба равенства приводятся къ одному

$$a'd+ad'=b'c+bc',$$

а это значитъ, что почленное сложеніе и почленное вычитаніе двухъ пропорцій возможны при однихъ и тѣхъ же условіяхъ. Затѣмъ, пользуясь данными пропорціями, исключимъ изъ послѣдняго равенства d и d', чтобы уменьшить этимъ число входящихъ въ него буквъ и такимъ образомъ упростить его. Съ этою цѣлью опредѣлимъ изъ данныхъ пропорцій d и d' и ихъ выраженія подставимъ въ предыдущее равенство; такимъ образомъ найдемъ:

$$\frac{a'bc}{a}+\frac{ab'c'}{a'}=b'c+bc',$$

или, освободивъ отъ дробей,

$$a'^2bc+a^2b'c'=aa'b'c+aa'bc'.$$

Перенеся всѣ члены въ первую часть и вынося за скобки въ 1-мъ и 3-мъ членахъ $a'c$, а во 2-мъ и 4-мъ ac', найдемъ

$$a'c(a'b-ab')-ac'(a'b-ab')=0, \text{ или } (a'b-ab')(a'c-ac')=0 \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Это равенство замѣняетъ собою испытуемое, а потому при какихъ условіяхъ возможно (2), при такихъ же условіяхъ возможно и (1).

Но равенство (2) требуетъ, чтобы произведеніе двухъ множителей равнялось нулю; а это возможно только тогда, когда одинъ изъ нихъ равенъ нулю, поэтому слѣдуетъ положить

$$\text{или } a'b-ab'=0, \quad \text{или } a'c-ac'=0.$$

Обративъ ихъ въ пропорціи, имѣемъ

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{a'}{c'}=\frac{a}{c}.$$

Итакъ, почленное сложеніе или вычитаніе двухъ пропорцій возможно только тогда, когда будетъ удовлетворено или первое, или второе изъ этихъ равенствъ. Замѣтивъ, что $\frac{a'}{b'}$ и $\frac{a}{b}$ суть знаменатели отношеній данныхъ пропорцій, заключаемъ, что: *почленное сложеніе или вычитаніе двухъ пропорцій возможно, когда ихъ знаменатели отношеній равны.* Замѣчая, что $\frac{a'}{c'}$ и $\frac{a}{c}$ суть знаменатели отношеній пропорцій, выведенныхъ изъ данныхъ перемѣщеніемъ среднихъ членовъ, заключаемъ, что *искомое преобразованіе возможно еще тогда, когда знаменатели отношеній равны въ пропорціяхъ, выведенныхъ изъ данныхъ перемѣщеніемъ среднихъ членовъ.*

Если знаменатели отношеній данныхъ пропорцій равны, то, назвавъ общую ихъ величину буквою q, имѣемъ

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{и} \quad \frac{a'}{b'}=q, \quad \text{откуда:} \quad a=bq \quad \text{и} \quad a'=b'q$$

Складывая или вычитая эти равенства, находимъ:

$$a\pm a'=(b\pm b')q, \text{ откуда } \frac{a\pm a'}{b\pm b'}=q=\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\left(\text{какъ } \frac{a\pm a'}{b\pm b'} \text{ есть зн. отн. сложной пропорціи}\right)$ *знаменатель отношенія сложной пропорціи, полученной чрезъ почленное сложеніе или вычитаніе двухъ пропорцій, имѣющихъ равныхъ знаменателей отношеній, равенъ знаменателю отн. дан. пропорцій.*

Примѣръ I. Такъ изъ пропорцій: $\frac{10}{4}=\frac{30}{12}$ и $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$ получаемъ чрезъ почленное сложеніе: $\frac{15}{6}=\frac{45}{18}$, а чрезъ почленное вычитаніе: $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$ — пропорціи, имѣющія такого же знаменателя отношенія какъ и данныя.

Примѣръ II. Изъ пропорцій $\frac{10}{4}=\frac{30}{12}$ и $\frac{7}{2}=\frac{21}{6}$, получаемъ чрезъ почленное сложеніе и вычитанія вѣрныя пропорціи: $\frac{17}{6}=\frac{51}{18}$ и $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$.

II. *Можно перемножать почленно какія угодно пропорціи; знаменатель отношенія полученной сложной пропорціи будетъ равенъ произведенію знаменателей отношеній данныхъ пропорцій.*

Пусть даны пропарціи

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, которой знаменатель отношенія равенъ q,

$\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$, « « « q'

$\frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}$, « « « q''

Помножая почленно эти равенства по правилу умноженія дробей, найдемъ

$$\frac{a.a'.a''}{b.b'.b''}=\frac{c.c'.c''}{d.d'.d''}.$$

Знаменатель отношенія этой пропорціи равенъ $\frac{aa'a''}{bb'b''}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}\cdot\frac{a''}{b''}=q.q'q''$ т. е. произведенію знаменателей отношеній данныхъ пропорцій.

III. *Можно одну пропорцію раздѣлить почленно на другую; знаменатель отношенія сложной пропорціи будетъ равенъ частному отъ раздѣленія знаменателей отношеній данныхъ пропорцій.*

Раздѣливъ пропорцію $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ на $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$, по правилу дѣленія дробей найдемъ:

$$\frac{ab'}{a'b}=\frac{cd'}{c'd}.$$

Раздѣливъ оба члена первой части на $a'b'$, а оба члена второй на $c'd'$, получимъ

$$\frac{a:a'}{b:b'}=\frac{c:c'}{d:d'}.$$

Знаменатель отношенія полученной пропорціи равенъ

$$\frac{a:a'}{b:b'}=\frac{ab'}{a'b}=\frac{a}{b}\times\frac{b'}{a'}=\frac{a}{b}:\frac{a'}{b'}=q:q',$$

если знаменатели отношеній данныхъ пропорцій обозначить соотвѣтственно буквами q и q'.

IV. *Если въ двухъ пропорціяхъ предыдущіе члены равны, то изъ послѣдующихъ можно составить пропорцію; если же послѣдующіе равны, то предыдущіе пропорціональны.*

Въ самомъ дѣлѣ, если въ пропорціяхъ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a}{b'}=\frac{c}{d'}$$

перемѣнимъ мѣста среднихъ, то найдемъ

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a}{c}=\frac{b'}{d'},$$

откуда

$$\frac{b}{d}=\frac{b'}{d'} \quad \text{или} \quad \frac{b}{b'}=\frac{d}{d'}.$$

Такимъ же образомъ, взявъ двѣ пропорціи съ равными послѣдующими членами

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a'}{b}=\frac{c'}{d}$$

и перемѣстивъ въ нихъ средніе члены, найдемъ

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \text{и} \quad \frac{a'}{c'}=\frac{b}{d},$$

откуда

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'} \quad \text{или} \quad \frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}.$$

V. *Если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма всѣхъ предыдущихъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ любой изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему.*

Пусть даны равныя отношенія

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots\ldots\ldots=\frac{a_n}{b_n};$$

если назовемъ общаго знаменателя этихъ отношеній буквою q, то:

$$\frac{a_1}{b_1}=q;\quad \frac{a_2}{b_2}=q;\quad \frac{a_3}{b_3}=q;\quad \ldots\ldots\quad \frac{a_n}{b_n}=q;$$

Выражая дѣлимое чрезъ дѣлителя и частное, имѣемъ:

$$a_1=b_1q;\ a_2=b_2q;\ a_3=b_3q;\ \ldots\ldots;\ a_n=b_nq\ \ldots\ (1).$$

Сложивъ почленно эти равенства и во второй части вынеся за скобки q, найдемъ:

$$a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n=(b_1+b_2+b_3+\ \ldots\ +b_n)q.$$

Раздѣливъ обѣ части на $b_1+b_2+\ldots+b_n$ и сокративъ вторую часть на это выраженіе, получимъ во второй части q, или $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ и т. д:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n}{b_1+b_2+b_3+\ \ldots\ +b_n}=q=\frac{a'}{b'}=\frac{a_2}{b_3}=\ \ldots$$

что и требовалось доказать.

VI. *Если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній, то сумма всѣхъ предыдущихъ, умноженныхъ на какія угодно количества, такъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, умноженныхъ соотвѣтственно на тѣ-же самыя количества, какъ любой изъ предыдущихъ относится къ своему послѣдующему.*

Умноживъ равенства (1) пункта V соотвѣтственно на m_1, m_2, m_3, ..., m_n, а затѣмъ поступая по предыдущему, найдемъ:

$$\frac{a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3+\ \ldots\ +a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3+\ \ldots\ +b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b^2}=\ \ldots$$

VII. Возвысивъ равныя отношенія $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ \ldots\ =\frac{a_n}{b_n}$ въ m-ую степень, найдемъ

$$\frac{a_1^m}{b_1^m}=\frac{a_2^m}{b_2^m}=\frac{a_3^m}{b_3^m}=\ \ldots\ =\frac{a_n^m}{b_n^m},$$

откуда (на осн. V), получаемъ

$$\frac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\ \ldots\ +a_n^m}{b_1^m+b_2^m+b_3^m+\ \ldots\ +b_n^m}=\frac{a_1^m}{b_1^m}=\frac{a_2^m}{b_2^m}=\ \ldots$$

а по извлеченіи корня m-го порядка:

$$\frac{\sqrt[m]{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\ \ldots\ +a_n^m}}{\sqrt[m]{b_1^m+b_2^m+b_3^m+\ \ldots\ +b_n^m}}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ \ldots$$

О пропорціональности величинъ.

330. Опредѣленія. I. Когда двѣ величины A и B зависятъ одна отъ другой такъ, что отношеніе двухъ какихъ угодно значеній первой равно отношенію соотвѣтствующихъ значеній второй, то такія величины называются прямо пропорціональными или просто пропорціональными.

Согласно этому опредѣленію, если изобразимъ буквами a, a', a'', a''',..... послѣдовательныя значенія величины A, а буквами b, b', b'', b''',.... соотвѣтствующія значенія величины B, то A и B—прямо пропорціональны, если

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},\ \frac{a}{a''}=\frac{b}{b''},\ \frac{a}{a'''}=\frac{b}{b'''},\ \ldots\ \text{или}\ \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ \ldots$$

Примѣры. Цѣна провизіи пропорціональна ея вѣсу; жалованье рабочаго пропорціонально времени его работы; окружность круга пропорціональна его діаметру; вѣсъ однороднаго тѣла пропорціоналенъ его объему; пространство, проходимое равномѣрно движущимся тѣломъ, пропорціонально времени движенія; и т. п.

II. Когда двѣ величины A и B находятся въ такой зависимости одна отъ другой, что отношеніе двухъ какихъ либо значеній первой равно обратному отношенію соотвѣтствующихъ значеній второй,—такія величины называются обратно пропорціональными.

Согласно этому опредѣленію, если буквами a, a' a'' a''', ... назовемъ нѣкоторыя значенія величины A, а буквами b, b', b'', b''', ... соотвѣтствующія значенія величины B, то A и B обратно пропорціональны, если

$$\frac{a}{a'}=\frac{b'}{b},\ \frac{a}{a''}=\frac{b''}{b},\ \frac{a}{a'''}=\frac{b'''}{b},\ \ldots\ \text{или}\ a.b=a'.b'=a''.b''=a'''.b'''=\ \ldots$$

Примѣры. Время, необходимое для окончанія нѣкоторой работы, вообще обратно пропорціонально числу рабочихъ; скорость равномѣрнаго движенія обратно пропорціональна времени, необходимому для прохожденія опредѣленнаго разстоянія; объемъ газа, при постоянной температурѣ, обратно пропорціоналенъ давленію, подъ которымъ газъ находится; и т. п.

331. Какимъ образомъ доказывается пропорціональность величинъ. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ пропорціональность величинъ очевидна, или принимается за таковую, напр. пропорціональность капитала и прибыли, платы рабочаго и времени, въ теченіи котораго онъ работалъ. Затѣмъ, пропорціональность нѣкоторыхъ величинъ строго доказывается въ тѣхъ наукахъ, къ которымъ величины эти спеціально принадлежатъ; такъ въ геометріи доказывается пропорціональность сходственныхъ сторонъ подобныхъ треугольниковъ, пропорціональность окружностей ихъ радіусамъ, и т. п.; въ физикѣ доказывается пропорціональность плотности газа и давленія, и т. п.

Если же изученіе разсматриваемыхъ величинъ не подлежитъ спеціально никакой наукѣ, то въ ихъ пропорціональности (прямой или обратной) убѣждаются слѣдующимъ образомъ.

I. Если окажется, что въ то время какъ величина A принимаетъ значенія въ два, три, четыре, ... разъ большія или меньшія, другая величина B,

соотвѣтственно этому, принимаетъ значенія также въ два, три, четыре, ... разъ большія или меньшія, то величины A и B прямо пропорціональны.

Въ самомъ дѣлѣ пусть соотвѣтственно значеніямъ A, равнымъ a, $2a$, $3a$, ... , $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, ... величина B принимаетъ значеніе b, $2b$, $3b$, . . . $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{3}b$, . . . ; требуется доказать, что если A приметъ значеніе равное $\frac{5}{7}a$, то соотвѣтствующее значеніе B будетъ $\frac{5}{7}b$. Для доказательства можно принять, что A получаетъ значеніе равное $\frac{5}{7}a$ въ два пріема, т. е. что сперва изъ a обращается въ $\frac{1}{7}a$, а затѣмъ изъ $\frac{1}{7}a$ превращается въ $\frac{5}{7}a$. Но по условію когда A получиетъ значеніе $\frac{1}{7}a$, въ 7 разъ меньшее a, то B получаетъ значеніе $\frac{1}{7}b$, въ 7 разъ меньшее b. Затѣмъ, опять по условію, когда A изъ $\frac{1}{7}a$ превращается въ $\frac{5}{7}a$, увеличиваясь въ 5 разъ, то B увеличивается во столько же разъ, и слѣд. изъ $\frac{1}{7}b$ обращается въ $\frac{5}{7}b$. Такимъ образомъ теорема доказана для всѣхъ случаевъ, когда одна изъ величинъ измѣняется въ *соизмѣримое* число разъ. Но если величина A изъ a обращается въ $a.\sqrt{2}$, измѣняясь въ несоизмѣримое число разъ, то легко доказать, что соотвѣтственно этому и B изъ b обратится въ $b.\sqrt{2}$; въ самомъ дѣлѣ, замѣняя $\sqrt{2}$ приближенными *соизмѣримыми* дробями (1, 4; 1, 41; 1, 414 и т. д.) неограниченно приближающимися къ предѣлу $\sqrt{2}$, каждый разъ будетъ находить, что во сколько разъ измѣняется A, во столько же разъ и B; это заключеніе вѣрно, слѣд., и въ предѣлѣ.

II. Если окажется, что соотвѣтственно значеніямъ A, равнымъ a, $2a$, $3a$, ... $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, ... , величина B принимаетъ значенія, во столько же разъ меньшія или большія, т. е. b, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{3}b$, ... $2b$, $3b$, ... , то величины A и B обратно пропорціональны.

Требуется доказать, что если A приметъ значеніе $\frac{5}{7}a$, то соотвѣтствующее значеніе B будетъ $\frac{7}{5}b$. Въ самомъ дѣлѣ, когда A, вначалѣ имѣвшее величину a, обращается въ $\frac{1}{7}a$, т. е. уменьшается въ 7 разъ, то B, по условію, во столько же разъ увеличивается, и слѣд. изъ b превращается въ $7b$; за тѣмъ, когда A изъ $\frac{1}{7}a$ обращается въ $\frac{5}{7}a$, увеличиваясь въ 5 разъ, то B, соотвѣтственно этому, уменьшается въ 5 разъ, и потому изъ $7b$ превращается въ $\frac{7}{5}b$. Теорема такимъ образомъ доказана для всѣхъ случаевъ, когда отношеніе соизмѣ-

римо; а отсюда, по способу предѣловъ, легко заключить, что она распространяется и на случай отношеній несоизмѣримыхъ.

Примѣры. 1. Если принять, что для исполненія работы въ два, три, четыре и т. д. разъ большей или меньшей нужно рабочихъ въ два, три, четыре и т. д. разъ больше или меньше, то заключаемъ, что и во всѣхъ случаяхъ количество исполненной работы пропорціонально числу рабочихъ.

2. Въ физикѣ доказывается, что когда давленіе, подъ которымъ газъ находится, увеличивается или уменьшается въ два, три и т. д. разъ, объемъ газа уменьшается или увеличивается во столько-же разъ; заключаемъ, что во всѣхъ случаяхъ объемъ газа обратно пропорціоналенъ давленію.

332. Пусть будутъ X и У двѣ прямо—пропорціональныя величины, напр. вѣсъ товара и цѣна его. Пусть будутъ, затѣмъ, x' и x'' два частныя значенія первой, а y' и y'' два частныя значенія второй величины, соотвѣтствующія x' и x''. По опредѣленію прямо пропорціональныхъ величинъ, отношеніе двухъ какихъ-либо значеній первой величины равно отношенію соотвѣтствующихъ значеній второй, слѣд.

$$\frac{x'}{x''}=\frac{y'}{y''};$$

перемѣнивъ мѣста среднихъ членовъ, имѣемъ

$$\frac{x'}{y'}=\frac{x''}{y''}.$$

Такъ какъ разсматриваемыя значенія совершенно произвольны, то можно сказать, что *отношеніе* двухъ какихъ угодно соотвѣтственныхъ значеній пропорціональныхъ величинъ *постоянно.* Обозначивъ эту постоянную величину буквою K, имѣемъ

$$\frac{X}{У}=K, \quad \text{откуда} \quad X=K.У,$$

т. е. *изъ двухъ прямо—пропорціональныхъ величинъ одна равняется другой, умноженной на постоянное количество, называемое коэффиціентомъ пропорціональности.*

Опредѣливъ изъ опыта или наблюденія два соотвѣтственныя частныя значенія разсматриваемыхъ величинъ, и взявъ ихъ отношеніе, найдемъ коэффиціентъ пропорціональности, т. е. числовую величину отношенія, связывающаго двѣ величины.

Если X и У—величины обратно—пропорціональныя, то, по опредѣленію, имѣемъ

$$\frac{x'}{x''}=\frac{y''}{y'},$$

или приравнявъ произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ:

$$x'.y'=x''.y''.$$

Такъ какъ взятыя значенія произвольны, то можно сказать, что *произведеніе* двухъ какихъ угодно соотвѣтственныхъ значеній двухъ обратно—пропорціональныхъ величинъ — *постоянно.* Обозначивъ это постоянное буквою K, имѣемъ

$$X.У=K, \quad \text{откуда} \quad X=\frac{K}{У},$$

т. е. *изъ двухъ обратно-пропорціональныхъ величинъ одна равна постоянному коэффиціенту, дѣленному на другую.*

Коэффиціентъ опредѣляется опытомъ или наблюденіемъ.

Разсмотримъ теперь нѣсколько величинъ. Когда измѣненіе величины зависитъ отъ измѣненія нѣсколькихъ другихъ величинъ, то, говоря, что разсматриваемая величина прямо или обратно пропорціональна другой, разумѣютъ при этомъ, что всѣ другія величины въ моментъ сравненія двухъ взятыхъ величинъ остаются постоянными.

Примѣръ I. Говоря, что *простыя процентныя деньги прямо—пропорціональны капиталу и времени обращенія*, разумѣютъ подъ этимъ, что процентныя деньги, приносимыя въ опредѣленное время, измѣняются въ томъ же отношеніи, какъ и капиталъ, и что процентныя деньги, приносимыя однимъ и тѣмъ же капиталомъ, измѣняются въ томъ же отношеніи какъ продолжительность обращенія его.

Примѣръ II. — Говоря, что *объемъ газа прямо пропорціоналенъ его вѣсу и биному расширенія и обратно пропорціоналенъ давленію*, разумѣютъ подъ этимъ, что: при данныхъ—температурѣ и давленіи объемъ газа измѣняется въ томъ же отношеніи какъ его вѣсъ; при данныхъ—температурѣ и вѣсѣ объемъ газа находится въ обратномъ отношеніи къ давленію; наконецъ, при данномъ давленіи и данномъ вѣсѣ, объемъ газа прямо пропорціоналенъ биному расширенія.

Обозначимъ разсматриваемыя величины буквами x, A, B, P и Q, и пусть x прямо пропорціоналенъ A и B и обратно пропопорціоналенъ P и Q. Пусть два ряда соотвѣтственныхъ частныхъ значеній этихъ величинъ будутъ

$$x',\ a',\ b',\ p',\ q'$$
$$x'',\ a'',\ b'',\ p'',\ q'',$$

и выразимъ x'' черезъ остальныя величины.

Разсматривая величины x и A, полагаемъ, что остальныя величины остаются безъ перемѣны, т. е. въ то время какъ x и A измѣняются, тѣ величины сохраняютъ неизмѣнныя значенія b', p', и q'. Въ то время какъ A изъ a' переходитъ въ a'', величина x переходитъ изъ x' въ такую величину X, которая удовлетворяетъ равенству

$$\frac{X}{x'}=\frac{a''}{a'},\quad \text{откуда}\qquad X=\frac{a''}{a'}\cdot x'\ldots\ldots\ldots (1)$$

ибо x и A прямо пропорціональны.

При измѣненіи x и B другія величины сохраняютъ значенія a'', p' и q'; при переходѣ B изъ b' въ b'', x переходитъ изъ X, соотвѣтствующаго количеству b', въ такое значеніе X', которое удовлетворяетъ пропорціи

$$\frac{X'}{X}=\frac{b''}{b'},\quad \text{откуда}\qquad X'=\frac{b''}{b'}\cdot X\ldots\ldots\ldots (2),$$

такъ какъ x и B прямо пропорціональны.

Разсмотримъ x и P. Другія величины сохраняютъ значенія a'', b'', q'; при переходѣ P изъ p' въ p'', x перейдетъ изъ X', соотвѣтствующаго p', въ X''—удовлетворяющее пропорціи

$$\frac{X''}{X'}=\frac{p'}{p''}, \quad \text{откуда} \quad X''=\frac{p'}{p''}\cdot X' \ldots\ldots (3),$$

ибо x и P обратно пропорціональны.

Наконецъ, разсмотримъ x и Q, причемъ остальныя величины сохраняютъ значенія a'', b'', p''. При переходѣ Q изъ q' въ q'', x переходитъ изъ X'' въ такую величину x'', которая соотвѣтствуетъ ряду a'', b'', p'', q''. Эта величина x'' удовлетворяетъ пропорціи

$$\frac{x''}{X''}=\frac{q'}{q''}, \quad \text{откуда} \quad x''=\frac{q'}{q''}\cdot X'' \ldots\ldots (4),$$

ибо x и Q величины обратно пропорціональныя.

Для исключенія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ X, X′, X″, перемножимъ почленно равенства (1), (2), (3) и (4); найдемъ

$$X.X'.X''.x''=X.X'.X''x'.\frac{a''}{a'}\cdot\frac{b''}{b'}\cdot\frac{p'}{p''}\cdot\frac{q'}{q''}.$$

Сокративъ на X.X′.X″, получимъ

$$x''=x'.\frac{a''}{a'}\cdot\frac{b''}{b'}\cdot\frac{p'}{p''}\,\frac{q'}{q''}.$$

Положивъ

$$\frac{x'.p'.q'}{a'.b'}=K,$$

гдѣ x', a', b', p' и q' представляютъ рядъ соотвѣтственныхъ частныхъ значеній разсматриваемыхъ величинъ, найдемъ

$$x''=K.\frac{a''b''}{p''q''}.$$

Такъ какъ это равенство относится къ ряду какихъ угодно соотвѣтственныхъ значеній взятыхъ величинъ, можно замѣнить эти частныя значенія общими символами, и написать

$$x=K.\frac{AB}{PQ}.$$

Опредѣливъ изъ опыта или наблюденія рядъ частныхъ соотвѣтственныхъ значеній данныхъ величинъ, найдемъ численную величину *коэффиціента* K, связывающаго данныя величины.

Если-бы разсматриваемыя величины были только x, A и B, то имѣли-бы

$$x=K.AB,$$

т. е. если величина прямо пропорціональна нѣсколькимъ другимъ, то она равна ихъ произведенію, умноженному на постоянный коэффиціентъ.

Если бы взяты были только величины x, P и Q, то имѣли-бы

$$x=\frac{K}{PQ},$$

т. е. величина, обратно пропорціональная нѣсколькимъ другимъ, равна постоянному коэффиціенту, дѣленному на произведеніе этихъ величинъ.

Наконецъ, изъ формулы

$$x = K.\frac{AB}{PQ}$$

слѣдуетъ, что величина, прямо пропорціональная одному ряду величинъ, и обратно—пропорціональная другому, равна постоянному коэффиціенту, помноженному на произведеніе перваго ряда величенъ, и дѣленному на произведеніе втораго ряда.

Гармоническая пропорція.

333. Если три количества a, b и c удовлетворяютъ пропорціи

$$a : c = (a - b) : (b - c),$$

т. е. если первое такъ относится къ третьему, какъ разность между первымъ и вторымъ къ разности между вторымъ и третьемъ, то они называются *гармонически — пропорціональными*; приэтомъ b называется гармоническою срединою между a и c.

Приравнявъ произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ, найдемъ $ab - ac = ac - bc$; а раздѣливъ обѣ части этого равенства на abc, найдемъ

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a},$$

откуда

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что если b есть гармоническая средина между a и c, то $\frac{1}{b}$ есть ариѳметическая средина между $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$.

334. Теорема. *Ариѳметическая, геометрическая и гармоническая средины двухъ какихъ-нибудь чиселъ составляютъ непрерывную геометрическую пропорцію.*

Пусть x, y и z будутъ: гармоническая, геометрическая и ариѳметическая средины чиселъ a и b; т. е.

$$a : b = (a - x) : (x - b); \quad y^2 = ab; \quad z = \frac{a + b}{2}.$$

Приравнявъ въ первой произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ находимъ

$$ax - ab = ab - bx;$$

прибавивъ къ обѣимъ частямъ по $bx + ab$, находимъ

$$ax + bx = 2ab; \quad \text{или} \quad 2zx = 2y^2; \quad \text{или} \quad zx = y^2,$$

откуда

$$x : y = y : z.$$

Примѣчаніе. Поводомъ къ названію разсматриваемой пропорціи гармоническою послужило замѣчаніе, что числа 1, $\frac{4}{5}$ и $\frac{2}{3}$, представляющія длины струнъ, дающихъ совершенный аккордъ (*ut*, *mi*, *sol*), удовлетворяютъ этой пропорціи.

Приложенія.

335. I. Раздѣлить число A на части пропорціональныя даннымъ числамъ a, b, c?

Это значитъ найти три такія числа, которыхъ сумма равнялась бы A, и которыя удовлетворяли бы равенствамъ

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

По свойству равныхъ отношеній имѣемъ:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c};$$

но $x+y+z=\mathrm{A}$, слѣд. для опредѣленія x, y и z имѣемъ три равенства

$$\frac{x}{a}=\frac{\mathrm{A}}{a+b+c};\quad \frac{y}{b}=\frac{\mathrm{A}}{a+b+c};\quad \frac{z}{c}=\frac{\mathrm{A}}{a+b+c},$$

откуда

$$x=\frac{\mathrm{A}a}{a+b+c};\quad y=\frac{\mathrm{A}b}{a+b+c};\quad z=\frac{\mathrm{A}c}{a+b+c}.$$

II. Три купца внесли для общей торговли капиталы: A, A′ и A″, находившіеся въ оборотѣ: первый — t лѣтъ, второй — t', третіи — t'' лѣтъ. Сколько каждый купецъ долженъ получить изъ общей прибыли B?

Части каждаго должны быть прямо пропорціональны капиталамъ и временамъ ихъ обращенія; а слѣд. эти части должны быть пропорціональны произведеніямъ капиталовъ на соотвѣтствующія времена; итакъ, имѣемъ

$$x+y+z=\mathrm{B} \quad \text{и} \quad \frac{x}{\mathrm{A}t}=\frac{y}{\mathrm{A}'t'}=\frac{z}{\mathrm{A}''t''},$$

откуда, подобно предыдущему, найдемъ

$$x=\frac{\mathrm{B.A}t}{\mathrm{A}t+\mathrm{A}'t'+\mathrm{A}''t''};\quad y=\frac{\mathrm{B.A}'t'}{\mathrm{A}t+\mathrm{A}'t'+\mathrm{A}''t''};\quad z=\frac{\mathrm{B.A}''t''}{\mathrm{A}t+\mathrm{A}'t'+\mathrm{A}''t''}.$$

III. Рѣшить уравненія

$$ax+by+cz=d,\quad \frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}.$$

Умноживъ оба члена перваго отношенія на a, втораго на b, третьяго на c, получимъ

$$\frac{ax}{am}=\frac{by}{bn}=\frac{cz}{cp}.$$

Отсюда, по свойству равныхъ отношеній, выводимъ:

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{ax+by+cz}{am+bn+cp}=\frac{d}{am+bn+cp},$$

а отсюда:

$$x=\frac{dm}{am+bn+cp};\quad y=\frac{dn}{am+bn+cp};\quad z=\frac{dp}{am+bn+cp}.$$

IV. Рѣшить систему уравненій

$$ax=by=cz=du. \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=\frac{1}{m} \quad \ldots \ldots \ldots (2).$$

Уравненія (1) можно представить въ видѣ

$$\frac{a}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{b}{\left(\frac{1}{y}\right)}=\frac{c}{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{d}{\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

Но въ ряду равныхъ отношеній сумма всѣхъ предыдущихъ членовъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему; такимъ образомъ, замѣчая, что въ силу ур-нія (2), сумма послѣдующихъ членовъ равна $\frac{1}{m}$, получимъ:

$$\frac{a+b+c+d}{\frac{1}{m}}=\frac{a}{\frac{1}{x}}=\frac{b}{\frac{1}{y}}=\frac{c}{\frac{1}{z}}=\frac{d}{\frac{1}{u}},$$

откуда

$$x=(a+b+c+d)\frac{m}{a}$$

$$y=(a+b+c+d)\frac{m}{b}$$

$$z=(a+b+c+d)\frac{m}{c}$$

$$u=(a+b+c+d)\frac{m}{d}.$$

V. — Рѣшить уравненіе

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{b}{c}.$$

Во всякой пропорціи сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности такъ, какъ сумма членовъ втораго отношенія къ ихъ разности; слѣдовательно

$$\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\frac{b+c}{b-c}.$$

Возвысивъ обѣ части въ квадратъ, для освобожденія неизвѣстнаго изъ подъ радикала, получаемъ

$$\frac{a+x}{a-x}=\frac{(b+c)^2}{(b-c)^2}.$$

Примѣнивъ снова тоже самое свойство пропорцій, найдемъ

$$\frac{a}{x}=\frac{(b+c)^2+(b-c)^2}{(b+c)^2-(b-c)^2}=\frac{b^2+c^2}{2bc},$$

откуда

$$x=\frac{2abc}{b^2+c^2}.$$

336. Задачи.

1. Изъ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ вывести слѣдующія:

$$\frac{ab}{cd}=\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2};\quad \frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bd}};\quad \frac{(a-c)(la^2+mac+nc^2)}{(b-d)(lb^2+mbd+nd^2)}=\frac{a^3-c^3}{b^3-d^3}$$

2. Если имѣемъ рядъ равныхъ отношеній

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{f}{g}=\frac{h}{k}=\frac{i}{l},$$

то доказать, что

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}+\sqrt{fg}+\sqrt{hk}+\sqrt{il}=\sqrt{(a+c+f+h+i)(b+d+g+k+l)}\cdot$$

3. Доказать, что пропорція

$$\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{m'a+n'c}{m'b+n'd}$$

имѣетъ слѣдствіемъ одну изъ пропорцій:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \text{или}\ \ \frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}.$$

4. Найти два числа, которыхъ разность равнялась бы D, и которыя были бы пропорціональны a и b.

5. Найти три числа, которыя были бы пропорціональны a, b и c, и которыхъ сумма квадратовъ равнялась бы данному числу N.

6. Опытъ показываетъ, что если на вертикальный стержень, котораго одинъ конецъ укрѣпленъ, дѣйствуетъ нѣкоторый грузъ, растягивая стержень, то перемѣнное сопротивленіе, противопоставляемое стержнемъ, пропорціонально его сѣченію и отношенію приращенія длины къ первоначальной длинѣ. Составить алгебраическое выраженіе сопротивленія F для нѣкотораго сѣченія A, если первоначальная длина $=$ L, а перемѣнное удлинненіе $=x$.

7. На желѣзной дорогѣ тяга локомотива должна побѣждать треніе колесъ о рельсы и сопротивленіе воздуха. Треніе пропорціонально вѣсу поѣзда, но не зависитъ отъ его скорости; сопротивленіе воздуха, будучи независимо отъ вѣса поѣзда, пропорціонально квадрату его скорости. Составить формулу, которая выражала бы тягу для какихъ угодно—вѣса и скорости, если величина тренія для даннаго вѣса P равна F, а величина сопротивленія воздуха для скорости V равна R.

ГЛАВА XXIV.

Неравенства первой степени.

Опредѣленія. — Общія начала. — Начала, относящіяся къ совмѣстнымъ неравенствамъ. — Провѣрка неравенствъ. — Доказательство нѣкоторыхъ замѣчательныхъ неравенствъ. — Рѣшеніе неравенствъ первой степени съ однимъ и со многими неизвѣстными. — Задачи.

Опредѣленія.

337. Если разность двухъ количествъ a и b равна положительному числу p, то изъ равенства $a-b=p$ находимъ: $a=b+p$, откуда видно, что количество a превышаетъ b на p единицъ.

Если же разность между a и b равна отрицательному числу $-p$, то изъ условія $a-b=-p$ находимъ: $a=b-p$, откуда видно, что a меньше b на p единицъ.

Отсюда вытекаетъ *опредѣленіе: количество a считается большимъ b, каковы-бы ни были ихъ знаки, если разность $a-b$ положительна*; наоборотъ, *a считается меньшимъ b, если разность $a-b$ отрицательна.*

Обратно: если a больше b, то это значитъ, что a равно b, сложенному съ положительнымъ числомъ p: $a=b+p$, откуда $a-b=p$; если a меньше b, то это значитъ, что a равно b безъ нѣкотораго положительнаго числа p, т. е. $a=b-p$, откуда $a-b=-p$.

Итакъ: *каковы-бы ни были знаки количествъ a и b, если a больше b, разность $a-b$ положительна, если же a меньше b, эта разность отрицательна.*

Слѣдствія. Изъ данныхъ опредѣленій можно вывести всѣ свойства относительно сравнительной величины положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ.

1. Изъ двухъ положительныхъ чиселъ то больше, котораго абсолютная величина больше.

Такъ, $+10$ больше $+6$, потому-что разность $+10-(+6)$ равна положительному числу $+4$.

2. Всякое положительное число больше нуля.

Такъ, $+5>0$, потому-что разность $+5-0$ равна положительному числу $+5$.

3. Всякое положительное число больше всякаго отрицательнаго.

Такъ, $+2>-7$, ибо разность $+2-(-7)$ положительна и равна $+9$.

4. Изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ-то больше, котораго абсолютная величина меньше.

Напр. -3 больше -8, ибо разность $-3-(-8)$ равна положительному числу $+5$.

5. Ноль больше всякаго отрицательнаго числа.

Такъ, $0>-4$, ибо разность $0-(-4)$ равна $+4$, числу положительному.

Отсюда вытекаетъ, что если написать рядъ положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, такъ чтобы ихъ абсолютныя величины шли возрастая въ обѣ стороны отъ нуля:

$$-\infty, \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots +\infty,$$

то любое число, взятое въ этомъ ряду, больше каждаго числа, находящагося влѣво отъ него, и меньше каждаго числа, стоящаго справа отъ него.

Если подразумѣвать въ этомъ ряду между цѣлыми числами и дроби и несоизмѣримыя числа, то получимъ *рядъ всевозможныхъ дѣйствительныхъ чиселъ.*

Такъ какъ всякое положительное число больше нуля, а всякое отрицательное меньше нуля, то желая выразить, что число a положительно, пишутъ, что оно больше нуля:

$$a > 0;$$

а желая выразить, что число b отрицательно, пишутъ, что оно меньше нуля:

$$b < 0.$$

338. Соединеніе двухъ неравныхъ величинъ знакомъ неравенства называется *неравенствомъ*; такъ

$$7 > 5, \qquad a < b$$

суть неравенства. Выраженія, находящіяся по ту и по другую сторону знака неравенства, называются *частями* неравенства: находящееся слѣва отъ этого знака, называется *первою частью* неравенства, а стоящее справа — *второю частью* его.

Подобно равенствамъ, неравенства бываетъ двоякаго рода: одни, какъ напр. $a^2+b^2>2ab$, имѣютъ мѣсто при всякихъ частныхъ значеніяхъ буквъ, въ нихъ входящихъ; другія, каково напримѣръ $2ax^2+bx+c>0$, имѣютъ мѣсто только при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ этихъ буквъ.

Такимъ образомъ, по отношенію къ неравенствамъ подлежатъ рѣшенію два вопроса: 1) провѣрка такихъ неравенствъ, которыя справедливы при всѣхъ значеніяхъ буквъ; и 2) опредѣленіе тѣхъ значеній неизвѣстныхъ, которыя удовлетворяютъ неравенству, имѣющему мѣсто при частныхъ значеніяхъ буквъ.

Рѣшеніе этихъ вопросовъ основано на слѣдующихъ началахъ.

Общія начала.

339. Опредѣленіе. — Два неравенства называются *тождественными* между собою, если второе есть слѣдствіе перваго, и обратно—первое есть слѣдствіе втораго.

340. Начало I. — *Неравенства*

$$A > B \ldots (1) \qquad \text{и} \qquad A - B > 0 \ldots (2)$$

тождественны, каковы бы ни были знаки количествъ A *и* B.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) если A больше B, то разность A — B положительна т. е: больше нуля; слѣд. неравенство (2) вытекаетъ изъ (1); 2) обратно, если разность A — B больше нуля, т. е. положительна, то количество A больше B:

значитъ, неравенство (1) есть слѣдствіе неравенства (2). Тождественность неравенствъ (1) и (2) доказана.

Подобнымъ же образомъ доказывается, что *неравенства*

$$a < b \quad \text{и} \quad a - b < 0$$

тождественны, каковы бы ни были знаки количествъ a *и* b.

341. Начало II. — *Придавая къ обѣимъ частямъ неравенства одно и тоже количество, положительное или отрицательное, и не перемѣняя знакъ неравенства, получимъ новое неравенство, тождественное съ даннымъ.*

То-есть, если данное неравенство есть

$$A > B \;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

и M — произвольное количество, положительное или отрицательное, то требуется доказать, что неравенство

$$A + M > B + M \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

тождественно съ (1). Въ самомъ дѣлѣ:

1) Если дано, что

$$A > B,$$

то это значитъ, по опредѣленію, что разность A — B положительна, и слѣд., изъ (1) вытекаетъ неравенство

$$A - B > 0;$$

прибавивъ къ первой части M и вычтя изъ нея M, мы не измѣнимъ разности A — B, а потому и

$$(A + M) - (B + M) > 0,$$

откуда, по опредѣленію, имѣемъ

$$A + M > B + M.$$

Итакъ, неравенство (2) есть слѣдствіе перваго.

2) Если дано, что

$$A + M > B + M,$$

то разность между первою и второю суммою положительна, т. е.

$$(A + M) - (B + M) > 0,$$

или

$$A - B > 0,$$

откуда, по опредѣленію,

$$A > B,$$

т. е. неравенство (1) есть слѣдствіе втораго.

Тождественность неравенствъ (1) и (2) доказана.

Подобнымъ же образомъ доказали бы, что вычтя изъ обѣихъ частей одно и тоже количество, найдемъ неравенство тождественное данному.

Слѣдствіе I. — *Можно переносить члены изъ одной части неравенства въ другую, перемѣняя у переносимыхъ членовъ знаки.*

Такъ, имѣя неравенство

$$ax - b > cx + d \;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

и придавъ къ обѣимъ частямъ его по $-cx+b$, найдемъ

$$ax-b-cx+b>ex+d-cx+b,$$

или, по приведеніи подобныхъ членовъ,

$$ax-cx>d+b \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

По доказанному, неравенство (2) тождественно (1) и слѣд. можетъ его замѣнять. Сравнивая ихъ, замѣчаемъ, что членъ $-b$ перешолъ изъ первой части во вторую со знакомъ $+$, а членъ cx изъ второй части въ первую со знакомъ $-$. Такимъ образомъ, правило перенесенія членовъ изъ одной части неравенства въ другую ничѣмъ не отличается отъ правила перенесенія членовъ изъ одной части уравненія въ другую.

Слѣдствіе II. — *Всякое неравенство можно привести къ виду*

$$A>0,$$

т. е. къ неравенству, вторая часть котораго есть ноль.

Въ самомъ дѣлѣ, достаточно для этого всѣ члены собрать въ первую часть. Такъ, неравенство

$$5x^2-7x+1>2x^2+3x+4$$

тождественно неравенству

$$3x^2-10x-3>0.$$

342. Начало III. *Помножая обѣ части неравенства на одно и тоже количество* — **существенно — положительное**, *и не перемѣняя знакъ неравенства, получимъ новое неравенство, тождественное съ даннымъ.*

Требуется доказать, что неравенство

$$A>B \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

тождественно съ неравенствомъ

$$AM>BM \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

при условіи: $M>0$.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) неравенство $A>B$ тождественно съ

$$A-B>0;$$

помноживъ положительное количество $A-B$ на положительное количество M, получимъ и произведеніе положительное, слѣд.

$$(A-B)M>0, \quad \text{или} \quad AM-BM>0,$$

откуда

$$AM>BM.$$

Итакъ, доказано, что изъ неравенства (1) слѣдуетъ (2).

2) Обратно: перенеся въ неравенствѣ $AM>BM$ вторую часть въ первую, найдемъ

$$AM-BM>0, \quad \text{или} \quad (A-B)M>0;$$

но множитель M положительнаго произведенія $(A-B)M$ положителенъ, слѣд. и другой множитель долженъ быть положителенъ, т. е.

$$A-B>0, \quad \text{откуда} \quad A>B;$$

т. е. изъ неравенства (2) вытекаетъ (1).

Тождественность неравенствъ (1) и (2) такимъ образомъ доказана.

Слѣдствіе I. — *Помножая обѣ части неравенства на одно и тоже* **существенно — отрицательное** *количество и перемѣнивъ знакъ неравенства, получимъ новое неравенство, тождественное съ даннымъ.*

Т. е. неравенство

$$A > B \ldots\ldots (1)$$

тождественно съ неравенствомъ

$$AM < BM \ldots\ldots (2)$$

при условіи: $M < 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, если M отрицательно, то — M положительно, а потому, на основаніи начала III, помноживъ обѣ части неравенства (1) на — M и сохранивъ тотъ же знакъ, получимъ неравенство

$$-AM > -BM, \ldots\ldots (3)$$

тождественное съ (1). Перенеся въ (3) члены изъ одной части въ другую, дадимъ ему видъ

$$BM > AM, \quad \text{или} \quad AM < BM.$$

Заключаемъ, что неравенство (1) тождественно со (2).

Слѣдствіе II. *Умножая обѣ части неравенства на такого множителя, котораго* **знакъ неизвѣстенъ,** *получимъ неравенство, котораго смыслъ неизвѣстенъ, т. е. неизвѣстно—больше-ли его первая часть второй, или меньше.*

Это очевидно, потому-что знакъ неравенства сохраняется, когда множитель положителенъ, и измѣняется въ противный, когда множитель отрицателенъ.

Итакъ: *Нельзя умножать обѣ части неравенства на такого множителя, котораго знакъ неизвѣстенъ.*

Слѣдствіе III. *Раздѣливъ обѣ части неравенства на одно и тоже количество* M, *и не перемѣнивъ знакъ неравенства при* $M > 0$, *и перемѣнивши его знакъ при* $M < 0$, *найдемъ неравенство тождественное съ даннымъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить на M — все равно-что помножить на $\frac{1}{M}$, а для случая умноженія теорема доказана.

343. *Приложенія.* Начало III съ вытекающими изъ него слѣдствіями имѣетъ важныя приложенія при вычисленіяхъ надъ неравенствами, а именно при *сокращеніи* неравенствъ и при *освобожденіи* ихъ *отъ дробей.*

Пусть, напр., требуется освободить отъ дробей неравенство

$$\frac{P}{Q} > \frac{R}{S} \ldots\ldots (1).$$

Собравъ его члены въ первую часть, найдемъ тождественное ему неравенство

$$\frac{P}{Q} - \frac{R}{S} > 0, \quad \text{или} \quad \frac{PS - QR}{QS} > 0 \ldots (2).$$

Умножить обѣ его части на QS нельзя, когда знаки количествъ Q и S неизвѣстны, потому-что въ такомъ случаѣ неизвѣстенъ и знакъ произведенія QS. Но каковы бы ни были знаки Q и S, квадратъ произведенія QS всегда будетъ

положителенъ, а потому умноживъ обѣ части неравенства (2) на Q^2S^2 и сохранивъ знакъ неравенства, найдемъ

$$\frac{Q^2S^2(PS-QR)}{QS}>0,\quad \text{или}\quad QS(PS-QR)>0,$$

неравенство — тождественное съ (1) и представленное въ цѣломъ видѣ.

Пользуясь слѣдствіемъ III, можно сокращать неравенство, дѣля обѣ части его на общаго множителя; но эта операція возможна, когда извѣстенъ знакъ того множителя, на который сокращаемъ. Такъ напр. если въ неравенствѣ замѣчаемъ множителя, имѣющаго видъ квадрата, или суммы квадратовъ, такихъ множителей можно сократить, не измѣняя знака неравенства; въ самомъ дѣлѣ, квадратъ всякаго количества и положительнаго, и отрицательнаго — всегда положителенъ, а слѣд. и сумма квадратовъ — такова-же. Такъ, имѣя неравенство

$$8(x^2-2x+2)(x^2+2x+1)(x-5)>0.$$

Замѣчаемъ, что множитель x^2+2x+1 есть ничто иное какъ $(x+1)^2$, и потому существенно — положителенъ; затѣмъ, множитель x^2-2x+2 равенъ $(x^2-2x+1)+1$, или $(x-1)^2+1$, т. е. представляетъ сумму двухъ квадратовъ, а потому, при всякомъ x, существенно-положителенъ. Заключаемъ, что и произведеніе $8(x^2-2x+2)(x^2+2x+1)$, при всякихъ значеніяхъ x, существенно-положительно; сократив на него данное неравенство, замѣнимъ его простѣйшимъ неравенствомъ

$$x-5>0.$$

Имѣя неравенство

$$-5a^2(x-2)<0,$$

и замѣчая, что a^2, какъ квадратъ, всегда положителенъ (каковъ бы знакъ ни имѣло количество a), заключаемъ, что $-5a^2$ — существенно отрицательно; а потому, раздѣливъ неравенство на $-5a^2$ и перемѣнивъ знакъ $<$ на $>$, найдемъ неравенство

$$x-2>0,$$

тождественное съ даннымъ, но имѣющее простѣйшій видъ.

344. Начало IV. *Если обѣ части неравенства положительны, то возвышая ихъ въ одинаковую цѣлую положительную степень и не перемѣняя знакъ неравенства, получимъ неравенство тождественное данному.*

Разсмотримъ сначала простѣйшій случай—возвышенія въ квадратъ. Если дано неравенство

$$A>B,\ \ldots\ldots\ (1)$$

въ которомъ $A>0$ и $B>0$, то доказать, что неравенство

$$A^2>B^2\ \ldots\ldots\ (2)$$

тождественно данному.

Въ самомъ дѣлѣ: 1) Изъ неравенства (1) выводимъ:

$$A-B>0;$$

но какъ A и B положительны, то и

$$A+B>0.$$

Перемноживъ два положительныя количества, найдемъ и произведенie положительное, слѣд.

$$(A - B)(A + B) > 0, \quad \text{или} \quad A^2 - B^2 > 0,$$

откуда

$$A^2 > B^2.$$

2) Обратно, если $A^2 > B^2$, то

$$A^2 - B^2 > 0, \quad \text{или} \quad (A + B)(A - B) > 0;$$

слѣдовательно оба множителя: $A + B$ и $A - B$ должны быть одного знака; но какъ $A + B$ положительно (ибо $A > 0$ и $B > 0$), то и $A - B > 0$, окуда

$$A > B.$$

Тождественность неравенствъ (1) и (2) доказана.

Слѣдствie I. *Если обѣ части неравенства отрицательны, то возвысивъ ихъ въ квадратъ и измѣнивъ знакъ неравенства, получимъ неравенство, тождественное данному.*

То-есть, если дано неравенство

$$A > B, \ldots \quad (1)$$

причемъ $A < 0$ и $B < 0$, то доказать, что неравенство

$$A^2 < B^2 \ldots \quad (2)$$

тождественно данному.

Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ обѣ части (1) на -1, найдемъ ему тождественное неравенство

$$-A < -B,$$

гдѣ уже $-A$ и $-B$ положительны, а потому, по доказанному, возвысивъ въ квадратъ и не измѣнивъ знака неравенства, получимъ

$$A^2 < B^2,$$

тождественное съ $-A < -B$, а слѣд. и съ $A > B$.

Слѣдствie II. *Если обѣ части неравенства имѣютъ противоположные знаки, то нельзя ихъ возвышать въ квадратъ, не зная ихъ численной величины.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ неравенство

$$A > B,$$

гдѣ $A > 0$ и $B < 0$, и требуется доказать, что результатъ возвышенiя въ квадратъ можетъ быть или $A^2 > B^2$, или $A^2 = B^2$, или $A^2 < B^2$.

Дѣйствительно:

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B);$$

при условiи: $A > 0$ и $B < 0$ будетъ $A - B$ положительно; но мы не знаемъ знака суммы $A + B$, а потому неизвѣстенъ и знакъ разности $A^2 - B^2$; поэтому не можемъ сказать, будетъ-ли $A^2 > B^2$, или $A^2 = B^2$, или $A^2 < B^2$.

Напримѣръ:

неравенство $+3 > -2$ приводитъ къ $+9 > +4$;
« $+3 > -5$ « « $+9 < +25$;
« $+3 > -3$ « « $+9 = +9$.

Слѣдствіе III. **Нельзя возвышать въ квадратъ такое неравенство, въ которомъ знаки частей неизвѣстны.**

Это непосредственно очевидно изъ предыдущаго.

345. Обобщеніе. *Если обѣ части неравенства положительны, то возвышая ихъ въ одинаковую цѣлую положительную степень и неизмѣняя при этомъ знакъ неравенства, получимъ неравенство тождественное данному.*

Требуется доказать, что если $A > 0$ и $B > 0$, а m — цѣлое положительное число, то неравенства

$$A > B \; . \; . \; . \; . \; (1) \quad \text{и} \quad A^m > B^m \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

тождественны.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ-какъ $B > 0$, то раздѣливъ обѣ части на B, найдемъ

$$\frac{A}{B} > 1,$$

что означаетъ, что $\frac{A}{B}$ есть неправильная дробь; но m-ая степень неправильной дроби есть также дробь неправильная, слѣд.

$$\frac{A^m}{B^m} > 1,$$

откуда, множа обѣ части на положительное количество B^m, находимъ

$$A^m > B^m.$$

Обратно, изъ неравенства (2) можно вывести (1). Въ самомъ дѣлѣ:

$$A^m - B^m = (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + \; . \; . \; . \; . \; + B^{m-1}).$$

Въ силу неравенства (2) это произведеніе > 0; но второй множитель, какъ сумма положительныхъ членовъ, положителенъ, слѣд. и $A - B > 0$, откуда

$$A > B.$$

Слѣдствія. — I. *Если количества* A *и* B *оба отрицательны, то возвышая обѣ части неравенства* $A > B$ *въ цѣлую положительную степень* m, *и не измѣняя знакъ неравенства при* m *нечетномъ, и напротивъ измѣняя его при* m *четномъ, получимъ неравенство, тождественное съ даннымъ.*

Дано неравенство

$$A > B, \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

въ которомъ $A < 0$ и $B < 0$. Положивъ $A = -A'$ и $B = -B'$, гдѣ уже A' и B' положительны, помножимъ обѣ части неравенства (1) на -1; найдемъ

$$-A < -B, \quad \text{или} \quad A' < B'.$$

Такъ какъ A' и B' положительны, то по предыдущей теоремѣ имѣемъ

$$A'^m < B'^m.$$

Изъ равенствъ $A = -A'$ и $B = -B'$ имѣемъ: $A' = (-1).A$ и $B' = (-1).B$, откуда, по возвышеніи въ m-ю степень, находимъ: $A'^m = (-1)^m A^m$ и $B'^m = (-1)^m.B^m$. Подставляя въ послѣднее неравенство, получимъ

$$(-1)^m.A^m < (-1)^m.B^m.$$

Если m—четное, то $(-1)^m$ есть число положительное; а потому, раздѣливъ на него послѣднее неравенство, не должны перемѣнять знакъ неравенства; напротивъ, при m нечетномъ, $(-1)^m < 0$ и дѣленіе неравенства на это число поведетъ за собою перемѣну знака неравенства. Такимъ образомъ, неравенство (1), въ которомъ $A < 0$ и $B < 0$, тождественно съ

$$A^m < B^m$$

при m — четномъ; и съ

$$A^m > B^m$$

при m — нечетномъ.

II. Когда части неравенства имѣютъ различные знаки, то слѣдуетъ различать два случая:

1) когда возвышаемъ неравенство въ *нечетную* степень, то степени сохранятъ тѣ знаки, какіе имѣли части неравенства, а потому и знакъ неравенства сохранится. Напр.

изъ $+2 > -7$ слѣдуетъ $(+2)^3 > (-7)^3$, или $+8 > -343$.

2) Когда возвышаемъ неравенство въ *четную* степень, то нельзя дать никакого правила: знакъ неравенства можетъ измѣниться, или же сохраниться, или даже неравенство можетъ перейти въ равенство. Такъ:

$+3 > -2$ приводитъ къ $(+3)^4 > (-2)^4$, или $+81 > +16$;
$+2 > -5$ » » $(+2)^4 < (-5)^4$, или $+16 < +625$;
$+2 > -2$ » » $(+2)^4 = (-2)^4$, или $+16 = +16$.

III. *Если обѣ части неравенства положительны, то возводя ихъ въ цѣлую отрицательную степень и перемѣняя знакъ неравенства, получимъ неравенство, тождественное съ даннымъ.*

Требуется доказать, что если

$$A > B, \quad . \; . \; . \; (1)$$

гдѣ $A > 0$ и $B > 0$, то неравенство

$$A^{-n} < B^{-n} \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

тождественно съ (1).

Такъ какъ n — число положительное, то неравенство

$$A^n > B^n \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

тождественно съ (1). Раздѣливъ обѣ части на положительное количество $A^n.B^n$, найдемъ неравенство

$$\frac{1}{B^n} > \frac{1}{A^n}, \text{ или } B^{-n} > A^{-n}, \text{ или, наконецъ,}$$

$$A^{-n} < B^{-n},$$

тождественное съ (3), а потому и съ (1).

346. Начало V. — I. *Каковы бы ни были знаки обѣихъ частей неравенства, извлекая корень нечетнаго порядка, должно сохранять знакъ неравенства.*

Это есть прямое слѣдствіе правила знаковъ при извлеченіи корня.

Такъ:

Изъ неравенства $+27 > +8$ имѣемъ: $\sqrt[3]{+27} > \sqrt[3]{+8}$, или $+3 > +2$;
» $+27 > -8$ » $\sqrt[3]{+27} > \sqrt[3]{-8}$, или $+3 > -2$;
» $-8 > -27$ » $\sqrt[3]{-8} > \sqrt[3]{-27}$, или $-2 > -3$.

2. Если же показатель корня—четный, то во-первыхъ необходимо, чтобы обѣ части неравенства были положительны (въ противномъ случаѣ корни были-бы мнимые, и не могло бы быть рѣчи о ихъ сравненіи); въ такомъ случаѣ каждый корень имѣетъ два значенія, равныя по величинѣ, но противоположныя по знаку; и неравенство сохраняетъ знакъ, или измѣняетъ его, смотря потому, беремъ-ли положительныя, или отрицательныя значенія корней. Такъ:

неравенство $+49 > +25$

даетъ $\begin{cases} \sqrt{+49} > \sqrt{+25}, & \text{или } +7 > +5; \\ -\sqrt{+49} < -\sqrt{+25}, & \text{или } -7 < -5. \end{cases}$

Но если взять корни съ различными знаками, то очевидно, что отрицательный корень всегда будетъ меньше. Такъ

неравенство $+49 > +25$

даетъ $\begin{cases} \sqrt{49} > -\sqrt{25}, & \text{или } +7 > -5; \\ -\sqrt{49} < +\sqrt{25}, & \text{или } -7 < +5. \end{cases}$

Начала, относящіяся къ совмѣстнымъ неравенствамъ.

347. — Если въ двухъ или нѣсколькихъ неравенствахъ первыя части больше вторыхъ, или первыя части меньше вторыхъ, то они называются неравенствами *одинаковаго смысла.* Такъ, неравенства

$$3 > -2 \quad \text{и} \quad a > b$$

суть два неравенства одинаковаго смысла.

Если же въ одномъ неравенствѣ первая часть больше второй, а въ другомъ первая меньше второй части, то ихъ называютъ неравенствами *противоположнаго смысла.* Таковы

$$a > b \quad \text{и} \quad c < d.$$

348. Начало VI. — *Складывая почленно два или нѣсколько неравенствъ одинаковаго смысла, получимъ неравенство того же смысла; но оно не можетъ замѣнить одного изъ данныхъ.*

Пусть данныя неравенства будутъ

$$A > B \quad \text{и} \quad A' > B'.$$

Изъ нихъ слѣдуетъ, что разности $A-B$ и $A'-B'$ положительны, а потому и сумма ихъ положительна; слѣд.

$$A-B+A'-B'>0,$$

откуда, перенеся B и B' во вторую часть, найдемъ

$$A+A'>B+B'.$$

Но это неравенство не можетъ замѣнить одного изъ данныхъ, иначе говоря, система:

$$\left.\begin{array}{r} A>B \\ A+A'>B+B' \end{array}\right\}$$

не имѣетъ *необходимымъ* слѣдствіемъ:

$$A'>B'.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства

$$A+A'>B+B',$$

перенесеніемъ членовъ въ первую часть выводимъ:

$$(A-B)+(A'-B')>0;$$

и хотя изъ условія $A>B$ мы и знаемъ, что $A-B>0$, однако отсюда нельзя заключить, чтобы и

$$A'-B'>0.$$

Слѣдствіе. *Нельзя почленно складывать два неравенства различнаго смысла*, ибо нельзя предвидѣть, которая сумма будетъ больше. Дѣйствіе въ этомъ случаѣ возможно только въ численныхъ примѣрахъ. Такъ:

$$1)\ \begin{array}{r} 5>3 \\ 2<3 \\ \hline 7>6 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} 5>3 \\ 1<7 \\ \hline 6<10 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} 5>3 \\ 3<5 \\ \hline 8=8 \end{array}.$$

349. Начало VII. — *Можно сдѣлать почленное вычитаніе двухъ неравенствъ различнаго смысла: полученное неравенство будетъ одинаковаго смысла съ первымъ; но оно не можетъ замѣнить одного изъ данныхъ.*

Пусть данныя неравенства суть:

$$A>A' \qquad \text{и} \qquad B<B'.$$

Мы заключаемъ изъ нихъ, что разности: $A-A'$ и $B'-B$ обѣ положительны, а потому и сумма ихъ положительна; слѣд.

$$A-A'+B'-B>0,$$

или:

$$A-B>A'-B'.$$

Но система

$$\left.\begin{array}{r} A>A' \\ A-B>A'-B' \end{array}\right\}$$

не имѣетъ необходимымъ слѣдствіемъ $B<B'$, и потому не необходимо тождественна данной.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ неравенства $A-B>A'-B'$ имѣемъ

$$(A-A')+(B'-B)>0,$$

и хотя знаемъ, что $A - A' > 0$, но отсюда нельзя заключить, чтобы необходимо было и $B' - B > 0$.

Слѣдствіе. — *Нельзя дѣлать почленнаго вычитанія двухъ неравенствъ одинаковаго смысла*, ибо нельзя напередъ знать относительную величину разностей; такъ

$$1)\ \begin{array}{l} 7 > 5 \\ \underline{3 > 2} \\ 4 > 3. \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{l} 7 > 5 \\ \underline{3 > 1} \\ 4 = 4. \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{l} 7 > \ \ \ 5 \\ \underline{3 > -6} \\ 4 < \ 11. \end{array}$$

350. Начало VIII. — *Перемножая почленно два или нѣсколько неравенствъ одинаковаго смысла, части которыхъ положительны, получимъ неравенство того же смысла; но оно не можетъ замѣнить одного изъ данныхъ.*

Пусть данныя неравенства суть:

$$A > B \qquad \text{и} \qquad A' > B',$$

причемъ: A, A', B, B' — положительны. Изъ данныхъ неравенствъ имѣемъ:

$$A - B > 0 \qquad \text{и} \qquad A' - B' > 0,$$

а такъ-какъ A' и B положительны, то и

$$(A - B)\,A' > 0 \qquad \text{и} \qquad (A' - B')\,B > 0;$$

складывая, находимъ

$$(A - B)A' + (A' - B')B > 0, \quad \text{или} \quad AA' - BB' > 0,$$

откуда

$$AA' > BB'.$$

Но изъ того, что

$$\left.\begin{array}{r} A > B \\ \text{и} \qquad AA' > BB' \end{array}\right\}$$

нельзя заключить, что и $A' > B'$, ибо сумма $(A - B)A' + (A' - B')B$ можетъ быть положительна, хотя бы $A' - B'$ и было отрицательно.

Эта теорема справедлива для какого угодно числа неравенствъ.

Докажемъ ее, напр., для трехъ неравенствъ

$$A > B, \qquad A' > B' \qquad \text{и} \qquad A'' > B'',$$

примѣняя новый пріемъ доказательства, который полезенъ намъ будетъ и впослѣдствіи. Пріемъ этотъ основанъ, на томъ замѣчаніи, что неравенство $A > B$ всегда можно замѣнить равенствомъ $A = B + x$, гдѣ $x > 0$; въ самомъ дѣлѣ, это равенство означаетъ, что A *больше* B на x. Итакъ, данныя неравенства можемъ замѣнить равенствами

$$\begin{aligned} A &= B + x \\ A' &= B' + x' \\ A'' &= B'' + x''. \end{aligned}$$

Перемноживъ ихъ, имѣемъ:

$$AA'A'' = (B + x)(B' + x')(B'' + x'');$$

откуда, раскрывъ скобки и перенеся членъ $BB'B''$ въ первую часть, имѣемъ:

$$AA'A'' - BB'B'' = B'B''x + BB''x' + B''xx' + BB'x'' + B'xx'' + Bx'x'' + xx'x''.$$

Такъ-какъ вторая часть, какъ сумма положительныхъ членовъ, положительна, то и заключаемъ, что

$$AA'A'' > BB'B''.$$

Примѣчаніе. Для другихъ случаевъ нельзя формулировать никакого общаго правила.

351. Начало IX. — *Можно раздѣлить почленно одно на другое два неравенства разнаго смысла, если всѣ четыре части положительны, сохранивъ такой знакъ неравенства, какъ въ дѣлимомъ; но новое неравенство не можетъ замѣнить одного изъ данныхъ.*

Пусть даны неравенства

$$A > B \quad \text{и} \quad C < D,$$

гдѣ A, B, C и D — положительны. Помноживъ $A > B$ на $D > C$, по предыдущей теоремѣ найдемъ:

$$AD > BC;$$

откуда, раздѣливъ обѣ части на положительное количество CD, имѣемъ:

$$\frac{A}{C} > \frac{B}{D}.$$

Другое доказательство. Замѣнивъ первое изъ данныхъ неравенствъ равенствомъ: $A = B + x$, а второе равенствомъ $C = D - y$, и раздѣливъ первое равенство на второе, имѣемъ:

$$\frac{A}{C} = \frac{B + x}{D - y};$$

вычтя изъ обѣихъ частей по $\frac{B}{D}$, получимъ:

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{B + x}{D - y} - \frac{B}{D},$$

или

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{Dx + By}{CD}.$$

Вторая часть положительна, слѣд. $\frac{A}{C}$ больше $\frac{B}{D}$.

Примѣчаніе. Для другихъ случаевъ нельзя формулировать общаго правила.

Провѣрка заданныхъ неравенствъ.

352. Для провѣрки данныхъ неравенствъ не существуетъ никакого общаго правила; укажемъ методы наиболѣе употребительные.

I. Методъ возвышенія въ степень. Если въ подлежащемъ провѣркѣ неравенствѣ встрѣчается радикалъ, его изолируютъ и затѣмъ возвышаютъ обѣ части неравенства въ степень, изображаемую показателемъ корня. Пусть напр. требуется доказать, что среднее ариѳметическое двухъ положительныхъ количествъ a и b больше ихъ средняго геометрическаго, т. е. что

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Такъ какъ обѣ части неравенства положительны, то возвысивъ ихъ въ квадратъ и сохранивъ знакъ неравенства, замѣнимъ данное неравенство ему тождественнымъ

$$\frac{(a+b)^2}{4} > ab;$$

или, умноживъ обѣ части на 4 и собравъ всѣ члены въ первую часть:

$$(a+b)^2 - 4ab > 0, \quad \text{или} \quad (a-b)^2 > 0.$$

Такъ какъ квадратъ всякаго количества положителенъ, то послѣднее неравенство вѣрно; поэтому вѣрно и тождественное съ нимъ данное неравенство.

353. II. Методъ разложенія на множителей. Переносятъ всѣ члены въ одну часть и разлагаютъ полученный полиномъ на множителей: справедливость провѣряемаго неравенства дѣлается очевидною.

Пусть, напр., требуется доказать, что

$$3(1+a^2+a^4) > (1+a+a^2)^2.$$

По перенесеніи въ первую часть, по раскрытіи скобокъ и по приведеніи замѣняемъ данное неравенство ему тождественнымъ:

$$2a^4 - 2a^3 - 2a + 2 > 0,$$

или, по разложеніи на множителей, неравенствомъ:

$$2(a-1)^2(a^2+a+1) > 0;$$

или, придавъ къ триному a^2+a+1 и вычтя изъ него $\frac{1}{4}$, найдемъ

$$2(a-1)^2\left\{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\} > 0.$$

$2(a-1)^2$, очевидно, положительно; биномъ $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, какъ сумма двухъ положительныхъ количествъ, также положителенъ, а отсюда справедливость послѣдняго неравенства, а потому и тождественнаго съ нимъ перваго, очевидна.

354. III. Методъ превращенія полинома въ сумму квадратовъ. Переносятъ всѣ члены въ одну часть и разлагаютъ полученный полиномъ въ сумму квадратовъ: справедливость неравенства дѣлается очевидною.

Примѣръ I. Доказать справедливость неравенства

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc+1 > 0.$$

Его можно представить въ видѣ:

$$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2)+\frac{1}{2}(b^2-2bc+c^2)+\frac{1}{2}(c^2-2ac+a^2)+1 > 0,$$

или
$$\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2+1 > 0,$$

что очевидно.

Примѣръ II. Доказать, что если $b^2-4ac<0$, то справедливо неравенство

$$\left\{bb'-2(ca'+ac')\right\}^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c') > 0.$$

Раскрывая и располагая по степенямъ количества b', можемъ этому неравенству дать видъ:

$$acb'^2 - b(ca' + ac')b' + (ca' + ac')^2 + a'c'(b^2 - 4ac) > 0,$$

или

$$ac\left\{b' - \frac{b(ca' + ac')}{2ac}\right\}^2 + \frac{(4ac - b^2)}{4ac}(ca' - ac')^2 > 0.$$

Изъ даннаго условія $b^2 - 4ac < 0$ выводимъ, что $4ac > b^2$, а потому $ac > 0$, равно и $4ac - b^2 > 0$; отсюда видно, что первая часть послѣдняго неравенства положительна, и стало быть оно вѣрно; поэтому вѣрно и тождественное ему заданное неравенство.

355. IV. Неравенства симметричныя относительно данныхъ буквъ. Когда неравенство симметрично относительно нѣкоторыхъ буквъ a, b, c, то предварительно условливаются въ относительной величинѣ этихъ буквъ; пусть, напр., a есть наименьшее изъ трехъ данныхъ количествъ: въ такомъ случаѣ, b и c можно представить въ видѣ: $b = a + x$, $c = a + y$, гдѣ $x > 0$ и $y > 0$.

Пусть, напр., требуется доказать, что если a, b и c положительны, то имѣетъ мѣсто неравенство:

$$abc > (a + b - c)(b + c - a)(a + c - b).$$

Положивъ $b = a + x$ и $c = a + y$, и подставивъ въ испытуемое неравенство, приводимъ задачу къ провѣркѣ неравенства

$$a(a + x)(a + y) > (a + x - y)(a + x + y)(a + y - x), \quad \text{или}$$

$$a\{a^2 + a(x + y) + xy\} - \{a^2 - (x - y)^2\}(a + x + y) > 0, \quad \text{или}$$

$$axy + (a + x + y)(x - y)^2 > 0;$$

справедливость этого неравенства очевидна, такъ какъ оба его члена положительны.

356. V. Иногда справедливость заданнаго неравенства можно доказать, показавъ, что оно есть слѣдствіе равенствъ или неравенствъ уже доказанныхъ или легко доказуемыхъ.

Примѣръ. Доказать, что если a, b и c положительны, то имѣетъ мѣсто неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 > 3abc.$$

Такъ какъ a, b и c входятъ въ это неравенство симметрично, то мы могли бы примѣнить къ нему предыдущій способъ. Но можно доказать справедливость даннаго неравенства, исходя изъ неравенствъ:

$$a^2 + b^2 > 2ab \ (1), \quad b^2 + c^2 > 2bc \ (2), \quad c^2 + a^2 > 2ac \ (3).$$

Справедливость этихъ неравенствъ легко обнаружить; въ самомъ дѣлѣ изъ очевиднаго неравенства $(a - b)^2 > 0$ или $a^2 + b^2 - 2ab > 0$ прямо имѣемъ $a^2 + b^2 > 2ab$. Такимъ же образомъ докажемъ (2) и (3).

Сложивъ неравенства (1), (2) и (3), получимъ:

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac;$$

помноживъ объ части этого неравенства на положительное количество $a+b+c$, найдемъ, по упрощеніи:

$$a^3+b^3+c^3>3abc,$$

что и требовалось доказать.

357. VI. Методъ заключенія отъ n къ $n+1$ и наоборотъ. Пусть требуется доказать, что если a и b положительны, всегда имѣютъ мѣсто неравенства

$$2\ (a^2+b^2)>(a+b)^2,$$
$$2^2.(a^3+b^3)>(a+b)^3,$$
$$2^3.(a^4+b^4)>(a+b)^4,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

и вообще $$2^{n-1}.(a^n+b^n)>(a+b)^n,$$

гдѣ n — цѣлое положительное число.

Первое неравенство доказать не трудно; въ самомъ дѣлѣ, перенеся $(a+b)^2$ въ первую часть, раскрывъ скобки и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ:

$$a^2-2ab+b^2>0 \quad \text{или} \quad (a-b)^2>0,$$

что вѣрно.

Второе неравенство приводится къ виду

$$4(a^3+b^3)-(a+b)^3>0,$$

или, замѣтивъ, что

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \quad \text{и} \quad (a+b)^3=(a+b)(a^2+2ab+b^2),$$

даемъ неравенству видъ

$$4(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)(a^2+2ab+b^2)>0, \quad \text{или} \quad 3(a+b)(a^2-2ab+b^2)>0,$$

или $$3(a+b)(a-b)^2>0,$$

что очевидно.

Чтобы доказать общность закона, выражаемаго этими неравенствами, допустимъ, что онъ вѣренъ для показателя n, т. е. что неравенство

$$2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n \quad \dots \quad (1)$$

справедливо; и докажемъ, что въ этомъ предположеніи будетъ вѣрно и неравенство для показателя $n+1$, т. е.

$$2^n(a^{n+1}+b^{n+1})>(a+b)^{n+1} \quad \dots \quad (2).$$

Въ самомъ дѣлѣ, умножая обѣ части (1) на положительное количество $a+b$, найдемъ

$$2^{n-1}(a^n+b^n)(a+b)>(a+b)^{n+1}.$$

Слѣдовательно, достаточно показать, что

$$2^n(a^{n+1}+b^{n+1})>2^{n-1}(a^n+b^n)(a+b).$$

По сокращеніи на 2^{n-1}, по раскрытіи скобокъ во второй части и по упрощеніи, получимъ

$$a^{n+1}+b^{n+1}>ab^n+ba^n,$$

или $$a^n(a-b)+b^n(a-b)>0,$$

или $$(a^n - b^n)(a - b) > 0,$$
неравенство очевидное, потому что оба множителя $a^n - b^n$ и $a - b$ всегда имѣютъ одинаковые знаки.

Итакъ, какъ скоро неравенство (1) провѣрено для нѣкотораго значенія n, мы можемъ заключить, что оно также вѣрно и для величины n, на единицу большей. Но мы доказали, что оно вѣрно для $n=2$; слѣд. оно вѣрно и для $n=3$; будучи же вѣрно для $n=3$, оно вѣрно и для $n=4$ и т. д.

Доказанное неравенство можно написать въ видѣ
$$\frac{a^n+b^n}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^n;$$
въ этой формѣ оно показываетъ, что *ариѳметическая средина n-хъ степеней двухъ чиселъ больше n-ой степени ариѳметической средины этихъ чиселъ.*

Можно распространить эту теорему на какое угодно число p положительныхъ количествъ $a, b, c, d, \ldots k, l$.

Взявъ четыре количества a, b, c, d, имѣемъ тождество:
$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n = \left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\right)^n,$$
и слѣд. по предыдущей теоремѣ имѣемъ:
$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n < \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left(\frac{c+d}{2}\right)^n}{2},$$
но мы имѣли: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n+b^n}{2}$ и $\left(\frac{c+d}{2}\right)^n < \frac{c^n+d^n}{2}$; слѣд.
$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n < \frac{a^n+b^n+c^n+d^n}{4}.$$

Такимъ же точно образомъ докажемъ, что предложеніе вѣрно для $8, 16, \ldots, 2^k$ положительныхъ количествъ. Чтобы доказать справедливость теоремы вообще, употребимъ пріемъ, впервые введенный французскимъ математикомъ *Коши*; пріемъ этотъ разнится отъ пріема Бернулли тѣмъ, что дѣлается заключеніе не отъ p къ $p+1$, а обратно: отъ $p+1$ къ p. Итакъ, допустивъ, что теорема справедлива для $p+1$ чиселъ, докажемъ, что она будетъ вѣрна и для p чиселъ.

Имѣемъ тождество
$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right) = \frac{\frac{p+1}{p}(a+b+c+\ldots+h)}{p+1} = \frac{a+b+c+\ldots+h+\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}}{p+1}$$
слѣдовательно
$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k = \left(\frac{a+b+c+\ldots+h+\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}}{p+1}\right)^k \ldots (3).$$

Но, по допущенію, теорема вѣрна для $p+1$ количествъ; поэтому вторая часть равенства (3) меньше
$$\frac{a^k+b^k+c^k+\ldots+h^k+\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k}{p+1},$$

а слѣд. и

$$\left(\frac{a+b+c\ldots+h}{p}\right)^k < \frac{a^k+b^k+c^k+\ldots+h^k+\left(\frac{a+b+c+\ldots+h}{p}\right)^k}{p+1},$$

а потому и

$$\left(\frac{a+b+\ldots+h}{p}\right)^k < \frac{a^k+b^k+c^k+\ldots+h^k}{p}.$$

358. Доказательство нѣкоторыхъ замѣчательныхъ неравенствъ. Приведемъ доказательство нѣкоторыхъ теоремъ, имѣющихъ примѣненіе въ элементарной математикѣ, или же представляющихъ интересъ въ самомъ способѣ ихъ доказательства.

359. I. Если дроби $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, которыхъ знаменатели положительны, идутъ увеличиваясь, то дробь $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$ заключается между крайними дробями, т. е. между наименьшею и наибольшею изъ нихъ.

Пусть $$\frac{a_1}{b_1}=q.$$

Въ такомъ случаѣ:

$\frac{a_2}{b_2}>q, \frac{a_3}{b_3}>q, \ldots, \frac{a_n}{b_n}>q$. Помножая обѣ части перваго неравенства на b_2, втораго—на b_3 и т. д. и замѣчая, что умноженіе на положительное количество не измѣняетъ смысла неравенствъ, найдемъ:

$$a_1=b_1q, \quad a_2>b_2q, \quad a_3>b_3q \quad \ldots \quad \ldots a_n>b_nq.$$

Складывая почленно эти неравенства и придавая почленно равенство $a_1=b_1q$, найдемъ:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n>(b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b_n)q,$$

или, раздѣливъ обѣ части на положительное количество $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$, получимъ:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+b_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+a_n}>q, \text{ т. е. больше } \frac{a_1}{b^1}.$$

Положивъ $\frac{a_n}{b_n}=q'$, выводимъ отсюда

$$\frac{a_1}{b_1}<q', \quad \frac{a_2}{b_2}<q', \quad \frac{a_3}{b_3}<q', \quad \ldots\ldots \quad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}<q', \text{ откуда}$$

$$a_1<b_1q', \ a_2<b_2q', \ a_3<b_3q', \ldots\ldots, a_{n-1}<b_{n-1}q', \ a_n=b_nq',$$

Складывая и дѣля обѣ части полученнаго неравенства на $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$, найдемъ:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}<q', \text{ т. е, меньше } \frac{a_n}{b_n}.$$

Требуемое такимъ образомъ доказано.

360. II. Теорема Коши. *Среднее ариѳметическое* n *положительныхъ количествъ* $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, *которыя не всѣ равны между собою, больше ихъ средняго геометрическаго.*

Для двухъ количествъ теорема уже доказана выше; слѣд.

$$\sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Затѣмъ, имѣемъ тождество

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} . \sqrt{a_3 a_4}}$$

слѣд.

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} < \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} < \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2};$$

итакъ:

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

Такимъ же образомъ, замѣчая, что

$$\sqrt[8]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = \sqrt{\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} . \sqrt[4]{a_5 a_6 a_7 a_8}},$$

докажемъ, что теорема вѣрна для 8 количествъ; и вообще, что она справедлива для 2^k чиселъ.

Чтобы доказать, что теорема справедлива для какого угодно числа данныхъ количествъ, Коши доказываетъ, что если теорема вѣрна для $p + 1$ количествъ, то она вѣрна и для p количествъ.

Имѣемъ тождество:

$$\sqrt[p]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p} = \sqrt[p+1]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p . \sqrt[p]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p}};$$

но, по условію, теорема вѣрна для $p + 1$ количества, слѣд.

$$\sqrt[p+1]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p \sqrt[p]{a_1 a_2 \ldots a_p}} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_p + \sqrt[p]{a_1 a_2 \ldots a_p}}{p + 1}.$$

Замѣчая, что первая часть $= \sqrt[p]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p}$, находимъ:

$$p \sqrt[p]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p} < a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p,$$

откуда

$$\sqrt[p]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_p} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p}{p},$$

что и слѣдовало доказать.

Впрочемъ, обобщеніе теоремы для случая, когда число n данныхъ количествъ не есть степень двухъ, можетъ быть сдѣлано инымъ пріемомъ. Пусть q будетъ цѣлое число, которое надо прибавить къ n, чтобы получить степень двухъ.

Обозначимъ ариѳметич. средину $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ данныхъ n чиселъ буквою b. Присоединивъ къ этимъ числамъ q чиселъ, изъ которыхъ каждое равнялось-бы b, получимъ $n + q$ чиселъ;

$$\underbrace{a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n}_{n}, \quad \underbrace{b, b, b, \ldots \ldots b}_{q}.$$

Такъ-какъ число $n + q$ есть степень двухъ, то по доказанному

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + q.b}{n + q} > \sqrt[n+q]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n . b^q}.$$

Но $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n.b$; подставивъ въ послѣднее неравенство, найдемъ:

$$\frac{nb + qb}{n+q} > \sqrt[n+q]{a_1 a_2 \ldots a_n . b^q}, \quad \text{или} \quad b > \sqrt[n+q]{a_1 a_2 \ldots a_n . b^q},$$

откуда

$$b^{n+q} > a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n . b^q,$$

а по сокращеніи на b^q, по замѣнѣ b его величиною и по извлеченіи изъ обѣихъ частей n-го корня, находимъ:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}.$$

361. III. Формула дѣленія при цѣломъ положительномъ m:

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}$$

позволяетъ вывести слѣдующія неравенства. Если $a > b > 0$, то подставивъ во вторую часть вмѣсто b количество a, мы этимъ вторую часть увеличимъ; слѣд.

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} < ma^{m-1} \ldots\ldots (1).$$

Напротивъ, подставивъ во второй части b вмѣсто a, мы ее уменьшимъ, и получимъ

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} > m.b^{m-1} \ldots\ldots (2).$$

Помноживъ неравенство (1) на положительное количество $a - b$ и вынеся за скобки a^{m-1}, найдемъ:

$$[a - m(a-b)]a^{m-1} < b^m \ldots (3).$$

Подобнымъ же образомъ изъ неравенства (2) найдемъ:

$$a^m > [b + m(a-b)]b^{m-1} \ldots (4).$$

Если $a - m(a-b)$ будетъ количество положительное, то раздѣливъ неравенство (3) на $a - m(a-b)$, найдемъ:

$$a^{m-1} < \frac{b^m}{a - m(a-b)};$$

слѣд. это неравенство возможно при условіи

$$a > m(a-b), \quad \text{или} \quad b > \frac{m-1}{m}.a \cdot$$

Положивъ $m = n + 1$, получимъ:

$$a^n < \frac{b^{n+1}}{a - (n+1)(a-b)} \ldots\ldots (5).$$

гдѣ $a > b > \frac{n}{n+1}.a$

Воспользуемся неравенствомъ (3), въ которомъ $a > b$, для вывода слѣдующаго неравенства:

$$\frac{z^k}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots k} < \left(\frac{z}{\sqrt{k}}\right)^k$$

гдѣ z произвольное, а k — цѣлое положительное число.

Положивъ въ (3): $a = m + 1$ и $b = m$, найдемъ:

$$(m+1)^{m-1} < m^m, \text{ откуда } \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m} < (m+1).^2$$

Подставляя сюда вмѣсто m послѣдовательно $2, 3, 4, \ldots \ldots k-1$, имѣемъ:

$$2^2 = 2^2$$

$$\frac{3^3}{2^2} < 3^2$$

$$\frac{4^4}{3^3} < 4^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} < k^2.$$

Перемножая эти неравенства, получимъ

$$k^k < 2^2.3^2.4^2.\ldots\ldots k^2,$$

откуда, по извлеченіи квадратнаго корня, находимъ:

$$\sqrt{k^k} < 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ k$$

или

$$(\sqrt{k})^k < 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ k.$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{z^k}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ k} < \frac{z^k}{(\sqrt{k})^k}, \text{ или } \frac{z^k}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ k} < \left(\frac{z}{\sqrt{k}}\right)^k.$$

Рѣшеніе неравенствъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

362. Нерѣдко случается, что неизвѣстное вопроса, по свойству самой задачи, должно заключаться между извѣстными предѣлами, и слѣд. должно удовлетворять нѣкоторымъ неравенствомъ. Отсюда задача о рѣшеніи неравенствъ.

Рѣшить неравенство значитъ найти предѣлы, между которыми должны заключаться значенія неизвѣстнаго, для того чтобы неравенство было удовлетворено.

363. Рѣшеніе одного неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Всякое неравенство первой степени съ 1 неизвѣстнымъ, по уничтоженіи дробей, по перенесеніи извѣстныхъ членовъ въ одну часть, а неизвѣстныхъ въ другую и по приведеніи, можетъ быть представлено въ видѣ

$$ax > b \ \ldots\ldots\ (1)$$

Чтобы найти отсюда предѣлъ значеній x, нужно обѣ части раздѣлить на a, а при этомъ нужно знать знакъ коэффиціента a. Отсюда два случая:

I. Если $a > 0$, то раздѣливъ обѣ части на a, слѣдуетъ сохранить знакъ неравенства; такимъ образомъ найдемъ

$$x > \frac{b}{a}.$$

Заключаемъ, что въ этомъ случаѣ неравенству (1) удовлетворяютъ всѣ значенія x, большія $\frac{b}{a}$, а потому $\frac{b}{a}$ называется *низшимъ предѣломъ* неизвѣстнаго x.

II. Если $a < 0$, то раздѣливъ обѣ части неравенства (1) на отрицательное количество a, должны перемѣнить смыслъ неравенства; найдемъ

$$x < \frac{b}{a},$$

т. е. что неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, меньшія $\frac{b}{a}$; въ этомъ случаѣ $\frac{b}{a}$ будетъ *высшимъ предѣломъ* неизвѣстнаго.

Приводимъ примѣры:

Примѣръ I. Какъ нужно взять x, чтобы удовлетворить неравенству:

$$\frac{4}{3}x - \frac{1}{4} + 3 < 5x - \frac{x}{24} - 19.$$

Для освобожденія неравенства отъ дробей множимъ обѣ части на положительное число 24: знакъ неравенства отъ этого не измѣнится и мы получимъ

$$32x - 6 + 72 < 120x - x - 456,$$

или

$$32x + 66 < 119x - 456.$$

По перенесеніи членовъ и по приведеніи, найдемъ:

$$522 < 87x$$

откуда, раздѣливъ обѣ части на положительное число 87, имѣемъ

$$x > 6.$$

Итакъ, всѣ числа большія 6 удовлетворяютъ данному неравенству.

Примѣръ II. Рѣшить неравенство

$$\frac{x}{a+b} - \frac{a}{a-b} > \frac{x}{a-b} - \frac{b}{a+b}.$$

Для уничтоженія дробей нужно бы было умножить обѣ части неравенства на $(a+b)(a-b)$ или $a^2 - b^2$; но какъ мы не знаемъ знака этого количества, то помножимъ обѣ части на $(a^2 - b^2)^2$, т. е. на положительное количество; при этомъ знакъ неравенства не перемѣнится, и мы получимъ:

$$(a^2 - b^2)(a-b)x - a(a^2 - b^2)(a+b) > (a^2 - b^2)(a+b)x - b(a^2 - b^2)(a-b).$$

Перенеся неизвѣстные члены въ первую часть, а извѣстные во вторую и сдѣлавъ надлежащія упрощенія, найдемъ:

$$-2b(a^2 - b^2)x > (a^2 - b^2)(a^2 + b^2).$$

Далѣе приходится дѣлить обѣ части на коэффиціентъ при x, а при этомъ надо знать знакъ количества $b(a^2 - b^2)$; отсюда два случая:

1) Если $b(a^2 - b^2) < 0$, то $-2b(a^2 - b^2)$ будетъ количество положительное, и слѣд. дѣля на него обѣ части неравенства, слѣдуетъ сохранить знакъ неравенства; такимъ образомъ получимъ

$$x > \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{-2b(a^2 - b^2)},$$

или, по сокращеніи дроби на $a^2 - b^2$:

$$x > -\frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

2) Если $b(a^2-b^2)>0$, то раздѣляя обѣ части неравенства на отрицательное количество $-2b(a^2-b^2)$, нужно измѣнить смыслъ неравенства, такъ-что въ этомъ случаѣ, по сокращеніи, найдемъ:

$$x<-\frac{a^2+b^2}{2b}.$$

Провѣримъ найденные для x предѣлы на самомъ неравенствѣ.

Мы нашли, что при условіи: $b(a^2-b^2)<0$ неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, большія $-\frac{a^2+b^2}{2b}$; сл. для повѣрки должны положить

$$x=-\frac{a^2+b^2}{2b}+h,$$

гдѣ $h>0$, и это значеніе x подставить въ данное неравенство. Сдѣлавъ это, найдемъ:

$$\frac{-\frac{a^2+b^2}{2b}+h}{a+b}-\frac{a}{a-b}>\frac{-\frac{a^2+b^2}{2b}+h}{a-b}-\frac{b}{a+b}, \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

или: $$\frac{-(a^2+b^2)+2bh}{2b(a+b)}-\frac{a}{a-b}>\frac{-(a^2+b^2)+2bh}{2b(a-b)}-\frac{b}{a+b};$$

помноживъ обѣ части на количество $2b(a+b)(a-b)$, по условію, меньшее нуля, найдемъ по упрощеніи

$$-2b^2h<+2b^2h \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Но h и b^2 положительны, слѣд. $-2b^2h$ отрицательно, а $+2b^2h$ положительно, и потому неравенство (2), а слѣд. и тождественное съ нимъ (1) вѣрно.

Такимъ же образомъ убѣдимся, что при условіи $b(a^2-b^2)>0$ данному неравенству удовлетворяютъ всѣ значенія x, меньшія $-\frac{a^2+b^2}{2b}$.

364. Рѣшеніе нѣсколькихъ неравенствъ 1-й степени съ 1 неизвѣстнымъ.

Пусть, напр., имѣемъ два неравенства 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$ax>b \quad \text{и} \quad a'x>b'.$$

1. Пусть мы нашли: изъ перваго: $x>m$, а изъ втораго: $x>p$.

Если, приэтомъ, $p>m$, то очевидно, что даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ значенія x, большія p; такимъ образомъ p есть нисшій предѣлъ x.

2. Если, рѣшая неравенства, найдемъ

$$x<m \quad \text{и} \quad x<p,$$

и если $p<m$, то очевидно, что всѣ значенія x, меньшія p, удовлетворяютъ даннымъ неравенствамъ, ибо такія значенія будутъ меньше и m. Въ этомъ случаѣ p есть высшій предѣлъ неизвѣстнаго.

3. Если найдемъ

$$x>m \quad \text{и} \quad x<p,$$

то когда $p > m$, очевидно, что даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ значенія x, заключающіяся между m и p; m есть нисшій, а p высшій предѣлъ для x.

4. Если же, найдя

$$x > m \quad \text{и} \quad x < p,$$

окажется, что $m > p$, то предѣлы будутъ противорѣчащіе; а это значитъ, что не существуетъ такихъ значеній x, которыя удовлетворяли-бы совмѣстно даннымъ неравенствамъ. Самыя неравенства въ такомъ случаѣ называются *несовмѣстными*.

365. Если бы даны были три неравенства, то рѣшая ихъ, мы нашли бы:

1) или $x > p$, $x > q$, $x > r$;
2) или $x > p$, $x > q$, $x < r$;
3) или $x > p$, $x < q$, $x < r$;
4) или $x < p$, $x < q$, $x < r$.

Легко видѣть, что въ первомъ случаѣ даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ значенія x, большія большаго изъ трехъ количествъ p, q и r.

Во второмъ случаѣ даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ значенія x, большія большаго изъ двухъ чиселъ p и q, но въ тоже время меньшія r, если только такія значенія существуютъ.

Въ третьемъ случаѣ надо взять x больше p, но меньше меньшаго изъ двухъ чиселъ q и r, если это возможно.

Въ четвертомъ случаѣ, даннымъ неравенствамъ удовлетворяютъ всѣ значенія x, меньшія меньшаго изъ трехъ чиселъ p, q и r.

Подобнымъ же образомъ рѣшаются системы трехъ, четырехъ и т. д. неравенствъ съ однимъ неизвѣстнымъ x.

Рѣшеніе совмѣстныхъ неравенствъ первой степени съ нѣсколькими неизвѣстными.

366. Когда имѣемъ нѣсколько неравенствъ первой степени съ нѣсколькими неизвѣстными, то не всегда можно найти предѣлы для каждаго неизвѣстнаго.

Для нахожденія этихъ предѣловъ употребляютъ или *методъ сравниванія величинъ неизвѣстныхъ*, или *методъ уравниванія коэффиціентовъ* при одномъ и томъ же неизвѣстномъ.

367. Методъ сравненія величинъ неизвѣстныхъ. Пусть требуется рѣшить два неравенства съ двумя неизвѣстными:

$$5x - 3y > 4,$$
$$8x + 2y > 25.$$

Выводя предѣлы для x, находимъ: изъ перваго неравенства

$$x > \frac{4 + 3y}{5},$$

а изъ втораго

$$x > \frac{25-2y}{8}.$$

Такъ какъ получились два нисшіе предѣла для неизвѣстнаго, то нельзя сказать, который изъ нихъ больше, и нельзя так. обр. исключить x. Если же рѣшимъ неравенства относительно y, то найдемъ.

$$y < \frac{5x-4}{3} \ldots (1) \quad \text{и} \quad y > \frac{25-8x}{2}, \quad \ldots (2).$$

и исключеніе y возможно. Въ самомъ дѣлѣ, первая дробь, какъ большая количества y, очевидно, больше второй дроби, какъ меньшей того же самаго y; слѣд.

$$\frac{5x-4}{3} > \frac{25-8x}{2}.$$

Рѣшивъ это неравенство, находимъ

$$x > \frac{83}{34}, \quad \text{или} \quad x > 2\frac{15}{34}.$$

Давая x какое угодно значеніе, большее $2\frac{15}{34}$, найдемъ, что каждому изъ нихъ соотвѣтствуютъ два предѣла для y, изъ неравенствъ (1) и (2). Такъ, взявъ $x=3$, найдемъ, что

$$y < 3\frac{2}{3}, \quad \text{но} \quad y > \frac{1}{2}.$$

Взявъ $x=4$, найдемъ

$$y < 5\frac{1}{3}, \quad \text{но} \quad y > -3\frac{1}{2}.$$

Такимъ образомъ, данныя неравенства могутъ быть удовлетворены безчисленнымъ множествомъ значеній x и y.

Пусть требуется рѣшить три неравенства съ 3 неизвѣстными:

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+z+1 &> 0, \\ x+2y-z-2 &< 0, \\ 3x+2y-z-1 &> 0. \end{aligned}\right\} (1)$$

Рѣшивъ ихъ относительно x, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &> \frac{y-z-1}{2}, \\ x &< z+2-2y \\ x &> \frac{z-2y+1}{3}. \end{aligned}\right\} (2)$$

Очевидно, что $z+2-2y$, какъ выраженіе бельшее x, больше каждой изъ дробей, меньшихъ x; слѣд. y и z удовлетворяютъ двумъ неравенствамъ:

$$\left.\begin{aligned} z+2-2y &> \frac{y-z-1}{2}, \\ z+2-2y &> \frac{z-2y+1}{3}. \end{aligned}\right\} (3)$$

Рѣшая эти два неравенства относительно y, найдемъ:

$$y < \frac{3z+5}{5}, \quad \text{и} \quad y < \frac{2z+5}{4} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Давая z произвольное значеніе, напр. $z=0$, изъ послѣднихъ неравенствъ находимъ:

$$y < 1 \quad \text{и} \quad y < \frac{5}{4};$$

взявъ теперь какое угодно значеніе, меньшее 1, для y, положивъ напр. $y=-1$, мы удовлетворимъ неравенствамъ (4).

Внося въ систему (2) $y=-1$ и $z=0$, найдемъ

$$x > -1, \quad x < 4, \quad x > 1.$$

Слѣд., взявъ $1 < x < 4$, мы удовлетворимъ этимъ тремъ неравенствамъ. Такъ напр.

$x=2$, $y=1$, $z=0$; $x=2\frac{1}{2}$, $y=-1$, $z=0$; $x=3$, $y=-1$, $z=0$; и т. п.

удовлетворяютъ даннымъ неравенствамъ.

368. Методъ уравниванія коэффиціентовъ. Пусть требуется рѣшить неравенства:

$$5x - 3y > 4,$$
$$8x + 2y > 25.$$

Желая исключить x, мы должны умножить первое неравенство на 8, а второе на 5, послѣ чего получимъ

$$40x - 24y > 32 \quad \text{и} \quad 40x + 10y > 125.$$

Затѣмъ слѣдовало-бы вычесть одно неравенство изъ другаго; но такъ какъ мы не имѣемъ права вычитать неравенства одинаковаго смысла, то и нельзя этимъ пріемомъ исключить x. Но можно исключить y, помноживъ первое неравенство на 2, а второе на 3, и сложивъ ихъ, что позволительно; такимъ образомъ найдемъ:

$$34x > 83, \quad \text{откуда} \quad x > 2\frac{15}{34} \cdot$$

Затѣмъ, продолжаемъ такъ, какъ указано въ § 367.

Когда предложенныя неравенства противоположнаго смысла, можно методомъ уравниванія коэффиціентовъ исключить неизвѣстное, имѣющее въ обѣихъ неравенствахъ одинаковый знакъ. Такъ, имѣя неравенства

$$2x + 3y > 23,$$
$$3x + 2y < 22,$$

можно исключить x, умноживъ первое на 3, второе на 2 и вычтя второе изъ перваго. Такимъ путемъ найдемъ

$$y > 5.$$

Давая y какое угодно значеніе, большее 5, напр. 7, найдемъ два предѣла для x:

$$x > 1, \quad x < 2\frac{2}{3} \cdot$$

Подобнымъ образомъ можно бы было исключить и y; вычитая утроенное второе изъ удвоеннаго перваго неравенства, нашли бы

$$x < 4.$$

Затѣмъ, для $x < 4$, можно изъ данныхъ неравенствъ найти предѣлы для y.

Примѣчаніе. Не всякую систему неравенствъ можно рѣшить.

Пусть, напр., даны неравенства

$$3x + 5y > 7, \qquad 4x + 5y > 9.$$

Замѣчаемъ, во-первыхъ, что нельзя исключить y, такъ — какъ непозволительно дѣлать почленное вычитаніе неравенствъ одинаковаго смысла. Также, непримѣнимъ въ данномъ случаѣ и способъ подстановленія, потому-что рѣшивъ, напр., первое неравенство относительно y, найдемъ нисшій предѣлъ для y, а замѣнивъ y этимъ предѣломъ въ выраженіи $4x + 5y$, мы послѣднее уменьшимъ, а слѣд. останется неизвѣстнымъ, будетъ-ли оно необходимо больше 9. Такимъ же точно образомъ убѣдимся, что нельзя исключить и x.

Вообще, можетъ случиться, что нельзя найти предѣловъ ни для одного неизвѣстнаго; или же можно найти предѣлъ для одного неизвѣстнаго, или, наконецъ, и для обоихъ.

369. Задачи.

1. Умножить обѣ части каждаго изъ нижеслѣдующихъ неравенствъ на указанные множители:

a) $-9 < 1$ на 2; b) $3 > 0{,}5$ на -2; c) $a^2 > b$ на $-b$; d) $4a > -x$ на -2; e) $-7 < -2$ на -4; f) $m-1 > a$ на $-m$; g) $18 - y^2 < 5$ на a^2.

2. Раздѣлить обѣ части каждаго изъ слѣдующихъ неравенствъ на указанныя количества:

a) $36 < 48$ на -6; b) $a^3 < a^5$ на a^2; c) $a^2 - b^2 > a - b$ на $a - b$; d) $5a^3 < 15a^2$ на $-5a$; e) $13x^2 + 26b > 91x^2$ на -13.

3. Возвысить въ указанныя степени неравенства:

a) $a + b > a - x$ въ кубъ; b) $a - b < m + 1$ въ квадратъ; c) $x + 1 < y$ въ четвертую степень; d) $1 + x - a > x - b$ въ квадратъ; e) $3 > -2$ въ кубъ; f) $a - 1 < b - 2$ въ пятую степень; g) $-1 > -2$ въ пятую степень; h) $1 - x < -a$ въ кубъ; i) $3 - e > -1$ въ седьмую степень;

4. Извлечь корни:

a) изъ $27 > 8$ — кубичный; b) изъ $-125 < +64$ — кубичный. c) изъ $729 > 343$ — кубичный; d) изъ $-7776 < -243$ — пятой степени; e) изъ $-729 < -343$ — кубичный; f) изъ $625 < 2401$ — четвертаго порядка.

5. Упростить неравенства:

a) $(a-x)^3 + 2 > 2a^3 - 2ax(a-x)$;

b) $x^3 - y^3 < (x-y)(x^2 + y^2)$;

c) $a^6 - x^6 > (a^2 - x^2)(a^4 + x^4 + 2)$.

6. Которая изъ двухъ суммъ: $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ больше?

7. Тотъ-же вопросъ относительно $\sqrt{8}+\sqrt{12}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{20}$.

8. Тотъ-же вопросъ относительно $\sqrt{10}+\sqrt{8}+\sqrt{6}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{24}$.

9. Доказать неравенство.

$$\frac{1}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right]+\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{2}+\sqrt{3}<7.$$

10. Если a, b и c положительны, то доказать, что

$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)>(a+b)(b+a)(c+a).$$

11. Провѣрить неравенство

$$(a+b+c)^2>a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c).$$

12. Доказать, что

$$x^6-x^5y+4x^4y^2+2x^3y^3+x^2y^4-y^5x+y^6>0.$$

13. Доказать, что если a, b, c, x, y, z — количества положительныя, то

$$ax+by+cz<\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

и что неравенство превращается въ равенство, если

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.$$

14. Доказать, что при положительныхъ a, b и c:

$$8abc<(a+b)(b+c)(c+a).$$

15. Доказать, что при томъ-же условіи

$$6abc<ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)<2(a^3+b^3+c^3).$$

16. Доказать, что при всякихъ a, b и c:

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc;$$

если же a, b и c представляютъ стороны прямоугольнаго треугольника, то

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc).$$

17. Доказать, что если a, b и c и т. д. положительны, то:

1) $a^3+b^3+c^3>3abc$;

2) $(a+b)(b+c)(c+a)<\frac{8}{3}(a^3+b^3+c^3)$;

3) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)<3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(ab+ac+bc)$.

4) $a^4+b^4+c^4>abc(a+b+c)$.

5) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\ldots\ldots+\frac{l}{a}>n$, гдѣ n есть число буквъ a, b,…, l.

6) $1.2.3.4\ldots\ldots n<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

7) $1.2.3.4\ldots\ldots n>\sqrt{n^n}$.

8) $27abc<(a+b+c)^3<9(a^3+b^3+c^3)$.

9) $(ab+ac+bc)(a+b+c)>9abc$.

10) $(a+b-c)^2+(a+c-b)^2+(b+c-a)^2>ab+bc+ca$.

11) $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

18. Если a, b, c и d суть четыре положительныя числа, то доказать, что третье и четвертое изъ неравенствъ

$$b^2 - 4ac > 0, \quad ad^2 - bd + c > 0, \quad 2ad - b > 0 \quad \text{и} \quad ad^2 - c > 0.$$

суть слѣдствія трехъ остальныхъ.

19. Если

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad \text{и} \quad l_1{}^2 + m_1{}^2 + n_1{}^2 = 1,$$

то

$$ll^1 + mm^1 + nn^1 < 1.$$

20. Показать, что $x^2 - 8x + 22$ не можетъ быть меньше 6, какова бы ни была величина x.

21. Что больше: $2x^3$ или $x + 1$?

22. Доказать, что при всякомъ x, отличномъ отъ 1,

$$1 + 2x^4 > x^2 + 2x^3,$$

а при $x = 1$ неравенство обращается въ равенство.

23. Если $n > 1$, то $x + \frac{1}{nx} > 1 + \frac{1}{n}$, когда $x > 1$ или $< \frac{1}{n}$.

24. Если изъ двухъ положительныхъ чиселъ a и b, $a > b$, то

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a.$$

25. Если a, b и c, или b, c и a, или c, a и b идутъ *убывая*, то

$$a^2b + b^2c + c^2a > a^2c + b^2a + c^2b;$$

если же онѣ идутъ *возрастая*, то

$$a^2b + b^2c + c^2a < a^2c + b^2a + c^2b,$$

полагая, что a, b и c — положительны.

26. Доказать неравенство

$$(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots\ldots)(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots\ldots) > (Aa + Bb + Cc + \ldots\ldots)^2,$$

каковы бы ни были количества A, B, ..., a, b, ...

27. При положительныхъ a, b и c имѣемъ:

$$9abc < (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2).$$

28. Доказать, что всякая дробь $\frac{a}{b}$ (гдѣ a и b полож.), сложенная съ обращенною дробью, даетъ сумму, большую 2.

29. Доказать, что если a, b и c положительны, то

$$1) \quad \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} > 3;$$

$$2) \quad \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} > \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

30. Доказать, это $n^3 + 1 > n^2 + n$.

31. Которое изъ двухъ количествъ: $\sqrt[n]{n}$ и $\sqrt[n+1]{n+1}$ больше другаго, полагая $n > 0$.

32. Доказать, что разность между ариѳметическою и геометрическою срединами двухъ положительныхъ чиселъ меньше $\frac{1}{8}$ квадрата разности этихъ чиселъ, раздѣленной на меньшее число, но больше $\frac{1}{8}$ квадрата той же разности, раздѣленной на большее число.

33. Доказать, что неравенство

$$a^2(b+c)+a(b^2+c^2-bc)>0$$

справедливо при всякихъ величинахъ a, b и c.

34. Которая изъ двухъ дробей

$$\frac{a^m-b^m}{a^m+b^m} \text{ и } \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$$

больше, въ предположеніи, что $a>b$, гдѣ a и b положительны.

35. Если $x^2=a^2+b^2$ и $y^2=c^2+d^2$, то показать, что

$$xy>ac+bd \text{ или } ad+bc.$$

36. Если $x>y$, то показать, что

$$\frac{x^4-y^4}{4y^3}>x-y>\frac{x^4-y^4}{4x^3}.$$

37. Если a, b и h — числа положиоельныя, то доказать, что

при $a<b$ имѣемъ: $\frac{a-h}{b-h}<\frac{a}{b}<\frac{a+h}{b+h}$;

а при $a>b$ „ : $\frac{a-h}{b-h}>\frac{a}{b}>\frac{a+h}{b+h}$.

38. Если числа a и b одинаковаго знака, то всегда

$$(1+a)(1+b)>1+ab.$$

Общѣе, если $a, b, c, \ldots, l$ числа положительныя, то всегда

$$(1+a)(1+b)\ldots(1+l)>1+a+b+c+\ldots l.$$

39. Гармоническою срединою p чиселъ $a, b, c, \ldots, k, l$ называютъ число x, удовлетворяющее равенству

$$\frac{p}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}.$$

Доказать, что гармоническая средина нѣсколькихъ положительныхъ чиселъ всегда меньше ихъ геометрической средины.

40. Доказать, что въ треугольникѣ отношеніе $\frac{r}{R}\lesssim\frac{1}{2}$ (r есть радіусъ вписаннаго, а R — описаннаго круга).

41. Доказать, что въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма гипотенузы и высоты больше полупериметра.

42. Доказать, что во всякомъ треугольникѣ

$$h<\sqrt{p(p-a)}.$$

43. Изъ геометріи извѣстно, что если A и A′ означаютъ площади двухъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ о n и $2n$ сторонахъ, а B и B′ — площади подобныхъ имъ описанныхъ многоугольниковъ, то

$$A' = \sqrt{A.B} \quad \text{и} \quad B' = \frac{2AB}{A + A'}.$$

Доказать, что отношеніе $\frac{B' - A'}{B - A}$ меньше $\frac{1}{4}$; но что когда $B' - A'$ и $B - A$ приближаются къ 0, то это отношеніе приближается къ $\frac{1}{4}$.

44. Если p и p' съ одной стороны, и P и P′ — съ другой, означаютъ периметры многоугольниковъ предыдущей задачи, то изъ геометріи извѣстно, что:

$$P' = \frac{2Pp}{P + p}, \quad \text{и} \quad p' = \sqrt{pP'}.$$

Доказать, что $\frac{P' - p'}{P - p}$ всегда $< \frac{1}{4}$, и приближается къ предѣлу $\frac{1}{4}$, когда $P - p$ и $P' - p'$ стремятся къ нулю.

45. Изъ геометріи извѣстно, что если R и r суть радіусъ круга и апоѳема правильнаго вписаннаго многоугольника, а R′ и r' радіусъ и апоѳема многоугольника съ тѣмъ же периметромъ, но съ двойнымъ числомъ сторонъ, то

$$r' = \frac{R + r}{2} \quad \text{и} \quad R' = \sqrt{Rr'}.$$

Доказать, что отношеніе $\frac{R' - r'}{R - r}$, всегда меньшее $\frac{1}{4}$, стремится къ $\frac{1}{4}$, когда $R' - r'$ и $R - r$ стремятся къ нулю.

46. Доказать, что объемъ усѣченнаго параллельно основанію конуса больше объема цилиндра, имѣющаго туже высоту, а основаніемъ — среднее сѣченіе усѣченнаго конуса.

47. Если буквою h обозначить высоту бочки, r — радіусы ея основаній, а буквою R — радіусъ средняго сѣченія, то объемъ бочки вычисляется по одной изъ слѣдующихъ приблизительныхъ формулъ:

$$V = \frac{\pi h}{3}(2R^2 + r^2), \qquad V' = \pi h \left\{ R - \frac{3}{8}(R - r) \right\}^2. \ ^{*)}$$

Доказать, что $V > V'$.

48. Доказать, что объемъ сферическаго слоя меньше объема цилиндра, имѣющаго ту-же высоту, а основаніемъ — среднее сѣченіе слоя.

49. Два неравныхъ шара лежатъ одинъ внѣ другаго, не имѣя общихъ точекъ. Точки пересѣченія ихъ съ линіей центровъ принимаютъ за вершины двухъ конусовъ, касательныхъ къ шарамъ. Доказать, что поверхность сегмента, отдѣляемаго конусомъ, касательнымъ къ большему шару, больше поверхности, отдѣляемой другимъ конусомъ на меньшемъ шарѣ.

50. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть числа положительныя, то

$$\frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) > \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \sqrt{a_2 a_3} + \ldots + \sqrt{a_{n-1} a_n}.$$

---

*) Первая — формула Ухтреда (Ougthred); вторая — Деца (Dez).

51. Доказать, что

$$(a_1+a_2+a_3+\ .\ .\ .\ .\ +a_n)^2<n(a_1^2+a_2^2+a_3^2+.\ .\ .\ .\ +a_n^2).$$

52. Если два количества a и b связаны условіемъ

$$\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2<1,$$

то одно изъ нихъ численно больше, а другое меньше 1.

Рѣшить слѣдующія неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ:

53. $(x+1)^2<x^2+3x-5.$

54. $0{,}2x-3\frac{1}{3}>1\frac{3}{4}-\frac{5}{2}x.$

55. $\frac{2x}{3}-\frac{7}{5}>\frac{3x}{4}+8-2x+\frac{1}{60}.$

56. $\frac{3}{4}x+\frac{7}{3}-\frac{x}{2}>\frac{8}{5}-\frac{x}{3}+\frac{613}{120}.$

57. $\frac{5x}{4}-\frac{6x-1}{8}<\frac{4x+1}{12}-\frac{1}{6}.$

58. $(a+z)^2+3z^2<(2z-1)^2+7.$

59. $(x^2-a^2)x<(x-a)(x^2-2a^2x+2).$

60. Между какими предѣлами должно измѣнять x, чтобы разность x^2-a^2 оставалась отрицательною?

61. Между какими предѣлами должно измѣнять x, чтобы дробь $\frac{x-1}{x-2}$ была отрицательна?

62. Рѣшить неравенство

$$\frac{2ax+3b}{5bx-4a}<4.$$

63. Рѣшить неравенство

$$\frac{2c^2x}{a^2}-\frac{a^2}{2b}>\frac{3x}{2}+\frac{b^2}{a}.$$

64. Опредѣлить зависимость между p и q, при которой совмѣстно имѣемъ

$$x=\sqrt{\frac{p}{3}}\qquad \text{и} \qquad x^3-px+q<0,$$

причемъ p — положительно.

65. Между какими предѣлами слѣдуетъ измѣнять x, чтобы удовлетворить неравенству

$$\frac{3x}{x-1}+\frac{1}{2}<2-\frac{2}{x-1}.$$

Опредѣлить всѣ *цѣлыя* значенія x, удовлетворяющія каждой изъ слѣдующихъ системъ двухъ неравенствъ съ 1 неизвѣстнымъ:

66. $2x-5>31$ и $3x-7<2x+13.$

67. $7x-15>4x+30$ и $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<3.$

68. $\frac{x-4}{2}+3>\frac{x+2}{4}+\frac{x}{3}>\frac{x+1}{2}+\frac{1}{3}.$

69. $\frac{2x}{3} - 61502 + \frac{x}{4} > 18100 - \frac{x}{12} + 397$ и

$$\frac{x}{54} - 1124 + \frac{x}{108} < 1839 - \frac{x}{108}.$$

70. $\frac{5x}{6} - \frac{9}{4} > \frac{2x}{3} + 3$ и $\frac{3x}{4} - 1 < \frac{5x}{12} + 10.$

Рѣшить слѣдущія совмѣстныя неравенства:

71. $4x - 3y > 11$ и $7y - 2x > 3$.

72. $8x - 3y > 10$ и $-5x + 2y > 3$.

73. $2x + y < 20$ и $5x - 3y < 10$.

74. $3x - 1 > x + 3y$ и $x(1 - 3x) > 4x - 3x^2 - 2y$.

75. $(a + x)^2 - y < 3ax - 5 + x^2$ и $x + 2ay < 15 - 3x$.

76. Разстояніе между точками A и B равно $2c$; сумма разстояній точки M отъ A и B равна постоянной величинѣ $2a$, причемъ $a > c$. Между какими предѣлами могутъ измѣняться MA и MB?

77. Пусть будутъ x и y два какіе нибудь положительныя числа, цѣлыя или дробныя, причемъ $x < y$. Доказать, что существуетъ безчисленное множество системъ значеній для двухъ цѣлыхъ чиселъ p и q, удовлетворяющахъ условію

$$x < \frac{2p + 1}{2q + 1} < \frac{2p + 1}{2q} < y.$$

Приложить къ случаю: $x = 10$, $y = 11$.

78. Сколько монетъ въ кошелькѣ, если извѣстно, что двойное число ихъ, уменьшенное шестью, не больше 2, а пятерное ихъ число, уменьшенное 7-ю, не меньше 3.

ГЛАВА XXV.

Изслѣдованіе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ

Рѣшенія: положительныя, отрицательныя, нулевыя, безконечныя, неопредѣленныя.— Примѣры изслѣдованія буквенныхъ вопросовъ. — Задачи.

370. Выразивъ условія задачи уравненіемъ и рѣшивъ это уравненіе, найденное рѣшеніе изслѣдуютъ. Приэтомъ надо различать два случая.

1. Когда задача дана въ числахъ, т. е. въ формѣ частной задачи, то полученное рѣшеніе, удовлетворяя уравненію, не всегда представляетъ вмѣстѣ съ этимъ и отвѣтъ на вопросъ, алгебраическимъ выраженіемъ котораго служитъ уравненіе. Такъ, напр., если въ задачѣ требуется опредѣлить число людей, и мы, составивъ уравненіе и рѣшивъ его, найдемъ, что искомое число равно $\frac{3}{4}$ или $10\frac{1}{2}$, то подобныя числа, удовлетворяя уравненію, никоимъ образомъ не могутъ служить отвѣтомъ на предло-

женную задачу, ибо число людей можетъ выражаться только цѣлыми числами. Другой примѣръ. Если въ задачѣ требуется опредѣлить сторону треугольника, и рѣшивъ уравненіе, вытекающее изъ условій задачи, мы найдемъ, что длина стороны треугольника равна —3 ф., то подобное рѣшеніе, удовлетворяя ур-нію, очевидно не можетъ выражать длину стороны треугольника. Подобныя рѣшенія, не соотвѣтствующія смыслу задачи, указываютъ на ея невозможность. Разысканіе — гдѣ кроются причины невозможности вопроса, составляетъ задачу *изслѣдованія.*

Затѣмъ, иногда искомыя рѣшенія являются въ особыхъ формахъ — нуля, безконечности или неопредѣленности. Изслѣдованіе значенія подобныхъ формъ по отношенію къ задачѣ также составляетъ предметъ *изслѣдованія.*

2. Когда данныя вопроса выражены буквами, т. е. задача предложена въ общемъ видѣ, то значенія неизвѣстныхъ выразятся формулами, составленными изъ этихъ буквъ. Опредѣленіе условій, которымъ должны удовлетворять данныя для того чтобы задача была возможна; а также изученіе всѣхъ замѣчательныхъ обстоятельствъ, какія можетъ представить разсматриваемая формула при всевозможныхъ предположеніяхъ относительно данныхъ, составляетъ также предметъ *изслѣдованія.*

371. Если задача приводитъ къ уравненію первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, то это ур., по освобожденіи отъ дробей, по перенесеніи членовъ и по приведеніи, всегда можетъ быть приведено къ виду

$$ax = b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Для рѣшенія его, мы должны обѣ части раздѣлить на коэффиціентъ a при x.

Если a есть количество *конечное* и *отличное отъ нуля,* то сказанное дѣленіе позволительно, и мы получимъ ур.

$$x = \frac{b}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

тождественное съ (1). Такъ какъ ур. (2) удовлетворяется *только при* $x = \frac{b}{a}$, то заключаемъ, что и тождественное съ нимъ (1) имѣетъ въ данномъ случаѣ *одно единственное рѣшеніе,* равное $\frac{b}{a}$, которое можетъ быть или положительное, или отрицательное, смотря по тому, будутъ-ли a и b имѣть знаки одинаковые или разные. При $b = 0$ это рѣшеніе обращается въ 0.

Но *если положить* $a = 0$, то мы уже не имѣемъ права множить обѣ части ур-нія (1) на дробь $\frac{1}{a}$, которая въ этомъ случаѣ равна ∞, ибо мы не можемъ утверждать, что новое уравненіе будетъ въ данномъ случаѣ необходимо тождественно данному. Цѣль изслѣдованія — розыскать, каково будетъ рѣшеніе уравненія (1) въ частомъ случаѣ $a = 0$, причемъ b можетъ быть или отлично отъ нуля, или также равно нулю.

Изъ сказаннаго заключаемъ, что намъ предстоитъ разсмотрѣть слѣдующіе случаи:

1) a и b конечны и имѣютъ одинаковые знаки;
2) a и b конечны и имѣютъ противоположные знаки;
3) a — конечно, $b = 0$;
4) $a = 0$, b — конечно;
5) $a = 0$ и $b = 0$.

372. I. **Положительныя рѣшенія.** — Когда a и b конечны и имѣютъ одинаковые знаки, то $x = \frac{b}{a}$, какъ частное отъ раздѣленія двухъ конечныхъ количествъ одинаковаго знака, означаетъ конечное *положительное* число. Это же самое не-

посредственно видно и изъ ур. (1); въ самомъ дѣлѣ, будутъ-ли a и b оба положительны или оба отрицательны, выраженія ax и b могутъ быть уравнены только выборомъ опредѣленнаго *положительнаго* значенія для x.

По отношенію къ задачѣ, положительныя значенія, получаемыя для неизвѣстнаго, *въ большинствѣ случаевъ* представляютъ вполнѣ опредѣленный и ясный отвѣтъ на нее, и этимъ самымъ показываютъ возможность задачи. Подтвержденіемъ этому служатъ всѣ задачи, рѣшенныя нами въ §§ 280—287.

Но есть случаи, когда положительныя рѣшенія, удовлетворяя уравненію, не представляютъ, однако, удовлетворительнаго отвѣта на задачу и этимъ обнаруживаютъ ея невозможность. Это бываетъ именно тогда, когда неизвѣстное вопроса, по самому смыслу задачи, должно удовлетворять такимъ условіямъ, которыя не могутъ быть выражены уравненіемъ; напр., когда неизвѣстное должно быть цѣлымъ числомъ, или не должно выходить изъ опредѣленныхъ предѣловъ. Въ такихъ случаяхъ положительное рѣшеніе, не удовлетворяющее этимъ особымъ условіямъ, укажетъ намъ, что задача невозможна.

Въ поясненіе приводимъ слѣдующіе примѣры.

Примѣръ I.—*Партія рабочихъ, состоящая изъ мущинъ и женщинъ, въ числѣ 50 человѣкъ, заработала въ 6 дней 170 руб., причемъ каждый мущина получалъ въ день по 1 рублю, а каждая женщина по 50 копѣекъ. Сколько было мущинъ и женщинъ?*

Пусть мущинъ было x; слѣд. число женщинъ равнялось $50-x$; каждый мущина получалъ въ день 1 р., слѣд. x мущинъ въ 6 дней заработали $6x$ руб.; $50-x$ женщинъ, получая въ день по $\frac{1}{2}$ р. каждая, въ 6 дней получили $6.\frac{1}{2}.(50-x)$ или $3(50-x)$ руб. По условію задачи:

$$6x+3(50-x)=170.$$

Рѣшая ур., найдемъ, что число мущинъ

$$x=6\frac{2}{3};$$

а число женщинъ

$$50-x=43\frac{1}{3}.$$

Изслѣдованіе. — Эти дробныя рѣшенія суть единственныя рѣшенія, удовлетворяющія уравненію; но уравненіе представляетъ точное и полное выраженіе условія задачи. Слѣд. другихъ рѣшеній задача не можетъ имѣть. Но по смыслу задачи рѣшенія должны быть числами цѣлыми; а какъ уравненіе дало дробныя рѣшенія, то заключаемъ, что задача невозможна.

О невозможности задачи можно судить по самымъ условіямъ; въ самомъ дѣлѣ, суммы, заработанныя мущинами и женщинами, суть числа кратныя 3, слѣд. и полная сумма должна выражаться числомъ кратнымъ 3; между тѣмъ, 170 не имѣетъ этого свойства. Въ этомъ и состоитъ несообразность условій, выразившаяся полученіемъ дробныхъ рѣшеній.

Примѣръ II.—*Опредѣлить двузначное число, въ которомъ сумма цифръ равна 14, если извѣстно, что придавъ къ числу 72, найдемъ число обращенное?*

Пусть цифра единицъ равна u, тогда цифра десятковъ выразится формулою $14-u$, самое же число формулою $(14-u).10+u$; обращенное будетъ: $10u+(14-u)$. По условію:

$$(14-u).10+u+72=10u+14-u.$$

Рѣшая уравненіе, найдемъ: $u=11$, $d=3$.

Изслѣдованіе. Это цѣлое положительное рѣшеніе есть единственное рѣшеніе, удовлетворяющее уравненію; слѣд. задача не можетъ имѣть другаго рѣшенія. Но свойство вопроса требуетъ, чтобы искомыя числа ни превышали 9; и какъ одно изъ нихъ превышаетъ этотъ предѣлъ, то заключаемъ, что задача невозможна.

О невозможности задачи можно судить по самымъ условіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, двузначное число, котораго сумма цифръ равна 14, можетъ быть: или 59, или 68, или 77, или 86, или 95. Къ какому бы изъ этихъ чиселъ ни придали 72, никогда не получимъ обращеннаго числа, такъ какъ каждый разъ будутъ получаться числа трехзначныя.

373. II. **Отрицательныя рѣшенія.** — Когда a и b конечны и имѣютъ противоположные знаки, то формула $x=\frac{b}{a}$ даетъ для неизвѣстнаго конечное *отрицательное* число. Это непосредственно видно и изъ уравненія $ax=b$; въ самомъ дѣлѣ, пусть напр. $a>0$, а $b<0$: очевидно, что ур. не можетъ быть удовлетворено никакимъ положительнымъ значеніемъ x, ибо произведеніе положительныхъ чиселъ a и x не можетъ дать отрицательнаго числа; но обѣ части могутъ быть уравнены выборомъ отрицательнаго значенія для x, ибо произведеніе положительнаго a на отрицательное x дастъ отрицательное количество b, при опредѣленномъ числовомъ значеніи x.

По отношенію къ отрицательнымъ рѣшеніямъ докажемъ слѣдующую теорему, примѣненіе которой тотчасъ же найдетъ себѣ мѣсто.

374. Теорема. — *Два уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, разнящіяся между собою только знаками членовъ, содржащихъ неизвѣстное, имѣютъ рѣшенія равныя по величинѣ, но противоположныя по знаку.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ два уравненія

$$ax+b=cx+d \;\ldots\; (1) \quad \text{и} \quad -ax+b=-cx+d \;\ldots\; (2).$$

Рѣшая первое, найдемъ

$$x=\frac{d-b}{a-c};$$

рѣшая второе, имѣемъ:

$$x=-\frac{d-b}{a-c}.$$

Сравнивая обѣ формулы для x, замѣчаемъ, что они имѣютъ одинаковую величину, но противоположные знаки, такъ-что если рѣшеніе 1-го ур. положительно, то рѣшеніе 2-го отрицательно, и наоборотъ.

Итакъ, если уравненіе 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ отрицательное рѣшеніе, то такое же точно по абсолютной величинѣ рѣшеніе, но взятое съ положительнымъ знакомъ, удовлетворяетъ уравненію, которое получается изъ перваго уравненія перемѣною x на $-x$.

375. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію вопроса о томъ, какое значеніе можетъ имѣть отрицательное рѣшеніе по отношенію къ задачѣ, отвѣтомъ на которую оно служитъ. Разборъ нижеслѣдующихъ задачъ покажетъ намъ, что отрицательное рѣшеніе всегда служитъ указаніемъ на одно изъ слѣдующихъ обстоятельствъ: 1) или на нѣкоторую несообразность въ условіяхъ задачи,—несообразность, которую, впрочемъ, можно исправить; 2) или на неправильную постановку вопроса; 3) или на неправильное предположеніе, сдѣланное при составленіи уравненія изъ условій задачи и обусловленное не вполнѣ опредѣленною формою вопроса; или, наконецъ, 4) на абсолютную невозможность задачи.

376. Примѣръ I. — *Найти цѣну одного фунта нѣкотораго товара, зная, что цѣна 3 фунтовъ его, уменьшенная 5-ю рублями, равна цѣнѣ 7 фунтовъ, увеличенной двумя рублями?*

Пусть цѣна фунта будетъ x руб. Изъ условія задачи непосредственно получаемъ уравненіе

$$3x - 5 = 7x + 2,$$

рѣшивъ которое, получаемъ

$$x = -\frac{7}{4}.$$

Изслѣдованіе. — Получили отрицательное рѣшеніе; но искомая величина — цѣна фунта товара, по существу своему, положительна; заключаемъ, что отрицательное рѣшеніе должно указывать на несообразность въ самыхъ условіяхъ задачи. Въ данномъ случаѣ эта несообразность прямо бросается въ глаза: въ самомъ дѣлѣ, цѣна 3 фунтовъ, уменьшенная 5-ю рублями, никакъ не можетъ равняться бо́льшей цѣнѣ (7-ми ф.), да еще увеличенной 2-мя рублями.

Попытаемся исправить несообразныя условія задачи; и для этого замѣтимъ, что если въ уравненіе, составленное по этимъ условіямъ, вмѣсто x подставимъ $-x$, то новое уравненіе

$$-3x - 5 = -7x + 2, \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

будетъ имѣть рѣшеніе, по абсолютной величинѣ равное прежнему, а по знаку положительное, т. е. новому ур-нію удовлетворяетъ

$$x = +\frac{7}{4}.$$

Оно будетъ представлять прямой отвѣтъ на задачу, соотвѣтствующую измѣненному ур-нію (1); поэтому, если окажется возможнымъ слегка измѣнить условія данной задачи, не измѣняя численной величины данныхъ, такъ-чтобы новая задача соотвѣтствовала ур-нію (1), то положительное рѣшеніе и будетъ служить прямымъ отвѣтомъ на измѣненную задачу. Помноживъ обѣ части ур-нія (1) на -1, дадимъ ему видъ

$$3x + 5 = 7x - 2, \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Такъ какъ здѣсь къ $3x$ *придается* 5, а не вычитается 5, какъ было въ первоначальномъ ур-ніи; затѣмъ изъ $7x$ *вычитается* 2, а не придается, какъ въ первонач. ур-ніи, то очевидно, что ур. (2) есть алгебраическое выраженіе условій слѣдующей задачи:

„найти цѣну фунта нѣкотораго товара, зная, что цѣна 3 фунтовъ его, *увеличенная 5-ю рублями*, равна цѣнѣ 7 фунтовъ, *уменьшенной* 2-мя рублями?“

Отвѣтъ: 1 р. 75 к. удовлетворяетъ этой задачѣ, какъ нетрудно убѣдиться повѣркою.

Возможность исправленія задачи въ данномъ случаѣ обусловливалась тѣмъ, что хотя искомое и есть здѣсь величина положительная, но данныя (5 р. и 2 р.) могутъ быть принимаемы въ двухъ противоположныхъ значеніяхъ — въ смыслѣ придаваемыхъ и вычитаемыхъ величинъ.

Примѣръ II.—*Найти лѣта нѣкотораго лица, зная, что если изъ пять разъ взятаго числа его лѣтъ вычесть удвоенный возрастъ, который оно имѣло 20 лѣтъ тому назадъ, то въ остаткѣ получится число лѣтъ, какое оно будетъ имѣть черезъ 12 лѣтъ?*

Пусть будетъ x — требуемый возрастъ. Изъ условій задачи непосредственно получаемъ уравненіе

$$5x - (x - 20).2 = x + 12. \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Рѣшивъ уравненіе, находимъ

$$x = -14.$$

Изслѣдованіе. — Искомая величина—число лѣтъ лица, по существу своему, положительная; а потому отрицательное рѣшеніе указываетъ на невозможность задачи. Эту невозможность легко обнаружить слѣдующимъ образомъ. Если изъ упятереннаго числа лѣтъ лица вычесть удвоенное число лѣтъ, которое лицо это имѣло 20 лѣтъ тому назадъ, то получится $5x-(x-20).2$ или $3x+40$; при положительномъ x, каково это количество и должно быть по существу своему, $3x+40$ никоимъ образомъ не можетъ равняться $x+12$, т. е. условія задачи невозможны. Попытаемся теперь измѣнить условія задачи, не измѣняя величины данныхъ, такъ, чтобы задача сдѣлалась возможною и имѣла рѣшеніемъ положительное число 14. Съ этою цѣлью измѣнимъ въ уравненіи (1) x въ $-x$; найдемъ:

$$-5x-(-x-20)2 = -x+12,$$

или, помноживъ обѣ части на -1:

$$5x-(x+20)2 = x-12.$$

По извѣстной теоремѣ, рѣшеніе этого ур-нія есть $x = +14$; оно представляетъ прямой отвѣтъ на задачу, соотвѣтствующую этому ур-нію. Задача эта, очевидно, такова:

„Найти возрастъ лица, зная, что если изъ упятереннаго числа его лѣтъ вычесть удвоенное число лѣтъ, *какое оно будетъ имѣть черезъ 20 лѣтъ* (а не: какое оно имѣло 20 л. тому назадъ, какъ было въ условіи данной задачи), то въ остаткѣ получится число лѣтъ, какое это лицо имѣло *12 л. тому назадъ* (вмѣсто: будетъ имѣть черезъ 12 л., какъ дано было въ условіи задачи).

Легко провѣрить, что число 14 удовлетворяетъ условіямъ этой измѣненной задачи.

Примѣръ III.—*Отцу 40 лѣтъ, а сыну 13; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ вчетверо старше сына?*

Положимъ, что черезъ x лѣтъ отъ настоящаго времени отецъ будетъ вчетверо старше сына; слѣд. отцу будетъ $40+x$, а сыну $13+x$ лѣтъ; и по условію задачи имѣемъ ур-ніе

$$40+x = 4(13+x) \quad . \ . \ . \ (1).$$

Рѣшивъ это ур., найдемъ

$$x = -4,$$

Изслѣдованіе. — Прямымъ отвѣтомъ на вопросъ должно бы было служить положительное рѣшеніе; отрицательное рѣшеніе указываетъ, что вопросъ невозможенъ въ томъ смыслѣ, въ какомъ онъ заданъ. Невозможность вопроса можно обнаружить слѣдующимъ образомъ. Отношеніе лѣтъ отца къ лѣтамъ сына въ настоящее время выражается неправильною дробью $\frac{40}{13}$, которой величина *меньше* 4, и требуется узнать, сколько нужно придать къ числителю и знаменателю, чтобы дробь сдѣлалась равна 4, т. е. чтобы она *увеличилась*. Но легко видѣть, что отъ приданія по-ровну къ членамъ неправильной дроби величина ея не увеличивается, а уменьшается; въ самомъ дѣлѣ, взявъ неправильную дробь $\frac{a}{b}$ (гдѣ, слѣд,, $a > b$), и придавъ къ членамъ ея по m, получимъ дробь $\frac{a+m}{b+m}$; приведя обѣ дроби къ общему знаменателю, найдемъ, что первая $= \frac{ab+am}{b(b+m)}$, а вторая $\frac{ab+bm}{b(b+m)}$; сравнивая числителей, и

замѣчая, что $am > bm$, такъ-какъ $a > b$, находимъ, что дробь дѣйствительно уменьшилась. Итакъ, постановка вопроса сдѣлана неправильно, что и обнаружилось въ рѣшеніи полученіемъ отрицательнаго отвѣта.

Это отрицат. рѣшеніе указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ — какъ слѣдуетъ правильно поставить вопросъ, именно, что слѣдуетъ спросить: *сколько лѣтъ тому назадъ* отецъ былъ вчетверо старше сына?

Что вопросъ долженъ быть измѣненъ въ этомъ смыслѣ,—это показываетъ и тотъ пріемъ, который служилъ для исправленія несообразныхъ условій въ двухъ предыдущихъ задачахъ. Подставивъ въ ур. (1) $-x$ вмѣсто x, найдемъ ур.

$$40 - x = 4(13 - x),$$

которое, очевидно, служитъ алгебраическимъ выраженіемъ условій вопроса:

„Въ настоящее время отцу 40, а сыну 13 лѣтъ; сколько лѣчъ тому назадъ отецъ былъ вчетверо старше сына?“ Положительное рѣшеніе $x = 4$ и служитъ прямымъ отвѣтомъ на эту задачу, какъ легко убѣдиться въ этомъ повѣркою.

Примѣръ IV.—*Изъ двухъ игроковъ* A *и* B *первый имѣетъ 400 р., а второй 120 р.; послѣ нѣсколькихъ игръ у* A *оказалось втрое боѣе, чѣмъ у* B. *Сколько выигралъ* A?

Пусть A выигралъ x рублей; ур-ніе будетъ

$$400 + x = 3(120 - x),$$

откуда

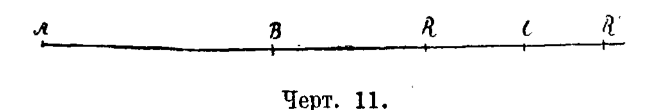
$$x = -10.$$

Изслѣдованіе. Прямымъ отвѣтомъ на вопросъ служило бы положительно рѣшеніе; отрицательное рѣшеніе показываетъ, что вопросъ невозможенъ въ томъ смыслѣ, въ какомъ онъ заданъ. Невозможность вопроса легко обнаружить. Лицо A, имѣя до начала игры больше чѣмъ втрое лица B, послѣ выиграша, очевидно, не можетъ имѣть втрое больше денегъ чѣмъ у B. Поэтому, вопросъ: „сколько выигралъ A?“ поставленъ неправильно. Отрицательный знакъ рѣшенія указываетъ—какъ должно правильно поставить вопросъ, именно, что нужно спросить: „сколько руб. A проигралъ?“ Къ тому же заключенію приведетъ и указанный выше пріемъ истолкованія отрицательныхъ рѣшеній; въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ ур-ніе $-x$ вмѣсто x, найдемъ:

$$400 - x = 3(120 + x);$$

положительное рѣшеніе $x = +10$ этого ур-нія и служитъ прямымъ отвѣтомъ на вопросъ, ему соотвѣтствующій: „изъ двухъ игроковъ A имѣлъ 400 р., B — 120 р.; послѣ нѣсколькихъ игръ у A оказалось втрое болѣе чѣмъ у B. Сколько *проигралъ* A?“

Примѣръ V.—*Два поѣзда идутъ равномѣрно въ одномъ направленіи къ станціи, отстоящей отъ мѣста выхода перваго поѣзда на 200 верстъ, а отъ мѣста выхода втораго на 90 верстъ. Первый поѣздъ проходитъ 25 верстъ въ часъ, второй 14 верстъ. Опредѣлить разстояніе точки встрѣчи поѣздовъ отъ станціи, полагая, что оба поѣзда выходятъ въ одно время?*



Черт. 11.

Пусть поѣзда выходятъ изъ A и B и ѣдутъ къ станціи C; такъ какъ нельзя заранѣе сказать, встрѣтятся ли поѣзды недоѣзжая станціи C, или проѣхавши ее, то для составленія уравненія необходимо сдѣлать то или другое допущеніе. Итакъ, предположимъ, что точка встрѣчи находится въ разстояніи x верстъ *недоѣзжая* до станціи C, въ нѣкоторой точкѣ R. Первый поѣздъ, выходящій изъ A, проходитъ раз-

стояніе AR, равное $200 - x$ вер., дѣлая по 25 верстъ въ часъ, а потому пройдетъ все разстояніе AR въ $\frac{200-x}{25}$ часовъ; второй, дѣлая въ часъ по 14 в., пройдетъ разстояніе $BR = 90 - x$ в., въ $\frac{90-x}{14}$ час. Выходя со станцій A и B въ одно время, они употребляютъ на прохожденіе разстояній AR и BR одинаковое число часовъ, а потому

$$\frac{200-x}{25} = \frac{90-x}{14}, \ldots\ (1)$$

откуда $x = -50$ верстамъ.

Изслѣдованіе. — Прямымъ отвѣтомъ на вопросъ служило-бы положительное рѣшеніе; посмотримъ, какъ объяснить въ данномъ случаѣ происхожденіе отрицательнаго отвѣта? Обращаясь къ условіямъ задачи, не находимъ въ нихъ никакой несообразности: поѣздъ, выходящій со станціи A, двигаясь скорѣе поѣзда, выходящаго изъ B, долженъ догнать его гдѣ нибудь вправо отъ точки B. Слѣд., не въ условіяхъ задачи должно искать источникъ отрицательнаго отвѣта. Обращаясь затѣмъ къ вопросу, замѣчаемъ, что онъ поставленъ не вполнѣ опредѣленно, такъ какъ въ немъ не указано, гдѣ искать точку встрѣчи — не доѣзжая станціи C, или за нею. Въ виду этой неполной ясности требованія, пришлось при составленіи ур-нія сдѣлать одно изъ двухъ предположеній: или что поѣзда встрѣтятся влѣво отъ C, или что встрѣча ихъ произойдетъ вправо отъ C. Мѣ сдѣлали первое предположеніе, и получили отртцательный отвѣтъ, который и указываетъ, что слѣдовало сдѣлать противное этому предположеніе. Предположивъ, что встрѣча произойдетъ вправо отъ C, въ нѣкоторой точкѣ R′, отстоящей отъ C на x верстъ, получимъ ур-ніе

$$\frac{200+x}{25} = \frac{90+x}{14}, \ldots\ (2)$$

котораго положительное рѣшеніе $x = +50$ и служитъ прямымъ отвѣтомъ на вопросъ: „въ какомъ разстояніи за станціей C оба поѣзда встрѣтятся?“ Замѣтимъ, что и здѣсь ур. (2) получается изъ (1) перемѣною x въ $-x$.

Въ данномъ примѣрѣ отрицательное рѣшеніе получилось не отъ несообразности задачи, но отъ ложнаго предположенія, сдѣланнаго при составленіи ур-нія. Абсолютная величина отриц. рѣшенія, взятая съ положительнымъ знакомъ, представляетъ отвѣтъ на задачу, но представляетъ неизвѣстное съ значеніемъ, прямо противоположнымъ тому, какое ему придавали при составленіи уравненія.

Примѣръ VI.—*Три точки* A, B *и* C *находятся на одной прямой, причемъ точка* B *лежитъ между двумя другими; разстояніе* $AB = 2$ *фут* ; $AC = 5$ *ф. На продолженіи прямой, соединяющей точки* A *и* C, *найти такую точку* M, *которой разстояніе отъ точки* B *было бы среднимъ пропорціональнымъ между ея разстояніями отъ точекъ* A *и* C?

Черт. 12.

Точка M можетъ находиться или вправо отъ точки C, или влѣво отъ точки A, и à priori нельзя сказать, какое изъ этихъ двухъ положеній она должна занимать. Допустимъ, что она должна находиться вправо отъ C, и обозначимъ разстояніе ея отъ A буквою x. Уравненіе задачи будетъ

$$(x-2)^2 = x(x-5). \ldots\ (1)$$

Рѣшивъ уравненіе, найдемъ: $x = -4$.

Изслѣдованіе. — Прямымъ отвѣтомъ на вопросъ было бы положительное рѣшеніе; затѣмъ, такъ какъ условія задачи не содержатъ никакой несообразности, то заключаемъ, что отрицательное рѣшеніе обусловливается единственно ложнымъ предположеніемъ, сдѣланнымъ при составленіи уравненія. Поэтому, положимъ, что искомая точка находится влѣво отъ A, и обозначимъ по прежнему разстояніе AM′ буквою x. Уравненіе задачи будетъ въ этомъ предположеніи такое:

$$(x+2)^2=x(x+5). \;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Но если въ ур. (1) перемѣнимъ x въ $-x$, то найдемъ

$$(-x-2)^2=-x(-x-5), \quad \text{или} \quad (x+2)^2=x(x+5),$$

т. е. ур. (2). Изъ этого прямо заключаемъ, что корень ур-нія (2) отличается отъ корня ур-нія (1) только знакомъ, и потому равенъ $+4$. Итакъ, точка M находится влѣво отъ A, въ разстояніи $=4$ ф. отъ этой точки.

Такимъ образомъ и въ этой задачѣ отрицательное рѣшеніе указывало только на ложное предположеніе, сдѣланное относительно положенія искомой точки при составленіи уравненія.

Примѣръ VII.—*Имѣемъ двухъ сортовъ чай въ 5 р. и въ 8 р. фунтъ. Сколько нужно взять каждаго сорта, чтобы составить 6 фунт. цѣною въ 10 р. за фунтъ?*

Если перваго сорта возьмемъ x ф., то втораго нужно взять $6-x$ ф. Цѣна перваго будетъ $5x$ р., цѣна втораго $8(6-x)$ р., цѣна всей смѣси $5x+8(6-x)$; по условію:

$$5x+8(6-x)=60,$$

откуда

$$x=-4.$$

Изслѣдованіе. — Искомое данной задачи есть величина существенно положительная, а потому отрицательное рѣшеніе здѣсь не имѣетъ смысла. Измѣнивъ въ ур-ніи x на $-x$, найдемъ ур., котораго рѣшеніе будетъ $+4$, но подобрать задачу, соотвѣтствующую измѣненному ур-нію, и однородную съ данной, въ этомъ случаѣ нельзя. Обстоятельство это указываетъ на то, что задача абсолютно невозможна. И дѣйствительно, изъ двухъ сортовъ чаю — въ 5 и въ 8 р. за фунтъ нельзя составить смѣси, цѣна одного фунта которой превышала бы эти цѣны.

Примѣръ VIII.—*За входъ въ музей взымается плата двоякаго рода, а именно: 20 коп. (причемъ сборъ этого рода назначается на содержаніе богадѣльни), и кромѣ этого взымается плата, пропорціональная числу часовъ, проведенныхъ посѣтителемъ въ музеѣ, причемъ за каждый часъ берется по 5 коп. (этотъ сборъ назначается на новыя пріобрѣтенія). Однажды 60 человѣкъ вошли въ музей въ полдень, и вышли всѣ въ одно время. Во сколько часовъ они оставили музей, если весь сборъ былъ равенъ 9 рублямъ?*

Пусть x — будетъ число часовъ отъ полудня до момента выхода посѣтителей изъ музея. Сборъ равенъ, съ одной стороны, 900 коп., а съ другой $(20+5x).60$ к. Уравненіе задачи есть

$$(20+5x).60=900,$$

откуда

$$x=-1.$$

Изслѣдованіе. — Хотя неизвѣстное въ данной задачѣ есть время, которое можно считать въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ (до полудня и по-полудни), но очевидно, что въ предложенной задачѣ рѣчь идетъ объ абсолютномъ количествѣ часовъ, проведенныхъ посѣтителями въ музеѣ. Поэтому задача требуетъ положительнаго рѣшенія. Подставивъ въ ур-ніе $-x$ вмѣсто x, мы конечно получимъ ур-ніе, которое будетъ имѣть положительное рѣшеніе $x=+1$; но измѣнить задачу такъ, чтобы

она соотвѣтствовала измѣненному ур-нію, оказывается невозможно. Такимъ образомъ, отрицательное рѣшеніе указываетъ, въ данномъ случаѣ, на абсолютную невозможность задачи. Невозможность задачи состоитъ въ томъ, что полный сборъ (9 руб.) меньше даже суммы, получаемой отъ одного 20-ти копѣечнаго сбора со всѣхъ 60 лицъ, составляющей 12 р., а это, очевидно, нелѣпо.

377. Заключеніе. — Разобранные примѣры приводятъ къ тому заключенію, что полученіе отрицательныхъ рѣшеній указываетъ: 1) или на несообразность самыхъ условій задачи, какъ въ примѣрахъ I и II; 2) или на неправильную постановку вопроса, какъ въ примѣрахъ III и IV; 3) или на неправильное предположеніе, сдѣланное при составленіи ур-нія, какъ въ примѣрахъ V и VI; 4) или наконецъ, на абсолютную невозможность задачи (примѣры VII и VIII).

Для *истолкованія смысла отрицательнаго рѣшенія* всегда употребляется одинъ и тотъ же пріемъ: въ уравненіе, вытекающее изъ условій задачи, вмѣсто x подставляютъ $-x$, и получаютъ такимъ образомъ новое ур-ніе, корень котораго имѣетъ прежнюю абсолютную величину, но положительный знакъ. Затѣмъ пытаются, *не измѣняя численнаго значенія данныхъ*, подобрать задачу, которая соотвѣтствовала-бы измѣненному уравненію. Если эта попытка будетъ имѣть успѣхъ, то слѣдуетъ заключить, что отрицательное рѣшеніе означало только нѣкоторую неправильность въ условіяхъ, либо въ постановкѣ вопроса, либо въ предположеніи при составленіи ур-нія, и положительное рѣшеніе измѣненнаго ур-нія будетъ служить прямымъ отвѣтомъ на исправленную задачу. Если же сказанная попытка будетъ безуспѣшна, то слѣдуетъ заключить, что задача абсолютно невозможна.

378. III. Нулевыя рѣшенія. Когда a конечно, а $b=0$, тогда $x=\frac{0}{a}$; а такъ какъ частное отъ раздѣленія нуля на конечное количество есть ноль, то

$$x=0.$$

Обращаясь къ уравненію, находимъ, что при $b=0$, оно принимаетъ видъ $ax=0$; но чтобы произведеніе двухъ множителей, одинъ изъ которыхъ конеченъ, равнялось 0, необходимо, чтобы другой множитель равнялся 0; и такъ, ур. не можетъ быть удовлетворено никакимъ инымъ значеніемъ неизвѣстнаго, кромѣ нуля. Такое рѣшеніе называютъ *нулевымъ*.

Если по смыслу задачи неизвѣстное можетъ быть нулемъ, то нулевое рѣшеніе дастъ удовлетворительный отвѣтъ на вопросъ; если же искомое, по смыслу вопроса, означаетъ число неравное нулю, то полученіе нулеваго рѣшенія укажетъ на невозможность задачи.

Примѣръ I.—*Отцу 57 лѣтъ, а сыну 19; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ втрое старше сына?*

Обозначивъ искомое буквою x, будетъ имѣть ур-ніе

$$57+x=3(19+x),$$

или $$57+x=57+3x, \quad \text{или} \quad 2x=0, \quad \text{откуда} \quad x=0.$$

Отвѣтъ этотъ даетъ удовлетворительное рѣшеніе вопроса, показывая, что уже въ настоящее время отецъ втрое старше сына; дѣйствительно: $57=19\times 3$.

Примѣръ II.—*Знаменатель дроби равенъ $\frac{7}{8}$ ея числителя; если же къ числителю придать 5, а къ знаменателю 10, то дробь обратится въ $\frac{1}{2}$. Найти дробь?*

Означивъ числителя искомой дроби буквою x, имѣемъ ур-ніе

$$\frac{x+5}{\frac{7}{8}x+10}=\frac{1}{2},\quad \text{откуда}\quad x=0.$$

Этотъ отвѣтъ обнаруживаетъ, что такой дроби, какъ требуется въ задачѣ, не существуетъ.

379. IV. Безконечныя рѣшенія. — Если $a=0$, $b\lesseqgtr 0$, общая формула принимаетъ видъ

$$x=\frac{b}{0}=\infty;$$

это значитъ, что x безконечно—велико; обращаясь къ уравненію, находимъ, что оно въ данномъ случаѣ принимаетъ видъ

$$0\times x=b,$$

и требуетъ нахожденія такого числа, которое, будучи умножено на ноль, давало-бы конечное произведеніе b. Но мы знаемъ, что ноль, умноженный на конечное количество, даетъ всегда ноль; а между тѣмъ вторая часть ур-нія отлична отъ нуля, и слѣд. *невозможно удовлетворить уравненію никакимъ конечнымъ значеніемъ* x. Итакъ, безконечныя рѣшенія служатъ признакомъ невозможности удовлетворить ур-нію конечнымъ значеніемъ неизвѣстнаго.

Но не всегда такія рѣшенія означаютъ невозможность задачи. Когда, по смыслу задачи, неизвѣстное должно быть конечнымъ количествомъ, то безконечное рѣшеніе укажетъ невозможность задачи.

Примѣръ. — *Найти число, котораго половина, сложенная съ его третью, превышала-бы на 6 единицъ пять разъ взятый избытокъ четверти этого числа надъ его двѣнадцатою долею.*

Называя искомое число буквою x, получимъ уравненіе

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{12}\right)+6.$$

Освобождая это ур. отъ дробей находимъ

$$10x=10x+72,\quad \text{или}\quad (10-10)x=72,\quad \text{откуда}\quad x=\frac{72}{10-10}=\frac{72}{0}=\infty.$$

Полученное безконечное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи. О невозможности задачи можно заключить à priori, измѣнивъ нѣсколько форму заданія. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ какого нибудь числа составляютъ вмѣстѣ $\frac{5}{6}$ его; а избытокъ $\frac{1}{4}$ надъ $\frac{1}{12}$ числа составляетъ $\frac{1}{6}$ этого числа; а потому задача можетъ быть выражена такъ: „найти число, $\frac{5}{6}$ котораго превышаютъ на 6 единицъ $\frac{5}{6}$ того же числа?“

Въ этой формѣ нелѣпость задачи становится очевидною.

Когда неизвѣстное есть величина *вспомогательная*, то случается, и именно въ вопросахъ геометрическихъ, что безконечное значеніе x не указываетъ невозможности задачи. Такъ, когда для опредѣленія положенія прямой, удовлетворяющей различнымъ геометрическимъ условіямъ, принимаютъ за неизвѣстное-разстояніе между точкою пересѣченія этой прямой съ данною прямою и точкою, взятою на этой второй прямой, то очевидно, что безконечное значеніе неизвѣстнаго укажетъ на параллельность обѣихъ прямыхъ.

Примѣръ.—*Къ двумъ кругамъ, которыхъ радіусы равны* R *и* r, *провести общую внѣшнюю касательную (Черт. 16).*

Задача будетъ рѣшена, если мы опредѣлимъ положеніе точки Т, въ которой искомая касательная встрѣчаетъ линію центровъ. Примемъ за неизвѣстное-разстояніе точки Т отъ центра О; изъ подобія треугольниковъ ОАТ и oaТ имѣемъ пропорцію

$$\mathrm{TO} : \mathrm{T}o = \mathrm{OA} : oa,$$

или, положивъ: $\mathrm{OA} = \mathrm{R}$, $oa = r$, $\mathrm{O}o = d$ и $\mathrm{OT} = x$:

$$x : (x - d) = \mathrm{R} : r, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R} - r}.$$

Сдѣлавъ $\mathrm{R} = r$, найдемъ: $x = \frac{d\mathrm{R}}{0} = \infty$. Но это безконечное рѣшеніе отнюдь не означаетъ невозможности задачи: оно показываетъ только, что при данномъ условіи ($\mathrm{R} = r$) точка Т удалилась въ безконечность, иными словами, что общая касательная приняла особое положеніе относительно линіи центровъ, а именно: сдѣлалась параллельна этой линіи. И въ самомъ дѣлѣ, при $\mathrm{R} = r$, фигура О$\mathrm{A}ao$ обращается въ прямоугольникъ, и слѣдовательно линія $\mathrm{A}a$ дѣлается параллельна $\mathrm{O}o$.

380. V. Неопредѣленныя рѣшенія.—При $a = o$ и $b = o$ общая формула принимаетъ видъ

$$x = \frac{0}{0},$$

означающій *неопредѣленность*. Обращаясь къ ур-нію, находимъ, что оно беретъ видъ: $o \times x = o$. Какова бы ни была величина x, первая часть всегда равна нулю, а слѣд. ур-ніе обращается въ тождество при всякомъ x, а потому оно дѣйствительно неопредѣленно.

Неопредѣленныя рѣшенія указываютъ на неопредѣленность задачи, т. е. на то, что условія вопроса не ограничиваютъ произвола неизвѣстнаго.

Примѣръ.—*Найти возрастъ лица, зная, что если изъ утроеннаго числа его лѣтъ вычесть удвоенное число лѣтъ, какое лицо это будетъ имѣть черезъ 10 лѣтъ, то въ результатѣ получится то число лѣтъ, какое лицо имѣло 20 лѣтъ тому назадъ.*

Обозначивъ искомое число лѣтъ буквою x, прямо имѣемъ ур-ніе

$$3x - 2(x + 10) = x - 20,$$

или $x - 20 = x - 20$, или $(1 - 1)x = 20 - 20$, откуда $x = \frac{20 - 20}{1 - 1} = \frac{0}{0}$.

Это рѣшеніе указываетъ на полную неопредѣленность задачи; въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что условія данной задачи—только кажущіяся и не ограничиваютъ произвола неизвѣстнаго. Дѣйствительно, такъ какъ $3x - 2(x + 10)$, по упрощеніи, обращается въ $x - 20$, то задачу можно выразить такъ: „найти возрастъ лица, зная, что число лѣтъ, какое это лицо имѣло 20 л. тому назадъ, равно возрасту, какой оно имѣло 20 л. тому назадъ“. Очевидно, что этому условію удовлетворяетъ всякое число, и что задача ничѣмъ не ограничиваетъ величину неизвѣстнаго.

Если въ формулѣ $x = \frac{b}{a}$ выраженія a и b суть цѣлые полиномы относительно одной и той же буквы y, то можетъ случиться, что при нѣкоторомъ частномъ значеніи y' этой буквы полиномы b и a обращаются въ нули; тогда x представится подъ видомъ неопредѣленности $\frac{0}{0}$. Но отсюда не слѣдуетъ заключать, что задача неопредѣленна въ этомъ частномъ случаѣ. Неопредѣленность эта, какъ мы уже знаемъ,

только кажущаяся, и зависитъ отъ того, что въ уравненіе $ax = b$ введенъ множитель, обращающійся въ ноль въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ, вслѣдствіе чего окончательное ур-ніе, изъ котораго выведенъ x, *не тождественно первоначальному уравненію.* Поэтому нужно вернуться къ первоначальнымъ вычисленіямъ и уничтожить этотъ обращающійся въ ноль множитель, прежде чѣмъ будетъ сдѣлано частное предположеніе.

Впрочемъ, можно это сдѣлать и въ самой формулѣ x т. е. раскрыть ея неопредѣленность. Мы знаемъ, что если b обращается въ 0 при $y = y'$, то оно дѣлится на $y - y'$, такъ-что можно его представить въ видѣ: $(y - y').b'$, полагая, что b' уже не обращается въ 0 при $y = y'$; точно такимъ же образомъ $a = (y - y').a'$, гдѣ уже a' не содержитъ множителя $y - y'$. Такимъ образомъ

$$x = \frac{(y - y')b'}{(y - y')a'} = \frac{b'}{a'}.$$

Положивъ теперь $y = y'$, мы и найдемъ истинное значеніе кажущейся неопредѣленности формулы x.

Если бы оказалось, что b и a содержатъ $y - y'$ въ степени высшей первой, то должны бы были выдѣлить эту степень въ обоихъ членахъ дроби, сдѣлать сокращеніе и потомъ уже положить $y = y'$.

Примѣръ.—*Вычислить площадь трапеціи, которой основанія равны соотвѣтственно a и b, а высота$=h$, разсматривая ее какъ разность площадей двухъ треугольниковъ, составляемыхъ основаніями трапеціи и продолженными до пересѣченія непараллельными ея боками.*

Черт. 13.

Обозначивъ искомую площадь буквою S, имѣемъ:

$$S = \frac{a \times EG}{2} - \frac{b \times EF}{2}.$$

Изъ подобія треугольниковъ DEC и AEB находимъ

$$\frac{EG}{EF} = \frac{a}{b}, \quad \text{или} \quad \frac{EF + h}{EF} = \frac{a}{b}, \text{ откуда } EF = \frac{bh}{a - b};$$

слѣд.

$$EG = EF + h = \frac{bh}{a - b} + h = \frac{ah}{a - b}.$$

Такимъ образомъ:

$$S = \frac{h}{2} \times \frac{a^2 - b^2}{a - b}.$$

Пока a отлично отъ b, эта формула даетъ для площади трапеціи вполнѣ опредѣленную величину. Но если положить $a = b$, формула принимаетъ видъ $S = \frac{0}{0}$, и задача, повидимому, дѣлается неопредѣленною. Но эта неопредѣленность-только *кажущаяся,* и зависитъ отъ того, что числитель и знаменатель S содержатъ общаго множителя $a - b$, который въ частномъ предположеніи $a = b$ обращается въ ноль. Сокративъ предварительно дробь $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ на $a - b$, найдемъ $S = \frac{h}{2}(a + b)$; положивъ, затѣмъ, $a = b$, найдемъ $S = ah$ — величину *вполнѣ опредѣленную.* И дѣйствительно, при $a = b$ трапеція превращается въ параллелограммъ, котораго площадь равна ah.

381. *Заключеніе. Уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ;*

$$ax = b$$

имѣетъ единственное и конечное рѣшеніе, когда a *отлично отъ нуля; когда* $a = 0$, а $b \gtrless 0$, *уравненіе невозможно, въ томъ смыслѣ, что оно не имѣетъ конечныхъ рѣшеній; наконецъ, когда* $a = b = 0$, *уравненіе неопредѣленно, причемъ неопредѣленность можетъ быть или дѣйствительная, или только кажущаяся.*

Укажемъ теперь методы изслѣдованія общихъ вопросовъ, со всѣми деталями, и для этого выберемъ нѣсколько типичныхъ примѣровъ.

Первый примѣръ изслѣдованія.

382. *Отцу* a, *а сыну* b *лѣтъ; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ* n *разъ старше сына?*

Пусть это случится черезъ x лѣтъ отъ настоящаго времени; уравненіе задачи, очевидно, будетъ:

$$a + x = n(b + x);$$

откуда

$$x = \frac{a - nb}{n - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Изслѣдованіе.—n есть число большее 1; слѣд. знаменатель всегда отличенъ отъ нуля и положителенъ. Относительно числителя возможны три предположенія: $a > bn$; $a = nb$; $a < nb$.

1. $a > nb$.—При этомъ условіи и числитель, а слѣд. и x, положителенъ.

Это положительное значеніе x даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ, т. е. что *въ будущемъ*, по истеченіи числа лѣтъ, выражаемаго формулою x, отецъ будетъ въ n разъ старше сына. И въ самомъ дѣлѣ, отношеніе лѣтъ отца къ лѣтамъ сына въ настоящее время равно $\frac{a}{b}$ (непр. дроби); требуется, чтобы это отношеніе уменьшилось, ибо изъ условія $a > nb$ находимъ $n < \frac{a}{b}$; но отъ приданія поровну къ членамъ неправильной дроби величина ея дѣйствительно уменьшается.

2. $a = nb$. Въ этомъ случаѣ числитель формулы x обращается въ ноль, а вмѣстѣ съ этимъ и $x = 0$. Это рѣшеніе показываетъ, что искомое событіе имѣетъ мѣсто въ настоящее время, что очевидно, такъ-какъ изъ даннаго условія имѣемъ $\frac{a}{b} = n$, т. е. что уже теперь отношеніе лѣтъ отца и сына имѣемъ требуемую величину n.

3. $a < nb$. Числитель x, а слѣд. и x въ этомъ случаѣ отрицателенъ.

Отрицательное рѣшеніе означаетъ, что вопросъ въ прямомъ смыслѣ невозможенъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ настоящее время отношеніе лѣтъ отца и сына равно $\frac{a}{b}$; изъ условія же имѣемъ, что $n > \frac{a}{b}$, т. е. требуется, чтобы это отношеніе увеличилось; очевидно, что это невозможно въ будущемъ, потому что отъ приданія поровну къ членамъ непр. дроби ея величина не увеличивается, а уменьшается.

Абсолютная величина отрицательнаго рѣшенія удовлетворяетъ уравненію, полученному изъ первоначальнаго перемѣною x на $-x$, т. е. ур-нію:

$$a - x = n(b - x),$$

а потому служитъ прямымъ отвѣтомъ на задачу: „отцу a, а сыну b лѣтъ; *сколько лѣтъ тому назадъ* отецъ былъ въ n разъ старше сына?“

Въ этой формѣ при данномъ условіи: $n > \frac{a}{b}$ задача возможна, потому что отъ вычитанія по-ровну изъ членовъ неправ. дроби величина ея дѣйствительно увеличивается.

Заключеніе. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что если дать предложенной задачѣ наиболѣе общую форму: „отношеніе лѣтъ отца къ лѣтамъ сына есть $\frac{a}{b}$: опредѣлить эпоху, въ которую это отношеніе имѣетъ величину n?" то формула (1) дастъ для всѣхъ случаевъ рѣшеніе задачи, если найденное число лѣтъ считать: въ *будущемъ*, когда оно *положительно*, и въ *прошедшемъ*, когда оно *отрицательно*.

Второй примѣръ изслѣдованія.

383. *Три точки* A,B *и* C *лежатъ на прямой, причемъ точка* B *находится между двумя другими; разстояніе* AB $=$ a, AC $=$ b. *Найти на продолженіи прямой* AC *такую точку* M, *которой разстояніе отъ точки* B *было бы среднимъ пропорціональнымъ между ея разстояніями отъ точекъ* A *и* C? (Черт. 14).

Обозначимъ разстояніе AM буквою x, и положимъ, что искомая точка лежитъ вправо отъ C; въ этомъ предположеніи уравненіе будетъ

$$(x-a)^2 = x(x-b) \;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Предполагая же, что точка M находится влѣво отъ A, получимъ ур.

$$(x+a)^2 = x(x+b) \;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Ур. (2) выводится изъ (1) перемѣною x въ $-x$; слѣд. можно ограничиться рѣшеніемъ ур-нія (1), помня, что если оно имѣетъ отрицательный корень, то этотъ корень, по перемѣнѣ у него знака, будетъ корнемъ ур-нія (2), и слѣд. дастъ точку, лежащую влѣво отъ A; однимъ словомъ, корень ур-нія перваго всегда представляетъ разстояніе искомой точки отъ A, причемъ это разстояніе нужно брать *вправо отъ* A, если корень *положителенъ*, и *влѣво отъ* A, если онъ *отрицателенъ*.

Сдѣлавъ эти подготовительныя замѣчанія, рѣшаемъ ур. (1) и находимъ

$$x = \frac{a^2}{2a-b}\,.$$

Изслѣдованіе. Формула x даетъ мѣсто слѣдующимъ случаямъ:

$$2a-b > o; \quad 2a-b < o; \quad 2a-b = o.$$

1. Если $2a-b > o$, корень ур-нія положителенъ, а потому искомая точка находится вправо отъ A; но задача требуетъ кромѣ того, чтобы эта точка была вправо и отъ C, т. е. чтобы величина x была больше b. Итакъ, нужно разсмотрѣть, удовлетворяется-ли неравенство

$$\frac{a^2}{2a-b} > b;$$

такъ какъ $2a-b$ положительно, то умножая обѣ части неравенства на $2a-b$ и не перемѣняя знакъ неравенства, замѣняемъ послѣднее ему тождественнымъ

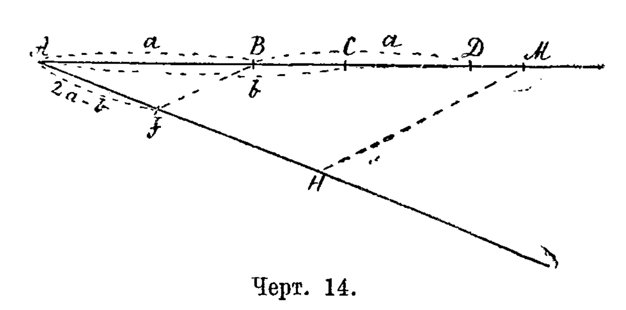
$$a^2 > 2ab - b^2, \quad \text{или} \quad a^2 - 2ab + b^2 > o, \quad \text{или} \quad (a-b)^2 > o;$$

послѣднее неравенство всегда удовлетворено, потому-что квадратъ всегда положителенъ; слѣд. справедливо и тождественное ему первое неравенство. Такимъ образомъ, при условіи $2a-b > o$, ур-ніе имѣетъ положительный корень большій b, опредѣляющій точку M вправо отъ C, какъ того требуетъ заданіе.

2. Если $2a - b < o$, корень ур-нія перваго отрицателенъ, и согласно вышесказанному, опредѣляетъ точку, находящуюся на продолженіи линіи АС, влѣво отъ точки А и въ разстояніи отъ нея, равномъ $\frac{a^2}{b-2a}$.

3. Наконецъ, если $2a - b = o$, количество x обращается въ ∞. Это значитъ, что x неограниченно возрастаетъ по мѣрѣ того какъ b приближается къ $2a$; точка М удаляется отъ А, и когда b дѣлается равнымъ $2a$, точка М дѣлается безконечно далека отъ А, и задача о нахожденіи такой точки невозможна.

Построеніе. Пусть $2a - b > o$. Отложивъ отъ точки В линію $BD = a$, найдемъ, что длина линіи $CD = 2a - b$. Проведя подъ произвольнымъ угломъ къ прямой АС линію АН, отложимъ на ней $AF = 2a - b$ и $AH = a$; соединивъ затѣмъ точки F и В, проводимъ изъ точки Н прямую $HM \parallel FB$; точка М будетъ требуемая. Въ самомъ дѣлѣ, подобіе $\Delta\Delta$ ABF и АМН даетъ:



Черт. 14.

$$AF : AH = AB : AM, \quad \text{или} \quad (2a - b) : a = a : AM, \quad \text{откуда}$$

$$AM = \frac{a^2}{2a - b} = x.$$

Примѣчаніе. Если $2a - b$ уменьшать, приближая къ нулю, линія BF приближается къ совпаденію съ ВА, а линія НМ — къ параллельности съ АВ; вслѣдствіе этого, точка М удаляется отъ С, и когда $2a - b$ обратится въ 0, НМ сдѣлается параллельна АВ, и точка М удалится въ безконечность.

Третій примѣръ изслѣдованія.

384. Задача о фонтанахъ. *Два фонтана наполняютъ бассейнъ: первый, дѣйствуя одинъ, можетъ наполнить бассейнъ въ* a *часовъ; другой, будучи открытъ одинъ, наполнитъ бассейнъ въ* b *часовъ. Кранъ, находящійся въ днѣ, можетъ опорожнить бассейнъ въ* c *часовъ. Во сколько часовъ бассейнъ, вначалѣ пустой, будетъ наполненъ, если оба фонтана и кранъ будутъ открыты одновременно?*

Пусть бассейнъ наполняется въ x часовъ. Первый фонтанъ, наполняя бассейнъ въ a часовъ, въ 1 часъ наполнитъ $\frac{1}{a}$ часть бассейна, а въ x час. $\frac{x}{a}$ частей его. Другой фонтанъ въ тоже самое время наполнитъ $\frac{x}{b}$ частей бассейна. Наконецъ, кранъ выпуститъ въ x час. $\frac{x}{c}$ частей бассейна. — Такъ какъ разность между приходомъ воды и ея расходомъ въ x часовъ, по условію, равна емкости бассейна, то имѣемъ уравненіе

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x}{c} = 1,$$

откуда
$$x = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}}.$$

Изслѣдованіе. Здѣсь слѣдуетъ разсмотрѣть три случая:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{c}\ ;\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{c}\ ;\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

I. Когда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$; величина x конечна и положительна. Это значитъ, что задача возможна, т. е. что бассейнъ черезъ нѣсколько часовъ дѣйствительно будетъ наполненъ. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ есть часть бассейна, наполняемая въ 1 часъ обоими фонтанами, а $\frac{1}{c}$ — количество воды, уносимой въ 1 ч. краномъ; такъ-какъ первое количество, по условію, больше втораго, то очевидно, что по истеченіи нѣсколькихъ часовъ бассейнъ наполнится.

Сверхъ того, если увеличивать c, т. е. уменьшать отверстіе крана, величина x также будетъ уменьшаться, стремясь къ предѣлу $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, котораго она достигаетъ при $c=\infty$, т. е. когда кранъ будетъ закрытъ.

II. Когда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$, величина x становится отрицательной. Это отрицательное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи, т. е. что бассейнъ не можетъ наполниться. Въ самомъ дѣлѣ, неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$ означаетъ, что количество воды, доставляемое въ 1 часъ обоими фонтанами, меньше количества воды, которое отводящій кранъ можетъ унести въ часъ. Очевидно, слѣд., что бассейнъ не можетъ быть наполненъ: задача невозможна въ томъ смыслѣ, въ какомъ она предложена. Для истолкованія отрицательнаго рѣшенія, перемѣняемъ x въ $-x$ въ уравненіи задачи, и получаемъ.

$$-\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c},\quad \text{или}\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{c}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ (1),\quad \text{откуда}\quad x=\frac{1}{\frac{1}{c}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Ур. (1) соотвѣтствуетъ слѣдующей задачѣ: *бассейнъ наполняется краномъ, который, дѣйствуя отдѣльно, наполнилъ-бы бассейнъ въ* c *часовъ; изъ двухъ крановъ, находящихся въ днѣ бассейна, одинъ, будучи открытъ, можетъ опорожнить бассейнъ въ* a *часовъ, а другой, дѣйствуя отдѣльно, въ* b *часовъ. Во сколько часовъ наполнится бассейнъ, вначалѣ пустой, если будутъ открыты всѣ три крана?* Такимъ образомъ, для исправленія задачи слѣдуетъ предположить, что питательные краны становятся опоражнивающими, и наоборотъ.

III. Если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, то $x=\frac{1}{0}=\infty$ и задача невозможна. Въ самомъ дѣлѣ, равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ означаетъ, что количество воды, приносимой въ часъ обоими фонтанами, равно количеству воды, уносимой въ тоже самое время краномъ, сл. бассейнъ никогда не можетъ наполниться: задача абсолютно невозможна.

Четвертый примѣръ изслѣдованія.

385. *Какое число нужно прибавить къ четыремъ даннымъ числамъ* a, b, c, d, *чтобы составить кратную пропорцію?*

Пусть искомое число будетъ x; ур-ніе будетъ, очевидно:

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{c+x}{d+x} \;.\;.\;.\;.\;.\; (1);$$

рѣшая его, находимъ:

$$x=\frac{bc-ad}{(a+d)-(b+c)} \;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Члены искомой пропорціи суть;

$$a+x=\frac{(a-b)(a-c)}{a+d-(b+c)};\ b+x=\frac{(a-b)(b-d)}{a+d-(b+c)};\ c+x=\frac{(a-c)(c-d)}{a+d-(b+c)};\ d+x=\frac{(c-d)(d-b)}{a+d-(b+c)}.$$

Изслѣдованіе. Слѣдуетъ различать два главные случая: знаменатель формулы x отличенъ отъ нуля, или же этотъ знаменатель равенъ нулю; и въ каждомъ изъ этихъ главныхъ случаевъ дѣлать возможныя предположенія относительно числителя.

I. Если $a+d>b+c$ и при этомъ $bc>ad$, или же $a+d<b+c$ и при этомъ $bc<ad$, то для x найдемъ величину положительную, которою вопросъ рѣшается въ прямомъ смыслѣ.

II. Если $a+d>b+c$ и $bc<ad$, или же $a+d<b+c$ и $bc>ad$, то для x получается величина отрицательная, представляющая, очевидно, отвѣтъ на вопросъ: какое число нужно вычесть изъ чиселъ a, b, c и d, чтобы остатки образовали кратную пропорцію?

III. Если $a+d \gtrless b+c$, но $ad=bc$, то $x=0$.

Но условію $ad=bc$ то же, что пропорція: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, откуда имѣемъ теорему: если четыре числа составляютъ пропорцію, то нѣтъ такого числа, которое будучи придано къ каждому изъ нихъ, дало-бы пропорцію.

IV. Если $a+d=b+c$ и $bc \gtrless ad$, то $x=\frac{m}{0}=\infty$ и задача, невозможна, т. е. не существуетъ конечнаго числа, рѣшающаго вопросъ. Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы четыре числа $a+x$, $b+x$, $c+x$, $d+x$ составляли пропорцію, необходимо, чтобы произведеніе крайнихъ равнялось произведенію среднихъ, т. е. чтобы

$$(a+x)(d+x)=(b+x)(c+x).$$

или

$$ad+(a+d)x=bc+(b+c)x.$$

Но, по условію, ad отлично отъ bc, а $a+d=b+c$, слѣд. ни при какомъ конечномъ значеніи x равенство невозможно.

V. Если, наконецъ, $a+d=b+c$ и $ad=bc$, то $x=\frac{0}{0}$, т. е. задача неопредѣленна. Въ самомъ дѣлѣ, для того чтобы четыре числа $a+x$, $b+x$, $c+x$ и $d+x$ составляли кратную пропорцію, необходимо, чтобы произведеніе крайнихъ равнялось произведенію среднихъ; т. е., какъ выше указано, чтобы

$$ad+(a+d)x=bc+(b+c)x;$$

но какъ $ad=bc$ и $a+d=b+c$, это уравненіе есть тождество, а потому удовлетворяется при всякомъ значеніи x: неопредѣленность полная.

Неопредѣленность задачи при данныхъ условіяхъ можно обнаружить еще слѣдующимъ образомъ.

Изъ условія $a+d=b+c$ имѣемъ $d=b+c-a$; подставляя эту величину d въ другое условіе $ad=bc$ или $ad-bc=0$, имѣемъ: $a(b+c-a)-bc=0$, или

$$a^2-a(b+c)+bc=0, \quad \text{или} \quad (a-b)(a-c)=0.$$

Этому равенству можно удовлетворить двояко: или положивъ $a=b$, или $a=c$. При $a=b$, имѣемъ $d=c$, и искомая пропорція беретъ видъ

$$\frac{a+x}{a+x}=\frac{d+x}{d+x};$$

При $a=c$ имѣемъ $d=b$; и искомая пропорція будетъ

$$\frac{a+x}{d+x}=\frac{a+x}{d+x}.$$

И та, и другая пропорціи — ничто иное какъ тождества, и стало быть удовлетворяются при всякомъ x.

Пятый примѣръ изслѣдованія.

386. Задача о курьерахъ. *Два курьера выѣхали въ одно время изъ мѣстъ* A *и* B, *разстояніе между которыми равно* d *верстамъ, и ѣдутъ равномѣрно въ направленіи* AB, *при чемъ первый дѣлаетъ* v *верстъ, второй* v′ *верстъ въ часъ. Въ какомъ разстояніи отъ точки* A *внѣ встрѣтятся?*

Черт. 15.

Пусть точка встрѣчи находится на разстояніи x верстъ отъ A. Такъ какъ, по условію, курьеры выѣзжаютъ изъ точекъ A и B одновременно, то время, въ которое первый проѣзжаетъ разстояніе AC, равно времени, въ которое второй проѣзжаетъ BC. Первый, дѣлая v верстъ въ часъ, проѣдетъ разстояніе $AC=x$ въ $\frac{x}{v}$ часовъ; второй, проѣзжая по v' верстъ въ часъ, на проѣздъ всего разстоянія $BC=x-d$, употребитъ $\frac{x-d}{v'}$ часовъ. Уравненіе будетъ

$$\frac{x}{v}=\frac{x-d}{v'} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

откуда

$$x=d\times\frac{v}{v-v'} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Изслѣдованіе. Замѣтивъ, что d, какъ разстояніе между двумя точками, есть величина положительная, могущая въ частномъ случаѣ равняться нулю, заключаемъ, что между данными величинами могутъ быть слѣдующія соотношенія:

1) $d>0$, $v>v'$, 2) $d>0$, $v<v'$, 3) $d=0$, $v\gtrless v'$; 4) $d>0$, $v=v'$; 5) $d=0$; $v=v'$.

I. Когда $d>0$ и $v>v'$, оба члена дроби $\frac{dv}{v-v'}$ положительны, сл. и x есть величина *положительная*; кромѣ того, $x>d$, потому что d умножается на дробь $\frac{v}{v-v'}$, бо́льшую 1, ибо $v>v-v'$. Это положительное и бо́льшее d значеніе x означаетъ, что встрѣча курьеровъ произойдетъ вправо отъ точки B, т. е. оно даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ. И въ самомъ дѣлѣ, оба курьера выѣзжаютъ изъ точекъ A и B одновременно и догоняющій ѣдетъ быстрѣе передняго ($v>v'$), слѣд. первый непремѣнно догонитъ втораго.

II. Когда $d>0$ и $v<v'$, числитель $dv>0$, а знаменатель $v-v'<0$, слѣд. величина x отрицательна. Это отрицательное рѣшеніе указываетъ на то, что при данныхъ условіяхъ задача невозможна въ томъ смыслѣ, въ какомъ она предложена, т. е. что встрѣча не можетъ произойти въ направленіи AB (вправо отъ B). Дѣйствительно, такъ какъ оба курьера выѣзжаютъ въ одно время и первый ѣдетъ медленнѣе втораго, то онъ никогда не догонитъ послѣдняго.

Чтобы исправить задачу, подставимъ въ ур. (1) $-x$ вмѣсто x; найдемъ:

$$\frac{-x}{v}=\frac{-x-d}{v}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{v}=\frac{x+d}{v'} \;\ldots\ldots (3).$$

Рѣшеніе уравненія (3) по абсолютной величинѣ таково-же какъ и (1), но по знаку положительно, и потому даетъ прямой отвѣтъ на вопросъ, соотвѣтствующій ур-нію (3). Но послѣднее можетъ служить алгебраическимъ выраженіемъ слѣдующихъ двухъ задачъ.

1. x есть разстояніе, проѣзжаемое курьеромъ A; $x+d$ — курьеромъ B, такъ-что второй проѣзжаетъ d верстами больше перваго. Это возможно, если предположить, что оба ѣдутъ не въ направленіи AB, а въ направленіи BA, такъ-что курьеръ, выѣзжающій изъ B, догоняетъ курьера, выѣзжающаго изъ A. Обозначивъ точку встрѣчи буквою C' и положивъ $AC'=x$, найдемъ ур. (3), котораго корень и будетъ служить отвѣтомъ на новую задачу.

Дѣйствительно, такъ какъ $v'>v$, то при движеніи въ направленіи BA, курьеръ B и догонитъ курьера A въ нѣкоторой точкѣ C', лежащей влѣво отъ A. Такимъ образомъ, для истолкованія отрицательнаго рѣшенія, мы измѣнили направленіе движенія курьеровъ.

2. Но легко видѣть, что ур. (3) можно также разсматривать какъ выраженіе условій задачи, отличающейся отъ данной не направленіемъ движенія, а допущеніемъ, что движеніе имѣетъ мѣсто неопредѣл. время, и что встрѣча произойдетъ не въ будущемъ, а что она уже имѣла мѣсто раньше того момента, въ который курьеры проѣзжаютъ — одинъ черезъ A, а другой чрезъ B, въ нѣкоторой точкѣ C', отстоящей влѣво отъ A на $x=\frac{dv}{v'-v}$ верстъ. Что задача и въ этомъ смыслѣ возможна, прямо слѣдуетъ изъ того, что при $v'>v$, курьеръ B, догнавъ A въ точкѣ C', обгоняетъ послѣдняго и ѣдетъ впереди его.

III. Когда $d=0$ и $v\gtrless v'$, то $x=\frac{0\times v}{v-v'}=0$.

Такъ какъ $d=0$, то оба курьера выѣзжаютъ изъ одного мѣста, притомъ одновременно; но они ѣдутъ съ разными скоростями ($v\gtrless v'$), слѣд. одинъ постоянно будетъ впереди другаго, такъ-что никакая точка пути, кромѣ мѣста выѣзда, не можетъ быть ихъ общимъ мѣстомъ. Это и выражается рѣшеніемъ $x=0$.

IV. Когда $d>0$, а $v=v'$, то $x=\frac{dv}{0}=\infty$.

Безконечное рѣшеніе служитъ въ данномъ случаѣ, признакомъ полной невозможности задачи, т. е. невозможности встрѣчи курьеровъ. Дѣйствительно, они выѣзжаютъ одновременно изъ двухъ разныхъ точекъ и ѣдутъ съ одинаковою скоростью: понятно, что разстояніе между ними всегда будетъ $=d$; и слѣд. встрѣча ихъ невозможна.

V. При $d=0$ и $v=v'$

$$x=\frac{0\,.\,v}{0}=\frac{0}{0}.$$

Это рѣшеніе означаетъ полную неопредѣленность задачи. Дѣйствительно, условія $d=0$ и $v=v'$ означаютъ, что курьеры выѣзжаютъ изъ одного мѣста (одновременно) и ѣдутъ съ одинаковою скоростью; очевидно, что они всегда будутъ вмѣстѣ: каждая точка пути будетъ служить мѣстомъ встрѣчи.

Примѣчаніе. Если положить, что курьеры ѣдутъ не въ одну сторону, а навстрѣчу другъ другу, то направленія скоростей будутъ противоположны; слѣд. если одну изъ нихъ, напр. v, будемъ считать положительною, то другую слѣдуетъ принять за отрицательную; обозначивъ ее черезъ $-v'$, найдемъ

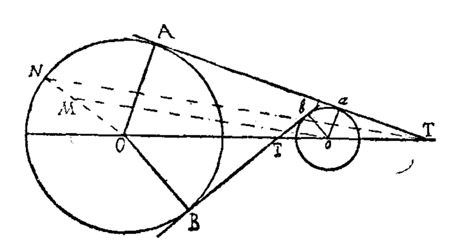
$$x=\frac{dv}{v-(-v')}=\frac{dv}{v+v'}.$$

Не трудно было бы вывести эту формулу и непосредственно. Заключаемъ, что формула (2) прилагается и къ этому случаю, а потому она — вполнѣ общая.

Шестой примѣръ изслѣдованія.

387. *Провести общую касательную къ двумъ кругамъ.*

А. *Проведеніе общей внѣшней касательной.*



Черт. 16.

Пусть разстояніе OT точки встрѣчи общей внѣшней касательной съ линіей центровъ отъ центра O перваго круга будетъ x; радіусъ $OA=R$; $oa=R'$; $Oo=d$. Изъ подобія треугольниковъ OAT и oaT находимъ пропорцію: $OT:oT=OA:oa$ или $x:(x-d)=R:R'$, откуда

$$x=\frac{d\,.\,R}{R-R'}\;\ldots\ldots\;(1).$$

Изслѣдованіе подраздѣляется на три главные случая, смотря потому, будетъ ли знаменатель $R-R'$ положителенъ, отрицателенъ или равенъ нулю.

I. $R-R'>0$, или $R>R'$. Величина x въ этомъ случаѣ положительна, конечна и $>d$, потому-что $\frac{R}{R-R'}>1$, а слѣд. точка T находится на продолженіи линіи Oo. Сверхъ того, необходимо, чтобы $x \gtreqless d+R'$, или $\frac{dR}{R-R'} \gtreqless d+R'$. Такъ какъ $R-R'>0$, то, умножая обѣ части на эту разность, мы не измѣнимъ знака неравенства, слѣд. $dR \gtreqless (d+R')(R-R')$, откуда

$$d \geq R-R'.$$

Неравенство удовлетворяется, когда: 1) круги расположены одинъ внѣ другаго, не имѣя общихъ точекъ, ибо тогда $d>$ даже $R+R'$; 2) круги имѣютъ внѣшнее касаніе; 3) они пересѣкаются. Равенство же удовлетворяется при внутреннемъ касаніи; въ послѣднемъ случаѣ $x=\frac{(R-R')R}{R-R'}=R$, и точка T совпадаетъ съ точкою касанія круговъ.

Когда $R' = 0$, т. е. малая окружность сводится къ своему центру, условіе возможности приводится къ $d \gtrless R$, а $x = d$, — результаты, сами собою понятные.

II. $R - R' < 0$, или $R < R'$. Въ этомъ случаѣ x отрицателенъ, слѣдовательно точка T находится влѣво отъ O. Въ этомъ случаѣ безполезно повторять изслѣдованіе, приведенное выше; ибо для опредѣленія различныхъ положеній точки T, очевидно, достаточно перевернуть предыдущій чертежъ, такъ-чтобы меньшій кругъ помѣщался влѣво отъ большаго.

III. $R - R' = 0$, или $R = R'$, т. е. оба круга равны. При этомъ возможны слѣдующіе случаи:

a) Если $d > 0$, $x = \frac{dR}{0} = \infty$, т. е. точка T удаляется въ безконечность. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ линіи OA и *oa* равны и параллельны, слѣдоват. прямая $Aa \parallel Oo$ и не встрѣчаетъ ее. Безконечное рѣшеніе означаетъ, такимъ образомъ, параллельность общей касательной линіи центровъ. Разсматривая вопросъ съ другой точки зрѣнія, можно замѣтить, что еслибы радіусы, будучи сначала неравными, разнились бы незначительно, точка T находилась бы на очень большомъ разстояніи отъ точки O, и что если радіусы будутъ стремиться къ равенству, разстояніе OT будетъ неограниченно возрастать; слѣд. когда радіусы будутъ строго равны, точка T удалится въ безконечность и $x = \infty$.

b) Если, при $R - R' = 0$, и $d = 0$, тогда $x = \frac{0}{0}$, и задача становится дѣйствительно неопредѣленною. Въ самомъ дѣлѣ, оба круга имѣютъ въ этомъ случаѣ общій центръ и равные радіусы, сл. они сливаются; ни линія *Aa*, ни *Oo*, не имѣютъ въ такомъ случаѣ опредѣленнаго положенія, а потому и точка ихъ встрѣчи абсолютно неопредѣленна.

c) Наконецъ, если $R = R' = 0$, x также принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. Неопредѣленность — опять дѣйствительная, и легко объясняется: оба круга приводятся къ своимъ центрамъ, линія *Aa* сливается съ *Oo*, и точка T можетъ быть взята произвольно на линіи *Oo*.

Построеніе. Формула (1) даетъ пропорцію: $(R - R') : R = d : x$, изъ которой видно, что x есть четвертая пропорціональная къ тремъ линіямъ $R - R'$, R и d. Проведя произвольный радіусъ ON въ кругѣ центра O, откладываемъ на немъ линію $NM = R'$; получимъ $OM = R - R'$. Соединивъ точку M съ *o*, проводимъ линію $NT \parallel Mo$: точка T будетъ требуемая. Проведя изъ нея касательную TA къ кругу O, убѣдимся, что эта линія коснется и круга *o*.

B. *Проведеніе общей внутренней касательной.*

Обозначивъ разстояніе OT_1 буквою x, изъ подобія треугольниковъ OBT_1 и obT_1 имѣемъ: $\frac{x}{R} = \frac{d - x}{R'}$, откуда

$$x = \frac{dR}{R + R_1} \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

Изслѣдованіе. Такъ какъ $\frac{R}{R + R_1} < 1$, то всегда $x < d$, т. е. точка T_1 находится между центрами. Кромѣ того, разстояніе точки T_1 отъ O не должно быть $< R$, т. е. должно имѣть $\frac{dR}{R + R'} \gtrless R$, откуда $d \gtrless R + R'$, т. е. окружности должны быть одна внѣ другой. Въ крайнемъ случаѣ, т. е. при внѣшнемъ касаніи, $d = R + R_1$ и $x = R$, т. е. точка T_1 совпадаетъ съ точкою касанія круговъ.

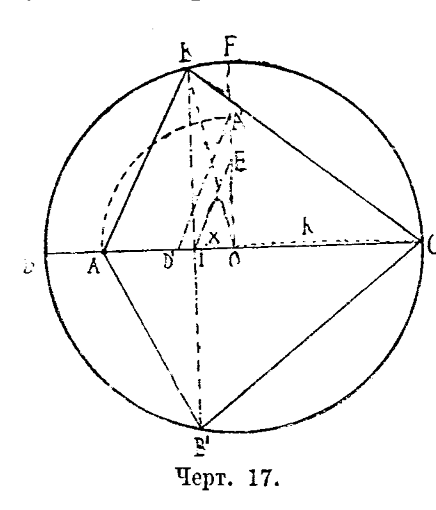
Когда $R'=0$, $x=d$, т. е. точка T_1 совпадаетъ съ центромъ O', къ которому, въ данномъ случаѣ, приводится второй кругъ.

Наконецъ, если $R=R'=0$, $x=\frac{0}{0}$, точка T_1 неопредѣленна, и въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ прямая Aa совпадаетъ съ линіей центровъ.

Построеніе аналогично предыдущему.

Седьмой примѣръ изслѣдованія.

388. *Въ точкѣ* A, *данной внутри круглаго билліарда, помѣщенъ упругій шарикъ. Въ какомъ направленіи нужно его пустить, чтобы, отразившись три раза отъ бортовъ, онъ возвратился снова въ точку* A?



Черт. 17.

По закону отраженія, уголъ паденія равенъ углу отраженія, при чемъ угломъ паденія будетъ уголъ, составляемый направленіемъ паденія (напр. AB) съ радіусомъ, проведеннымъ въ точку B, а угломъ отраженія — уголъ, образуемый направленіемъ отраженнаго движенія (BC) съ тѣмъ же радіусомъ. Зная это, и замѣчая, что фигура расположена симметрично относительно діаметра DC, проходящаго черезъ точку A, усматриваемъ, что задача приводится къ слѣдующей: *въ какомъ направленіи надо пустить шарикъ* A, *чтобы, отразившись отъ борта, онъ ударился въ конечную точку* C *діаметра* DC?

Пусть $OC=R$, $OA=a$, B — искомая точка; проведя хорду BB′ перпендикулярно къ діаметру DC, замѣчаемъ, что какъ скоро извѣстно будетъ разстояніе IO этой хорды отъ центра, то будетъ извѣстно и положеніе искомой точки B. Поэтому за неизвѣстное принимаемъ $OI=x$. Углы: паденія ABO, и отраженія—OBC, равны, слѣд. OB есть биссектрисса угла ABC треугольника ABC; по свойству ея, имѣемъ пропорцію:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AO}{OC};$$

возвысивъ обѣ части въ квадратъ, находимъ:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{a^2}{R^2};$$

затѣмъ, на основаніи теоремъ о квадратѣ стороны треугольника, имѣемъ:

$$AB^2=AO^2+BO^2-2AO.OI=a^2+R^2-2a.x;$$

$$BC^2=OC^2+OB^2+2OC.OI=2R^2+2R.x;$$

подставивъ эти величины въ предыдущую пропорцію, находимъ:

$$\frac{a^2+R^2-2ax}{2R^2+2Rx}=\frac{a^2}{R^2}\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

изъ этого ур-нія, по сокращеніи сначала на R, а затѣмъ на $R-a$, имѣемъ:

$$x=\frac{R(R-a)}{2a}.$$

Изслѣдованіе. Такъ какъ $a < R$ (точка A находится внутри круга O), то предыдущее выраженіе даетъ для x всегда величину положительную; но для возможности задачи этого недостаточно: необходимо еще, чтобы было $x \leqslant R$, или

$$\frac{R(R-a)}{2a} \leqslant R, \quad \text{откуда } a \geqslant \frac{R}{3}.$$

Итакъ, чтобы задача была возможна, нужно, чтобы a имѣло величины въ предѣлахъ между R и $\frac{R}{3}$; слѣд. задача невозможна, когда шарикъ A находится внутри круга, концентричнаго билліарду и описаннаго радіусомъ, равнымъ трети радіуса билліарда.

Когда a измѣняется непрерывно отъ R до $\frac{R}{3}$, x измѣняется непрерывно отъ O до R; въ частности:

при $a = R$, $x = 0$: шарикъ опишетъ половину контура квадрата;

при $a = \frac{R}{2}$, $x = \frac{R}{2}$: шарикъ опишетъ полупериметръ равносторонняго треугольника:

при $a = \frac{R}{3}$, $x = R$, шарикъ опишетъ діаметръ DC.

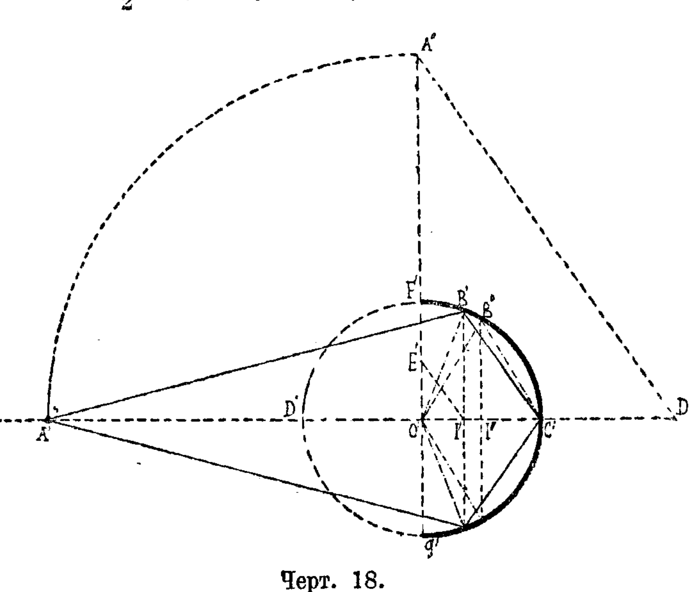
Построеніе. Формула x даетъ пропорцію:

$$a : \frac{R}{2} = (R - a) : x,$$

такъ-что нужно построить четвертую пропорціональную къ тремъ линіямъ: a, $\frac{R}{2}$ и $R - a$. Взявъ на діаметрѣ OF, перпендикулярномъ къ OA, часть $OA' = OA = a$, и $OE = \frac{R}{2}$, затѣмъ на діаметрѣ DC часть $OD' = AD = R - a$, соединимъ точки D′ и A′ и черезъ точку E проводимъ линію EI параллельную A′D′: эта линія и дастъ искомую точку I. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треугольниковъ A′OD′ и EOI имѣемъ:

$$OA' : OE = OD' : OI, \text{ или } a : \frac{R}{2} = (R - a) : OI, \text{ откуда и видно, что } OI = x.$$

Обобщеніе задачи. Когда шарикъ A находится внѣ круга, напр. въ A′ (черт. 18) задача будетъ возможна, если удалить матеріальную полуокружность F′D′G′, обращенную своею выпуклостью къ шарику. Въ самомъ дѣлѣ, въ такомъ случаѣ шарикъ A′ можетъ удариться въ такую точку B′ другой половины круга, что по отраженіи попадетъ въ точку C′, а слѣдовательно отсюда, по симметріи фигуры относительно линіи A′C′ возвратится въ A′. Для опре-



Черт. 18.

дѣленія точки B′, положимъ $O'I' = x'$; въ такомъ случаѣ, подобно предыдущему, найдемъ ур.

$$\frac{a^2 + R^2 + 2ax'}{2R^2 - 2Rx'} = \frac{a^2}{R^2} \ldots (2)$$

отличающееся отъ (1) только перемѣною x на $-x'$; а потому корень его отличается отъ корня ур-нія (1) только знакомъ; итакъ

$$x' = \frac{R}{2} \times \frac{a - R}{a} = \frac{R}{2} \cdot \left(1 - \frac{R}{a}\right).$$

Чтобы x' было положительно, необходимо, чтобы было $\frac{R}{a} < 1$, или $a > R$; слѣд. a можно измѣнять отъ R до ∞. При этомъ x' будетъ измѣняться отъ 0 до $\frac{R}{2}$, т. е. по мѣрѣ того какъ точка A удаляется отъ точки D′, точка паденія B′ приближается къ точкѣ B″, отстоящей на 60° отъ точки C′.

Итакъ, ур. (1) всегда даетъ рѣшеніе задачи, когда шарикъ находится внѣ круга а знакъ —,предшествующій корню, указываетъ ту область, которая заключаетъ точку паденія.

Построеніе аналогично предыдущему и указано на чертежѣ.

Восьмой примѣръ изслѣдованія.

389. *Тѣло, состоящее изъ двухъ призмъ, сложенныхъ равными основаніями, погружено въ ванну, состоящую также изъ двухъ жидкостей, находящихся одна поверхъ другой. Спрашивается, въ какомъ разстояніи надъ поверхностью раздѣла жидкостей находится площадь соприкосновенія призмъ? Плотности и высоты призмъ равны: въ верхней призмѣ* D *и* H, *въ нижней* D′ *и* H′; *плотность верхней жидкости равна* d, *нижней* d′.

Пусть требуемая высота будетъ x. По закону Архимеда: „вѣсъ плавающаго тѣла равенъ вѣсу вытѣсненной жидкости“. Зная это и припоминая, что $P = UDq$ (гдѣ P — вѣсъ тѣла, U — его объемъ, D — плотность и q — вѣсъ кубическій единицы воды), мы, обозначивъ буквою S площадь основанія каждой призмы, имѣемъ уравненіе

$$S(HD + H'D') = S(H + x)d + S(H' - x)d', \ldots . (1)$$

откуда

$$x = \frac{H(d - D) + H'(d' - D')}{d' - d}.$$

Изслѣдованіе. Величина x можетъ быть или положительною, или отрицательною: если она положительная, то можетъ быть рѣшеніемъ предложенной задачи, если же отрицательна, то дастъ отвѣтъ на слѣдующій вопросъ: „въ какомъ разстояніи *подъ* поверхностью, ... “?

Съ другой стороны, никогда количество x, по абсолютной величинѣ, не можетъ быть больше

H′, если x положительно,

и H, если x отрицательно:

иначе тѣло не погружалось бы заразъ въ обѣ жидкости, и ур-ніе (1) не было бы уже уравненіемъ задачи.

Наконецъ, по законамъ равновѣсія жидкостей, d' не можетъ быть меньше d, такъ что относительно знаменателя можетъ быть только два предположенія: $d' - d > 0$ и $d' - d = 0$. Итакъ:

I. $d' - d > 0$. При этомъ относительно числителя возможны 3 предположенія:

1) $H(d - D) + H'(d' - D') > 0$. Въ этомъ случаѣ, для того чтобы величина x дѣйствительно служила рѣшеніемъ задачи, необходимо, чтобы она была $\leqslant H'$ слѣд. нужно чтобы

$$H(d - D) + H'(d' - D') \leq H'(d' - d),$$

т. е.

$$HD + H'D' \geq (H + H')d.$$

2) $H(d - D) + H'(d' - D') < 0$. Въ этомъ случаѣ x отрицателенъ, и для того чтобы онъ служилъ рѣшеніемъ задачи, необходимо чтобы абсолютная величина его была $\leq H$, т. е. чтобы

$$-\frac{H(d - D) + H'(d' - D')}{d' - d} \leq H,$$

т. е. чтобы

$$HD + H'D' \leq (H + H')d'.$$

3) $H(d - D) + H'(d' - D') = 0$. Въ такомъ случаѣ $x = 0$, и площадь соприкосновенія призмъ совпадаетъ съ поверхностью раздѣла жидкостей.

II. $d' - d = 0$. Если при этомъ числитель не $= 0$, то $x = \frac{m}{0}$: эта форма означаетъ дѣйствительную невозможность: тѣло не можетъ быть въ равновѣсіи внутри жидкости.

Если же $HD + H'D' = d(H + H')$, то $x = \frac{0}{0}$. Эта форма означаетъ дѣйствительную неопредѣленность: такъ и должно быть, ибо въ данномъ случаѣ тѣло будетъ въ равновѣсіи въ какомъ угодно положеніи.

390. Задачи.

1. Сумма цифръ двузначнаго числа равна 14, если же къ нему прибавить 27, то получится число обращенное. Найти это число?

2. Найти трехзначное число по слѣдующимъ условіямъ: сумма его цифръ равна 18; цифра единицъ вдвое больше цифры сотенъ; если же прибавить къ нему 390, то получится число обращенное.

3. Въ двузначномъ числѣ цифра единицъ составляетъ $\frac{3}{4}$ цифры десятковъ, а разность этихъ двухъ цифръ равна 4. Найти это число?

4. Училище состоитъ изъ трехъ классовъ; въ первомъ классѣ 18 учениками меньше чѣмъ во второмъ, а во второмъ 25 меньше чѣмъ въ третьемъ; если же утроить число учениковъ перваго класса, то получится число учениковъ третьяго. Опредѣлить, сколько было учениковъ въ каждомъ классѣ?

5. Найти стороны треугольника на основаніи слѣдующихъ условій: разность между наибольшею и наименьшею стороною равна 9 ф.; сумма большей и средней стороны равна 24 ф.; если же сложить удвоенную большую съ утроенною среднею и учетверенною меньшею, получится 84 ф.

6. Нѣкто нанялъ рабочаго, которому платилъ за каждый лѣтній день 2 рублями больше чѣмъ за зимній день; зимою рабочій находился у него 12 дней, а лѣтомъ 15, и получилъ за зимнюю работу 8 р. награды, за лѣтнюю же у него былъ сдѣланъ вычетъ 13 р., причемъ оказалось, что въ оба раза онъ получилъ по-ровну. Опредѣлить плату за 1 рабочій день лѣтомъ?

7. Въ ванну, содержащую 342 грамма воды при температурѣ 11^0 С, опущенъ кусокъ мѣди вѣсомъ въ 120 гр. Окончательная температура смѣси равнялась 10^0.

Опредѣлить начальную температуру мѣди, зная, что удѣльная теплота этого металла равна 0,095.

8. Требуется на протяженіи метра помѣстить рядомъ 40 монетъ, частію пятифранковыхъ, частію двуфранковыхъ, зная, что діаметръ первыхъ равенъ 0,037 метра, а вторыхъ 0,027 метра.

9. Метръ пеньковой веревки, при 8 квадр. миллим. поперечнаго разрѣза, вѣситъ 12 граммовъ; веревка намотана на валъ ворота, а къ свободному концу ея привязанъ грузъ въ 50 килогр. На сколько метровъ нужно размотать веревку, чтобы она оборвалась подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса и привязаннаго груза? Извѣстно, что при разрѣзѣ въ 5 кв. мм. веревка разрывается отъ груза въ 5 килогр.

10. Вычислить основаніе и высоту прямоугольника, зная, что сумма ихъ равна 30 метрамъ, и что если увеличить основаніе на 5 метровъ, а высоту на 4 м., то площадь прямоугольника увеличится на 160 квадр. метровъ.

11. За провозъ нѣкотораго товара желѣзная дорога беретъ 12 к. съ 1000 фунтовъ, и съ версты; кромѣ того, за нагрузку взымается 1 р. 85 к. съ 1000 фунтовъ. На какое разстояніе можно перевезти 50000 фунт. за 80 руб?

12. Найти число, котораго половина, сложенная съ его третью, превышала бы на 54 единицы упятеренный остатокъ?

13. Найти число, которое, будучи увеличино своими $\frac{2}{3}$ и 7-ю единицами, давало бы треть суммы, происходящей отъ сложенія 21 единицы съ упятереннымъ искомымъ числомъ?

14. Одинъ работникъ дѣлаетъ въ день a арш. сукна, другой, въ такое же время, b арш. Первый уже выткалъ c аршинъ, а второй m аршинами больше. Спрашивается черезъ сколько дней отъ настоящаго времени количества аршинъ, вытканныхъ тѣмъ и другимъ рабочимъ, сравняются?

15. Желѣзная дорога взымаетъ за провозъ a коп. съ пуда и 1000 верстъ; сверхъ того за нагрузку каждаго вагона вѣсомъ p пуд. платится b руб. На какое разстояніе можно провезти c тысячъ пуд. за m рублей?

16. Найти число, котораго половина, сложенная съ третьею, превышала бы на 6 единицъ m разъ взятый избытокъ четверти этого числа надъ его двѣнадцатою долею?

17. Какое число x надо прибавить къ числителю и знаменателю дроби $\frac{a}{b}$, для того чтобы она была равна дроби $\frac{m}{n}$?

18. Имѣется m фунт. морской воды, въ которыхъ содержится p ф. соли; сколько фунтовъ чистой воды надо прибавить, чтобы m фунтовъ смѣси содержали только p' фунтовъ соли?

19. Два бассейна наполняются водою, каждый изъ особаго крана. Первый кранъ можетъ наполнить бассейнъ, вмѣстимость котораго равна a, въ m часовъ; второй кранъ наполняетъ бассейнъ вмѣстимостью b въ n часовъ. Послѣ того какъ первый кранъ былъ открытъ уже въ теченіи p часовъ, открываютъ и второй. Черезъ сколько часовъ оба бассейна будутъ содержать одинаковое количество воды?

20. Въ двухъ мѣстахъ A и B, находящихся одно отъ другаго въ разстояніе n верстъ, продаютъ каменный уголь по a и b руб. за 100 пудовъ. Спрашивается, въ какомъ пунктѣ разстоянія AB уголь взятый изъ A и изъ B будетъ въ одинаковой цѣнѣ, зная, что перевозка обходится въ c руб. со 100 пуд. на 100 верстъ?

21. Опредѣлить: 1) на прямой AB; 2) на ея продолженіи такую точку C, чтобы $\frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}$?

22. Продолживъ непараллельныя стороны трапеціи, составимъ треугольникъ, высоту котораго требуется опредѣлить. Даны: основанія трапеціи a и b и высота h.

23. Провести параллельно основаніямъ трапеціи прямую, которой отрѣзокъ: 1) между непараллельными боками; 2) между діагоналями, имѣлъ бы данную величину l. Извѣстны: основанія a и b трапеціи и одна изъ непараллельныхъ сторонъ c.

24. Въ треугольникѣ ACB проводятъ биссектрису внѣшняго угла при вершинѣ C; пусть эта линія встрѣчаетъ продолженіе стороны AB въ точкѣ D. Вычислить AD. Даны стороны треугольника: a, b и c.

25. Параллельно сторонѣ BC треугольника ABC провести прямую, отрѣзокъ которой между сторонами AB и AC имѣлъ бы данную длину l.

26. Даны: кругъ O радіуса R, прямая xy и на ней точка A. Вычислить радіусъ x круга, касательнаго къ кругу O и къ прямой xy въ точкѣ A. Извѣстны: 1) разстояніе $OB = d$ центра O отъ прямой xy; 2) разстояніе $AB = a$ точка A отъ основанія B перпендикуляра OB.

27. Даны: прямая xy, кругъ O радіуса R и точка A на немъ. Вычислить радіусъ x круга, касательнаго къ кругу O въ точкѣ A и къ прямой xy. Извѣстны: 1) разстояніе $OB = d$ центра O отъ прямой xy; 2) разстояніе $BD = a$ точки B отъ точки встрѣчи D прямой OA съ xy; кромѣ того, для краткости полагаемъ $a^2 + d^2 = c^2$.

28. Даны: кругъ O, прямая xy касательная къ этому кругу въ точкѣ C, и на xy двѣ точки A и B, которыхъ разстояніе равно $2b$; кромѣ того, извѣстно разстояніе средины D прямой AB отъ точки C, равное d. Вычислить радіусъ x круга, касательнаго къ O и проходящаго черезъ точки A и B.

29. Катеты прямоугольнаго треугольника суть b и c, гипотенуза a. Найти на ней такую точку, чтобы сумма ея разстояній отъ катетовъ равнялась данной линіи m.

30. Дана точка A, находащаяся въ разстояніи a отъ центра O окружности радіуса r; точку A соединяютъ съ точкою B окружности. Зная длину b прямой AB, опредѣлить длину хорды, отсѣкаемой окружностью на этой прямой.

31. Данъ прямой уголъ XOY и точка P внутри его; провести сѣкущую MPN такъ, чтобы $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{K}$, гдѣ K — данная прямая.

32. На гипотенузѣ BC прямоугольнаго треугольника ABC найти такую точку M, чтобы $\overline{AM}^2 + BM \times CM = K^2$, гдѣ K—данная прямая.

33. Разсѣчь шаръ плоскостью такъ, чтобы разность поверхностей двухъ сегментовъ равнялась бы данному кругу.

34. На полуокружности AMB найти такую точку, что если провести изъ нея касательную MP до встрѣчи съ продолженіемъ діаметра AB, провести радіусъ OM и обернуть фигуру около AP, то чтобы объемы, описанные секторомъ AOM и треугольникомъ: 1) OMB, 2) OMP имѣли данное отношеніе m.

35. На какой высотѣ слѣдуетъ помѣстить глазъ надъ шаромъ, чтобы обозрѣть поверхность данной величины?

36. Въ какомъ разстояніи отъ центра нужно пересѣчь шаръ, чтобы боковая поверхность прямаго конуса, касающагося къ шару по окружности сѣченія, находилась

въ данномъ отношеніи m съ поверхностью того или другаго сегмента, на которые раздѣляется шаръ сѣкущею плоскостью.

37. Данъ кругъ и въ немъ діаметръ AB. На какомъ разстояніи отъ центра нужно провести хорду DE, перпендикулярную къ діаметру, чтобы боковая поверхность конуса, произведеннаго обращеніемъ хорды AD около діаметра, составляла $\frac{1}{n}$ поверхности, описываемой малымъ сегментомъ AD?

38. На горизонтальной плоскости находятся: шаръ и конусъ, котораго основаніе совпадаетъ съ этою плоскостью, а высота равна діаметру шара. Разсѣчь оба тѣла горизонтальною плоскостью такъ, чтобы площади сѣченій находились въ данномъ отношеніи.

39. Даны: неограниченная прямая xy и двѣ точки A и B, расположенныя по одну сторону ея. Требуется найти на прямой xy такую точку C, чтобы треугольникъ ABC имѣлъ данную площадь k^2. Даны: длины перпендикуляровъ AP и BQ, опущенныхъ изъ точекъ A и B на прямую xy, именно $AP = a$, $BQ = b$, и разстояніе $PQ = d$ между основаніями этихъ перпендикуляровъ.

40. Два бассейна, изъ которыхъ одинъ содержитъ уже a литровъ, а другой b литровъ воды, получаютъ соотвѣтственно: первый c литровъ, а второй d литровъ въ часъ. Спрашивается, черезъ сколько часовъ первый бассейнъ будетъ содержать вдвое болѣе жидкости чѣмъ второй?

41. Два курьера ѣдутъ равномѣрно по прямой со скоростями v и v'; первый проѣзжаетъ черезъ точку A въ T часовъ, второй черезъ точку B въ T' часовъ (считая отъ общаго начала времени); спрашивается, въ какое время произойдетъ ихъ встрѣча, если извѣстно, кромѣ того, что разстояніе $AB = d$?

Разсмотрѣть два случая; когда скорости v и v' имѣютъ одинаковый знакъ, и когда знаки ихъ противоположны.

ГЛАВА XXVI.

Изслѣдованіе уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

Изслѣдованіе двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными въ общемъ видѣ.—Примѣры изслѣдованія буквенныхъ вопросовъ.—Задачи.

391. Рѣшая два уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\}$$

мы нашли формулы:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad \text{и} \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \quad \ldots\ldots (1)$$

предполагая, что коэффиціенты a и a', или b и b' отличны отъ нуля, и что приэтомъ: $ab' - ba'$ отлично отъ нуля. Цѣль изслѣдованія заключается въ томъ, чтобы показать

во всѣхъ ли случаяхъ эти формулы дадутъ рѣшенія ур-ній, или же, напротивъ, есть такіе случаи, когда они не примѣнимы.

Мы должны разсмотрѣть два случая, смотря по тому, будетъ-ли знаменатель въ формулахъ x и y: 1) отличенъ отъ нуля, или: 2) равенъ нулю, причемъ или одинъ изъ числителей, или оба — равны нулю.

Это раздѣленіе основывается на слѣдующихъ свойствахъ биномовъ $ab'-ba'$, $cb'-bc'$ и $ac'-ca'$.

Первое свойство. Если коэффиціенты при одномъ и томъ же неизвѣстномъ, или свободные члены c и c' оба не нули, и если два изъ биномовъ $ab'-ba'$, $cb'-bc'$ и $ac'-ca'$, равны нулю, то и третій равенъ нулю.

Пусть $cb'-bc'=0$ и $ac'-ca'=0$; отсюда $cb'=bc'$ и $ac'=ca'$: перемноживъ эти равенства, найдемъ $ab'cc'=a'bcc'$, или $(ab'-a'b)cc'=0$; но cc' не равно нулю, слѣд. должно быть $ab'-a'b=0$. Если же $c=0$, въ такомъ случаѣ, по условію, $c' \lessgtr 0$; а потому изъ равенствъ $cb'=bc'$ и $ac'=ca'$ имѣемъ: $a=0$, $b=0$, и слѣд. $ab'-ba'=0$.

Второе свойство. Условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы два изъ этихъ биномовъ были нулями, а третій былъ бы отличенъ отъ нуля, состоятъ въ томъ, чтобы буквенныя количества общія этимъ двумъ биномамъ, были нулями.

Очевидно, что этихъ условій достаточно; затѣмъ, если имѣемъ $cb'-bc'=0$, $ac'-ca'=0$, и $ab'-ba'\gtrless 0$, то равенства даютъ: $cc'(ab'-ba')=0$, а слѣд. $cc'=0$. Пусть $c=0$, тогда $bc'=0$ и $ac'=0$, а потому и $c'=0$: ибо положивъ $c'\lessgtr 0$, $b=0$ и $a=0$, нашли бы $ab'-ba'=0$, что противно условію: $ab'-ba' \lessgtr 0$.

392. I. Общій знаменатель $ab'-ba'$ отличенъ отъ нуля.

Въ этомъ случаѣ система ур-ній имѣетъ конечное и опредѣленное рѣшеніе, представляемое формулами (1).

Въ самомъ дѣлѣ, эти рѣшенія составляютъ систему тождественную съ данной, потому-что дѣлитель $ab'-ba'$ не есть ноль.

Въ случаѣ, когда числитель $ac'-ca'$ равенъ нулю, что возможно при одномъ изъ трехъ условій: если $\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$; или если $a=0$ и $c=0$; или $c=0$ и $c'=0$ (предположеніе $a=0$ и $a'=0$ повело-бы къ: $ab'-ba'=0$, что противно условію), замѣчаемъ, что y обращается въ ноль; а при третьей группѣ условій, именно при $c=0$ и $c'=0$, и x дѣлается нулемъ.

Въ силу втораго свойства, условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы оба неизвѣстныя были нулями: $x=0$ и $y=0$, суть $c=0$ и $c'=0$.

Итакъ, когда общій знаменатель $ab'-ba'$ отличенъ отъ нуля, система имѣетъ конечно опредѣленное рѣшеніе; при этомъ или оба неизвѣстныя будутъ положительны, или оба отрицательны, или одно положительно, а другое отрицательно; наконецъ, или одно, или оба могутъ быть нулями. Послѣднее имѣетъ мѣсто только въ томъ исключительномъ случаѣ, когда свободные члены-оба нули.

Положительныя рѣшенія въ большинствѣ случаевъ даютъ прямой отвѣтъ на вопросъ; отрицательныя же или служатъ признакомъ невозможности задачи, или неправильной постановки ея. Истолкованіе отрицательныхъ рѣшеній основано на теоремѣ, аналогичной той, которая была доказана для ур-нія съ однимъ неизвѣстнымъ.

393. Теорема. *Двѣ системы двухъ ур-ній съ двумя неизвѣстными, отличающіяся только знакомъ при одномъ или при обоихъ неизвѣстныхъ, имѣютъ рѣшенія: равныя по абсолютной величинѣ, но разнящіяся знаками — для тѣхъ неизвѣстныхъ, знаки при которыхъ въ обѣихъ системахъ различны; и рѣшенія, одинаковыя по ве-*

личинѣ и по знаку — для неизвѣстныхъ, предшествуемыхъ общимъ знакомъ въ обѣихъ системахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, сравнимъ системы:

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\} \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \left.\begin{array}{r} ax-by=c \\ a'x-b'y=c' \end{array}\right\} \quad (2)$$

разнящіяся только знакомъ при y; докажемъ, что эти системы имѣютъ одинаковое рѣшеніе для x, и рѣшенія, равныя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знаку, для y.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $-y=z$, система (2) обратится въ

$$\left.\begin{array}{r} ax+bz=c \\ a'x+b'z=c' \end{array}\right\} \quad (2').$$

Замѣчая, что система (2′) ничѣмъ не отличается отъ (1), заключаемъ, что рѣшенія системы (1): x' и y' удовлетворяютъ и (2′); такъ что система (2′) имѣетъ рѣшенія: $x=x'$ и $z=y'$; или, такъ ктк $z=-y$, то (2′), а потому и (2) имѣетъ рѣшенія:

$$x=x', \qquad y=-y'.$$

Примѣръ. *Куплено нѣсколько аршинъ матеріи по опредѣленной цѣнѣ. Если бы было куплено 3 аршинами больше, а за аршинъ было заплочено 1 руб. меньше, то на всю покупку издержали-бы 11 рублями меньше. Если же было бы куплено 8 аршинами меньше, а за аршинъ платили бы 2 руб. дороже, то издержали бы 12 руб. больше. Сколько аршинъ куплено и сколько платили за аршинъ?*

Пусть было куплено x арш. по y руб. за аршинъ. Получаемъ ур-нія:

$$(x+3)(y-1)=xy-11$$

$$(x-8)(y+2)=xy+12;$$

откуда $x=-10; \quad y=-6.$

Слѣд. задача невозможна въ томъ смыслѣ, какъ она дана.

Подставивъ въ ур-нія: $-x$ вмѣсто x, и $-y$ вмѣсто y, найдемъ:

$$(x-3)(y+1)=xy-11$$

$$(x+8)(y-2)=xy+12,$$

которымъ, на осн. доказанной теоремы, удовлетворяютъ рѣшенія: $x=10$, $y=6$. Они служатъ прямыми отвѣтами на слѣдующую задачу:

„Куплено извѣстное число аршинъ матеріи по опредѣленной цѣнѣ. Если бы было куплено тремя аршинами *меньше*, а за аршинъ было заплочено 1 рублемъ *дороже*, то на всю покупку издержали бы 11 руб. меньше. Если же было-бы куплено 8-ю аршинами *больше*, а за аршинъ платили бы 2 рублями *меньше*, то издержали бы 12 рублями больше. Сколько аршинъ куплено и сколько платили за аршинъ?"

394. II. Общій знаменатель. $ab'-ba'=0$, а одинъ изъ числителей, напр. $cb'-bc' \gtrless 0$.

Равенство $ab'-ba'=0$ можетъ имѣть мѣсто при слѣдующихъ обстоятельствахъ:

1) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$; 2) $a=0$, $b=0$; 3) $a=0$, $a'=0$.

Предположеніе $b=0$, $b'=0$, обращающее также въ ноль биномъ $ab'-ba'$, слѣдуетъ устранить, потому что при немъ обращается въ ноль и числитель $cb'-bc'$, по условію, неравный нулю.

Первый случай: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. Оба неизвѣстныя представляются въ этомъ случаѣ подъ видомъ $\frac{m}{0}$ или ∞:

$$x = \infty, \qquad y = \infty.$$

Докажемъ, что *безконечныя рѣшенія представляютъ единственно возможное рѣшеніе системы въ разсматриваемомъ случаѣ.*

Такимъ образомъ нужно доказать, что въ данномъ случаѣ уравненія не допускаютъ конечныхъ рѣшеній; а затѣмъ, что безконечныя рѣшенія дѣйствительно удовлетворяютъ системѣ.

Изъ условія $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ имѣемъ: $a = \frac{a'b}{b'}$; подставивъ въ первое ур., находимъ:

$$\frac{a'b}{b'} x + by = c, \qquad \text{или} \qquad a'x + b'y = \frac{cb'}{b}.$$

Но второе ур. есть $\qquad a'x + by' = c'$;

по условію же $cb' - bc' \gtrless 0$, откуда $\frac{cb'}{b} \gtrless c'$.

Отсюда видно, что система состоитъ изъ двухъ ур-ній, которыхъ первыя части одинаковы, между тѣмъ какъ вторыя неравны; очевидно, слѣдовательно, что всякія *конечныя* значенія x и y, обращающія въ тождество одно изъ уравненій, не могутъ обратить въ тождество и другое. Такія ур-нія, которыя не имѣютъ общихъ конечныхъ рѣшеній называютъ *несовмѣстными* (противорѣчащими одно другому).

Покажемъ теперь, что безконечныя значенія x и y удовлетворяютъ системѣ, и для этого разсмотримъ два случая, смотря потому, имѣютъ-ли коэффиціенты a и b одинаковые знаки, или противоположные.

Пусть a и b имѣютъ одинаковые знаки; пусть, притомъ, $cb' - bc' > 0$, и $ab' - ba'$ стремится къ нулю, уменьшаясь; въ такомъ случаѣ

$$x = +\infty.$$

Умноживъ обѣ части неравенства $cb' > bc'$ на $\frac{a}{b}$ — количество положительное, получимъ $\frac{ab'c}{b} > ac'$; но $\frac{ab'}{b} = a'$, слѣд. $a'c > ac'$, или $ac' - a'c < 0$; поэтому

$$y = -\infty.$$

Замѣтивъ, что $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$, видимъ, что a' и b' также имѣютъ одинаковые знаки; слѣд., подставивъ въ ур-нія вмѣсто x и y ихъ величины найдемъ

$$a.\infty - b.\infty = c$$
$$a'.\infty - b'.\infty = c',$$

т. е. $\qquad \infty - \infty = c \quad$ и $\quad \infty - \infty = c'$,

что возможно, потому-что разность двухъ безконечностей можетъ быть какимъ угодно количествомъ.

Если a и b имѣютъ противоположные знаки, напр. $a > 0$ и $b < 0$, то оставивъ остальныя предположенія безъ измѣненія, найдемъ:

$$x = +\infty.$$

Умноживъ обѣ части неравенства $cb' > bc'$ на $-\frac{a}{b}$, количество положительное,

получимъ: $-\frac{ab'c}{b} > -ac'$; но $\frac{ab'}{b} = a'$, слѣд. $-a'c > -ac'$, или $ac' - a'c > 0$; а потому и

$$y = +\infty.$$

Замѣтивъ, что a' и b' имѣютъ противоположные знаки, подставивъ вмѣсто x и y ихъ значенія, получимъ:

$$a.\infty - (-b).\infty = c,$$
$$a.'\infty - (-b').\infty = c',$$

или $\infty - \infty = c$ и $\infty - \infty = c'$, — тождества.

Второй случай. $a = 0$, $b = 0$. И въ этомъ случаѣ: $x = \infty$ и $y = \infty$; значенія эти приличествуютъ уравненіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя, имѣемъ:

$$0.\infty + 0.\infty = c$$
$$a'.\infty + b'.\infty = c'.$$

Но произведеніе $0 . \infty$ есть символъ неопредѣленности, сл. первое равенство можемъ разсматривать какъ тождество. Что касается втораго, первая часть его есть разность двухъ безконечностей; ибо

$$x = \frac{cb'}{0}, \quad \text{а} \quad y = \frac{-ca'}{0},$$

откуда
$$a'x + b'y = a'b'c\left(\frac{1}{0} - \frac{1}{0}\right),$$

и равенство $a'b'c(\infty - \infty) = c$, есть тождество.

Съ другой стороны, очевидно, что всякая иная система значеній x и y не можетъ соотвѣтствовать ур-мъ:

$$0.x + 0.y = c \quad \text{и} \quad a'x + b'y = c'.$$

Третій случай. $a = 0$, $a' = 0$. x и y принимаютъ видъ:

$$x = \frac{cb' - bc'}{0} = \infty; \qquad y = \frac{0}{0}.$$

Итакъ, x безконеченъ, а y неопредѣлененъ. И въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что никакая система конечныхъ значеній x и y не можемъ удовлетворить уравненіямъ.

$$0.x + by = c, \qquad 0.x + b'y = c',$$

ибо по условію $\frac{c}{b} \lessgtr \frac{c'}{b'}$.

Съ другой стороны, если вмѣсто x подставимъ ∞, то какъ $0.\infty$ изображаетъ количество неопредѣленное, усматриваемъ, что существуетъ безчисленное множество значеній y, удовлетворяющихъ заразъ предыдущимъ уравненіямъ, въ которыхъ $0.x$ замѣненъ количествами α и α', лишь-бы произвольныя количества α и α' удовлетворяли соотношенію: $\frac{c-\alpha}{b} = \frac{c'-\alpha'}{b'}$.

Примѣчаніе. I. Если кромѣ $a = 0$ и $a' = 0$ было-бы и $b = 0$, y имѣло бы опредѣленную величину, $\frac{c'}{b'}$, ибо тогда слѣдовало бы положить $\alpha = c$ и $\alpha' = 0$.

Примѣчаніе II. Въ разсмотрѣнныхъ трехъ случаяхъ, если уравненія вытекаютъ изъ условій задачи, нужно еще разсмотрѣть, можетъ-ли быть истолковано чисто алгебраическое рѣшеніе уравненій; если да—это будетъ единственно возможное рѣшеніе задачи; если нѣтъ—задача *невозможна*; невозможность эта во всякомъ случаѣ, будетъ зависить отъ несовмѣстности данныхъ между собою и съ неизвѣстными. Потому-то и

говорятъ, какъ и по отношенію къ ур-мъ съ 1 неизвѣстнымъ, что символъ ∞ есть признакъ невозможности задачи.

395. III. Знаменатель и оба числители — нули.

$$ab' - a'b = 0, \qquad cb' - c'b = 0, \qquad ac' - a'c = 0.$$

Эти равенства могутъ имѣть мѣсто при слѣдующихъ обстоятельствахъ:

1) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$; 2) $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; 3) $a = 0$, $a' = 0$, $cb' - bc' = 0$.

Первый случай. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Значенія x и y берутъ видъ

$$x = \frac{0}{0}, \qquad y = \frac{0}{0}.$$

Неопредѣленность эта—дѣйствительная. Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ общую величину равныхъ отношеній буквою k, т. е. положивъ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, имѣемъ отсюда: $a = a'k$, $b = b'k$, $c = c'k$; подставивъ въ первое ур., получимъ

$$k(a'x + b'y) = kc' \quad \text{или} \quad a'x + b'y = c'.$$

Такимъ образомъ, первое ур-ніе ничѣмъ не отличается отъ втораго, такъ-что въ сущности два неизвѣстныя связаны однимъ уравненіемъ, которое принимаетъ безчисленное множество рѣшеній: неопредѣленность дѣйствительная. Однако же, значенія x и y не вполнѣ произвольны, такъ какъ, въ силу того, что они связаны уравненіемъ $ax + by = c$, произвольному значенію одного неизвѣстнаго соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе другаго.

Примѣчаніе. Если бы было $c = 0$, а потому и $c' = 0$, x и y были бы неопредѣленны, какъ и прежде, съ тѣмъ отличіемъ, что отношеніе ихъ $\frac{y}{x}$ сохраняло-бы постоянную величину, равную $-\frac{a}{b}$; что прямо видно изъ уравненія $ax + by = 0$, къ которому въ этомъ случаѣ приводятся оба ур-нія.

Второй случай. $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Въ этомъ случаѣ

$$x = \frac{0}{0}, \qquad y = \frac{0}{0}.$$

Но первое ур. обращается въ тождество $0 = 0$, слѣд. система сводится *къ одному* ур-нію съ *двумя* неизвѣстными: неопредѣленность дѣйствительная.

Третій случай. $a = 0$, $a' = 0$, $cb' - bc' = 0$. Оба неизвѣстныя опять принимаютъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, а система

$$0.x + by = c, \qquad 0.x + b'y = c',$$

показываетъ, что x въ самомъ дѣлѣ неопредѣленъ, но $y = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$, т. е. имѣетъ вполнѣ опредѣленную величину. Но это противорѣчіе между результатами, получаемыми изъ формулъ для неизвѣстныхъ, и результатами, непосредственно выводимыми изъ уравненій, только кажущееся; оно зависитъ отъ того, что дробь, дающая значеніе y:

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

въ данномъ случаѣ содержитъ въ числителѣ и знаменателѣ общаго множителя, обра-

щающагося въ ноль при данныхъ предположеніяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, вынося за скобки: въ числителѣ c, а въ знаменателѣ b, имѣемъ:

$$y=\frac{c\left(\frac{ac'}{c}-a'\right)}{b\left(\frac{ab'}{b}-a'\right)};$$

но изъ условія $cb'-c'b=0$ имѣемъ $\frac{c'}{c}=\frac{b'}{b}$; слѣд.

$$y=\frac{c\left(\frac{ab'}{b}-a'\right)}{b\left(\frac{ab'}{b}-a'\right)}=\frac{c}{b}\ .$$

Если бы $cb'-bc'=0$ имѣли вслѣдствіе предположеній $b=0$, $b'=0$, то нашли-бы: $x=\frac{0}{0}$, $y=\infty$; эти рѣшенія отвѣчали бы ур-мъ, ибо, какъ $0.\infty$ есть символъ неопредѣленности, то равенства

$$0+0.\infty=c \quad \text{и} \quad 0+0.\infty=c'$$

суть тождества.

396. *Примѣчаніе*. Раскрытіе неопредѣленности дроби, принимающей видъ $\frac{0}{0}$ при частныхъ значеніяхъ *нѣсколькихъ* буквъ, въ нее входящихъ, можно дѣлать еще слѣдующимъ общимъ пріемомъ. Если дробь $\frac{A}{B}$, въ составъ которой входятъ количества x, y, z, ... принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$ при $x=a$, $y=b$, $z=c$, ... то, положивъ

$$x=a+h, \quad y=b+ph, \quad z=c+qh, \ \ldots .$$

подставляютъ эти величины въ числит. и знам., и сокративъ дробь, полагаютъ $h=0$: тогда и получится *истинное значеніе* дроби $\frac{A}{B}$ при $x=a$, $y=b$, $z=c$, . . . Оно можетъ быть или опредѣленно или неопредѣленно, см. потому, будетъ-ли независимо отъ p, q, ... или же, послѣ всевозможныхъ упрощеній, будетъ еще содержать одно или нѣсколько изъ этихъ количествъ, располагая которыми произвольно, можно дать дроби какую угодно величину.

Такъ, мы видимъ, что при $a=0$, $a'=0$ и $cb'-bc'=0$, дроби

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \quad \text{и} \quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

принимаютъ видъ $\frac{0}{0}$. Полагаемъ

$$a=h, \quad a'=ph, \quad c'=\frac{cb'}{b}+b'qh;$$

находимъ

$$x=\frac{bb'q}{bp-b'},$$

сл. x дѣйствительно неопредѣленъ, потому-что выбирая извѣстнымъ образомъ p и q, можно ему давать произвольныя значенія.

Для y находимъ

$$\frac{h\left(\frac{cb'}{b}+b'qh\right)-cph}{hb'-bph};$$ сокративъ на h, а потомъ положивъ $h=0$:

$$\frac{c(b'-bp)}{b(b'-bp)}=\frac{c}{b}$$ — величину вполнѣ опредѣленную.

397. Сдѣланное изслѣдованіе можно резюмировать такъ: *система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными имѣетъ одно рѣшеніе конечное или безконечное, если изъ трехъ биномовъ*

$$ab'-ba',\quad cb'-bc',\quad ac'-ca'$$

обращается въ ноль не болѣе одного; рѣшеніе неопредѣленно, если два изъ нихъ дѣлаются нулями, за исключеніемъ случая, когда: $c=0$, $c'=0$.

Приводимъ нѣсколько задачъ съ полнымъ изслѣдованіемъ.

Первый примѣръ изслѣдованія.

398. *Два курьера ѣдутъ равномѣрно и въ одну сторону, отъ* x *къ* y, *по прямой* xy, *со скоростями* v *и* v'; *въ данный моментъ одинъ находится въ* A, *другой въ* A', *въ разстояніяхъ* $OA=d$ *и* $OA'=d'$ *отъ точки* O. *Спрашивается: въ какомъ разстояніи отъ точки* O *и черезъ сколько часовъ отъ даннаго момента произойдетъ встрѣча.*

R'' O R' A A' R

Черт. 19.

Пусть встрѣча произойдетъ въ будущемъ, т. е вправо отъ A' на разстояніи отъ O, равномъ $OR=x$, и черезъ t часовъ отъ даннаго момента. Уравненія задачи будутъ слѣдующія: $OR=OA+AR$, $OR=OA'+A'R$ или

$$\left.\begin{matrix}x=d+vt\\ x=d'+v't\end{matrix}\right\}\quad(1)$$

Если допустить, что встрѣча имѣетъ мѣсто между O и A, въ нѣкоторой точкѣ R' т. е. вправо отъ O, но *до* того момента, когда курьеры проѣзжаютъ—одинъ черезъ A, другой черезъ A', то уравненія, при сохраненіи прежнихъ обозначеній, будутъ: $OR'=OA-R'A$, $OR'=OA'-R'A'$, или

$$\left.\begin{matrix}x=d-vt\\ x=d'-v't\end{matrix}\right\}\quad(2).$$

Такъ какъ эта система отличается отъ первой знакомъ при t, то заключаемъ обратно, что если система (1) дастъ положительное рѣшеніе для x и отрицательное для t, это служитъ признакомъ того, что встрѣча имѣла мѣсто вправо отъ O, но раньше даннаго момента, и что время, протекшее отъ встрѣчи до этого момента равно абсолютной величинѣ отрицательнаго рѣшенія.

Наконецъ положимъ, что встрѣча имѣла мѣсто въ точкѣ R'', влѣво отъ точки O: уравненія, при сохраненіи прежнихъ обозначеній, будутъ: $R''O=R''A-OA$, $R''O=R''A'-OA'$, или $x=vt-d$, $x=v't-d'$, или

$$\left.\begin{matrix}-x=d-vt\\ -x=d'-v't\end{matrix}\right\}\quad(3)$$

Эта система выводится изъ (1) перемѣною x и t на $-x$ и $-t$. Слѣдовательно, обратно, если система (1) даетъ отрицательныя значенія для x и t, это будетъ признакомъ того, что встрѣча имѣла мѣсто влѣво отъ O, въ разстояніи, равномъ абсолютной величинѣ x, и что время протекшее отъ момента встрѣчи равно абсолютной величинѣ t.

399. Послѣ этого предварительнаго изслѣдованія рѣшаемъ систему (1):

$$x = \frac{vd' - dv'}{v - v'} \qquad t = \frac{d' - d}{v - v'}.$$

Дѣлаемъ всевозможныя предположенія относительно общаго знаменателя; эти предположенія суть:

$$v > v', \qquad v = v', \qquad v < v'.$$

Приэтомъ, такъ какъ числители могутъ получать какія угодно величины, разложимъ каждый изъ предыдущихъ случаевъ на три другіе случая:

$$d' > d, \qquad d' = d, \qquad d' < d.$$

Отсюда уже вытекаютъ опредѣленныя предположенія относительно другаго числителя: $vd' - v'd$.

Въ самомъ дѣлѣ, если: при $v > v'$ возьмемъ $d' > d$, то отсюда необходимо вытекаетъ, что $vd' > v'd$, но не можетъ быть: ни $vd' = v'd$, ни $vd' < v'b$. Но если при $v > v'$ взять $d' < d$, то другой числитель даетъ три возможныя предположенія

$$vd' > v'd, \qquad vd' = v'd, \qquad vd' < v'd.$$

Поступая такимъ образомъ, получаемъ слѣдующую таблицу всевозможныхъ комбинацій, въ числѣ тринадцати:

$v > v'$	$d' > d$	$vd' > dv'$
	$d' = d$	$vd' > dv'$
	$d' < d$	$vd' > dv'$
		$vd' = dv'$
		$vd' < dv'$
$v = v'$	$d' > d$	$vd' > dv'$
	$d' = d$	$vd' = dv'$
	$d' < d$	$vd' < dv'$
$v < v'$	$d' > d$	$vd' > dv'$
		$vd' = dv'$
		$vd' < dv'$
	$d' = d$	$vd' = dv'$
	$d' < d$	$vd' < dv'$

Изслѣдуемъ поочередно каждый изъ этихъ случаевъ.

Первый случай. $v > v'$, $d' > d$, $vd' > dv'$.

Формулы для неизвѣстныхъ даютъ конечныя, опредѣленныя и положительныя значенія для x и t, означающія, что встрѣча будетъ имѣть мѣсто въ будущемъ (считая отъ даннаго момента) и, слѣд., вправо отъ точки O и отъ A'.

Этотъ результатъ можно было предвидѣть: въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $v > v'$, т. е. догоняющій курьеръ ѣдетъ скорѣе передняго, слѣд. долженъ необходимо встрѣтиться съ нимъ вправо отъ A'.

Второй случай.—$v > v'$, $d' = d$, $vd' > dv'$.

Формулы даютъ

$$x = d; \quad t = o.$$

Это значитъ, что встрѣча имѣетъ мѣсто въ данный моментъ, что совершенно очевидно. Въ самомъ дѣлѣ, при $d = d'$ оба курьера въ разсматриваемый моментъ находятся въ одной точкѣ (напр. A), а какъ $v > v'$, т. е. скорости ихъ неравны, то они только въ этотъ моментъ и будутъ вмѣстѣ, а затѣмъ одинъ будетъ постоянно впереди другаго.

Третій случай.—$v > v'$, $d' < d$, $vd' > dv'$.

Формулы даютъ: $x > o$, $t < o$.

Положительное значеніе x показываетъ, что встрѣча имѣетъ мѣсто вправо отъ O; отрицательное t означаетъ, что она произошла *раньше* того момента, когда одинъ курьеръ проѣзжаетъ черезъ A, другой черезъ A′, въ нѣкоторой точкѣ R′ (подставивъ въ систему (1) вмѣсто t...—t, находимъ систему (2), относящуюся къ точкѣ R′).

Это можно видѣть изъ условій, при помощи чертежа:

Черт. 20.

Такъ какъ $d' < d$, то курьеръ, ѣдущій со скоростью v', находится въ данный моментъ ближе другаго къ точкѣ O; $v > v'$, сл. курьеръ, ѣдущій со скоростью v, долженъ былъ встрѣтить другаго раньше даннаго момента, т. е. влѣво отъ точки A′; затѣмъ, неравенство $vd' > v'd$ даетъ

$$\frac{d'}{v'} > \frac{d}{v},$$

а это значитъ, что курьеръ (v') ѣдетъ d' верстъ большее время, чѣмъ курьеръ (v) проѣзжаетъ d верстъ; значитъ послѣдній проѣхалъ черезъ точку O послѣ перваго, и какъ въ данный моментъ онъ обогналъ перваго, то и долженъ былъ встрѣтить его вправо отъ точки O.

Четвертый случай. — $v > v'$, $d' < d$, $vd' = dv'$.

Формулы даютъ: $x = o$, $t < o$.

Эти рѣшенія означаютъ, что встрѣча имѣла мѣсто въ точкѣ O *раньше* разсматриваемаго момента. И въ самомъ дѣлѣ, равенство $vd' = dv'$ даетъ

$$\frac{d'}{v'} = \frac{d}{v},$$

т. е. времена, употребленныя на прохожденіе разстояній OA′ и OA, равны (предыд. черт.), сл. оба курьера прошли чрезъ точку O въ одинъ и тотъ же моментъ.

Пятый случай.—$v > v'$, $d' < d$, $vd' < dv'$.

Формулы даютъ: $x < o$, $t < o$.

Рѣшенія эти означаютъ, что встрѣча имѣла мѣсто раньше даннаго момента и влѣво отъ точки O (см. систему (3) уравненій).

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ курьеръ, находящійся впереди, въ A,($d > d'$) двигается съ большею скоростью ($v > v'$),—то встрѣча уже имѣла мѣсто. Затѣмъ, изъ

неравенства $vd' < dv'$ имѣемъ: $\frac{d'}{v'} < \frac{d}{v}$, а это значитъ, что курьеръ, ѣдущій скорѣе, прошолъ черезъ точку O раньше другаго, слѣд. встрѣча его съ другимъ уже была влѣво отъ точки O.

Шестой случай.—$v = v'$, $d' > d$, $vd' > dv'$.

Формулы даютъ: $x = \infty$, $t = \infty$.

Эти рѣшенія служатъ признакомъ дѣйствительной невозможности. Въ самомъ дѣлѣ, въ данный моментъ курьеры находятся въ различныхъ точкахъ, скорости же ихъ движенія равны, слѣд. разстояніе между ними всегда будетъ одинаково, и потому они не могутъ встрѣтиться.

Седьмой случай.—$v = v'$, $d' = d$, $vd' = v'd$.

Формулы даютъ: $x = \frac{0}{0}$, $t = \frac{0}{0}$:

неопредѣленность дѣйствительная; въ чемъ нетрудно убѣдиться и изъ самыхъ условій. Въ самомъ дѣлѣ, въ данный моментъ курьеры находятся вмѣстѣ ($d = d'$), ѣдутъ они съ одинаковою скоростью ($v = v'$), слѣд. постоянно они будутъ находиться вмѣстѣ.

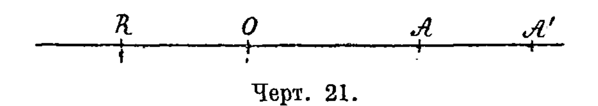
Восьмой случай.—$v = v'$, $d' < d$, $vd' < dv'$.

Формулы даютъ: $x = \infty$, $t = \infty$, что объясняется такимъ же точно образомъ, какъ и въ случаѣ шестомъ.

Девятый случай.—$v < v'$, $d' > d$, $vd' > dv'$.

Формулы даютъ: $x < o$, $t < o$.

Рѣшенія эти означаютъ, что встрѣча уже имѣла мѣсто влѣво отъ O (Черт. 21).



Черт. 21.

Въ этомъ убѣждаемся разсужденіями, аналогичными приведеннымъ въ пятомъ случаѣ.

Десятый случай.—$v < v'$, $d' > d$, $vd' = dv'$.

Формулы даютъ: $x = o$, $t < o$.

Это значитъ, что встрѣча имѣла мѣсто въ точкѣ O; въ чемъ убѣждаемся такимъ же образомъ, какъ и въ четвертомъ случаѣ.

Одиннадцатый случай.—$v < v'$, $d' > d$, $vd' < dv'$.

Формулы даютъ: $x > o$, $t < o$.

Встрѣча имѣла мѣсто вправо отъ точки O, но раньше настоящаго момента. Объясненіе-тоже самое, что для третьяго случая.

Двѣнадцатый случай.—$v < v'$, $d' = d$, $vd' < dv'$.

Формулы даютъ: $x = d = d'$; $t = o$.

Встрѣча имѣла имѣетъ мѣсто въ настоящій моментъ. Какъ и во второмъ случаѣ.

Тринадцатый случай.—$v < v'$, $d' < d$, $vd' < dv'$.

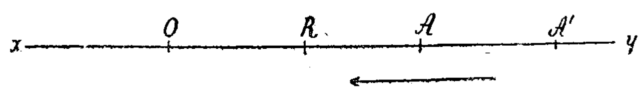
Формулы даютъ величины конечныя, опредѣленныя и положительныя; слѣд. встрѣча имѣетъ мѣсто въ будущемъ. Какъ въ первомъ случаѣ.

400. *Примѣчаніе.* Уравненія

$$\left.\begin{array}{l} x = d + vt \\ x = d' + v't \end{array}\right\} \text{(A)}$$

были выведены въ томъ предположеніи, что оба курьера ѣдутъ въ одну сторону, именно въ направленіи отъ x къ y. Легко видѣть, что эти же уравненія могутъ служить и для другихъ задачъ, аналогичныхъ первой, если только условиться подъ v и v' разумѣть отрицательныя количества, если направленіе движенія будетъ отъ y къ x, а подъ d и d' отрицательныя числа, если линіи OA и OA′ будутъ находиться влѣво отъ O.

Такъ, напр., если курьеры ѣдутъ по направленію отъ y къ x; и при составле-



Черт. 22.

ніи уравненій мы допустимъ, что точка встрѣчи R лежитъ вправо отъ O, то уравненія будутъ

$$\left.\begin{array}{l} x = d - vt \\ x = d' - v't \end{array}\right\} \text{(B)}$$

Очевидно, что туже задачу можно выразить и уравненіями (A), если только подъ буквами v и v' въ системѣ (A) разумѣть отрицательныя числа.

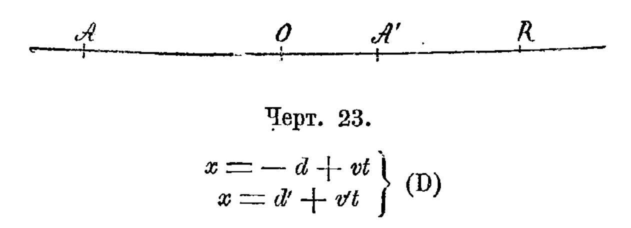
Если-бы курьеръ, выѣзжающій изъ A, ѣхалъ въ направленіи xy, а выѣзжающій изъ A′—въ направленіи yx, мы имѣли бы систему

$$\left.\begin{array}{l} x = d + vt \\ x = d' - v't \end{array}\right\} \text{(C)}$$

Вмѣсто нея мы могли бы взять также систему (A), разумѣя въ ней подъ v' — количество отрицательное.

Точки A и A′, въ которыхъ находились курьеры въ настоящій моментъ, помѣщались вправо отъ точки O; задача будетъ еще общѣе, если дать этимъ точкамъ какія угодно положенія на линіи xy, считая d и d' положительными, когда эти точки расположены вправо отъ O, и отрицательными, если точки A и A′ находятся влѣво отъ O.

Такимъ образомъ, разумѣя подъ d и d' абсолютныя количества, для чертежа (23) найдемъ уравненія



Черт. 23.

$$\left.\begin{array}{l} x = -d + vt \\ x = d' + v't \end{array}\right\} \text{(D)}$$

А для чертежа (24) уравненія

A′ A O R

Черт. 24.

$$\left.\begin{array}{l} x = -d + vt \\ x = -d' + v't \end{array}\right\} \text{(E)}.$$

Очевидно, что система (A) можетъ замѣнить собою каждую изъ системъ (D) и (E), если только въ первомъ случаѣ будемъ разумѣть въ системѣ (A) подъ d число отрицательное, а во второмъ-условимся подъ d и d' разумѣть отрицательныя числа.

Итакъ, уравненія

$$x = d + vt$$
$$x = d' + v't,$$

имѣющія рѣшеніями:

$$x = \frac{vd' - dv'}{v - v'}, \quad t = \frac{d' - d}{v - v'},$$

служатъ выраженіемъ слѣдующей совѐршенно общей задачи:

Два курьера ѣдутъ равномѣрно по прямой со скоростями, равными, по величинѣ и по знаку, количествамъ v и v'; въ настоящій моментъ они находятся отъ точки O, лежащей на этой прямой, въ разстояніяхъ, изображаемыхъ, по величинѣ и по знаку, буквами d и d'. Найти разстояніе точки O до точки встрѣчи, и время встрѣчи.

Приэтомъ, разстоянія считаются положительными—вправо отъ O, отрицательными—влѣво отъ O; скорости—положительными въ направленіи xy, отрицательными въ направленіи yx; времена—положительными, когда они слѣдуютъ за даннымъ моментомъ, отрицательными—когда предшествуютъ этому моменту.

Числовой примѣръ.—Два курьѐра, ѣдущіе равномѣрно по прямой, находятся въ настоящій моментъ: одинъ въ точкѣ A, отстоящей отъ O влѣво на 20 верстъ, другой въ A—въ разстояніи равномъ 35 верстамъ вправо отъ O. Они движутся на встрѣчу другъ другу, первый со скоростью 4, а второй 6 верстъ въ часъ. Опредѣлить разстояніе точки встрѣчи отъ O и время встрѣчи.

Для рѣшенія задачи нужно только въ формулы

$$x = \frac{vd' - dv'}{v - v'}, \quad t = \frac{d' - d}{v - v'}$$

подставить: вмѣсто d число -20, вмѣсто d' число $+35$; затѣмъ: $+4$ вмѣсто v и -6 вмѣсто v'. Найдемъ:

$$x = 2 \text{ вер.}; \quad t = 4 \text{ час. } 30 \text{ мин.}$$

Слѣд. точка встрѣчи находится вправо отъ O на 2 версты, а время встрѣчи черезъ 4 ч. 30 м. отъ настоящаго момента.

Второй примѣръ изслѣдованія.

401. *Изъ двухъ сплавовъ серебра, пробы которыхъ равны соотвѣтственно* a *и* b, *составить* p *фунтовъ новаго сплава пробы* c. *Сколько фунтовъ нужно взять отъ каждаго сплава?*

Пусть отъ перваго сплава нужно взять x, отъ втораго y фунтовъ. По условію, имѣемъ уравненіе

$$x + y = p \;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Въ одномъ фунтѣ перваго сплава находится a золотниковъ чистаго серебра, слѣд. въ x фунтахъ его будетъ ax зол.; въ y фунтахъ втораго сплава by зол.; слѣд. въ $x + y$ или въ p фунтахъ новаго сплава содержится $ax + by$ зол., а въ одномъ фунтѣ $\frac{ax + by}{p}$ зол. чистаго серебра, что равно c; поэтому, второе ур. будетъ

$$ax + by = cp \;.\;.\;.\; (2).$$

Рѣшивъ уравненія (1) и (2), найдемъ:

$$x = \frac{c - b}{a - b} \cdot p, \quad y = \frac{a - c}{a - b} \cdot p.$$

Изслѣдованіе. По свойству вопроса, x и y немогутъ быть ни безконечными, ни отрицательными, поэтому рѣшенія такого рода будутъ служить признакомъ абсолютной невозможности задачи при тѣхъ условіяхъ, которыя ведутъ къ рѣшеніямъ этого рода. Въ этомъ и заключается особенность разсматриваемой задачи; изъ всѣхъ значеній x и y, какія допускаютъ найденныя формулы для этихъ количествъ, слѣдуетъ удерживать только значенія конечныя, опредѣленныя и положительныя.

Относительно общаго знаменателя возможны 3 предположенія:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Каждое изъ этихъ предположеній соединяемъ со всевозможными предположеніями касательно одного изъ числителей, напр, перваго:

$$c > b, \quad c = b, \quad c < b.$$

Относительно втораго числителя нужно дѣлать такія предположонія, которыя были бы совмѣстны съ прежде взятыми. Такъ, если возьмемъ предположеніе $a > b$ и $c > b$, то его можно сочетать съ каждымъ изъ трехъ возможныхъ предположеній относительно другаго числителя: $a > c$, $a = c$, $a < c$. Но если взять комбинацію $a = b$ и $c > b$, то ее можно соединить только съ предположеніемъ $a < c$, такъ-какъ c, будучи больше b, не можетъ быть ни равно, ни меньше количества a, равнаго b. Такимъ путемъ мы получаемъ слѣдующую таблицу изслѣдованія:

$$a > b \begin{cases} c > b \begin{cases} a > c \\ a = c \\ a < c \end{cases} \\ c = b \quad a > c \\ c < b \quad a > c \end{cases}$$

$$a = b \begin{cases} c > b \quad a < c \\ c = b \quad a = c \\ c < b \quad a > c \end{cases}$$

$$a < b \begin{cases} c > b \quad a < c \\ c = b \quad a < c \\ c < b \begin{cases} a > c \\ a = c \\ a < c. \end{cases} \end{cases}$$

Первый случай. $a > b$, $c > b$, $a > c$.

Формулы даютъ для x и y рѣшенія конечныя, опредѣленныя и положительныя; слѣд. задача возможна. Это слѣдуетъ и изъ условій: въ самомъ дѣлѣ, проба c искомаго сплава, по условію, больше нисшей пробы b, но меньше высшей пробы a; очевидно, такой сплавъ всегда можно составить.

Второй случай. $a > b$, $c > b$, $a = c$.

Формулы даютъ: $x = p$, $y = o$.

Это значитъ, что всѣ p фунтовъ должны быть взяты отъ сплава пробы a, и ничего не нужно брать отъ сплава пробы b. Это очевидно à priori, ибо проба c составляемаго сплава должна равняться, по условію, пробѣ a.

Третій случай.—$a > b$, $c > b$, $a < c$.

Формулы даютъ: $x > 0$, $y < 0$.

Заключаемъ, что задача невозможна. Это видно и à priori: въ самомъ дѣлѣ, проба требуемаго сплава должна быть больше не только нисшей пробы b, но и высшей a данныхъ сплавовъ; очевидно, что сплавляя послѣдніе, нельзя получить пробы c.

Четвертый случай. $a > b, \quad c = b, \quad a > c.$

Формулы даютъ: $x = 0, \quad y = p.$

Это значитъ, что всѣ p фунтовъ должны быть взяты отъ сплава пробы b, что очевидно, ибо искомый сплавъ и долженъ имѣть пробу b (условіе $c = b$).

Пятый случай. $a > b, \quad c < b, \quad a > c.$

Формулы даютъ: $x < 0, \quad y > 0.$

Отрицательное значеніе x указываетъ на невозможность задачи. И въ самомъ дѣлѣ, задача невозможна, потому-что проба искомаго сплава должна быть меньше не только a, но и нисшей пробы b одного изъ данныхъ сплавовъ.

Шестой случий. $a = b, \quad c > b, \quad a < c.$

Формулы даютъ: $x = \infty, \quad y = \infty.$

Задача невозможна; и въ самомъ дѣлѣ, составляющіе сплавы—одинаковой пробы ($a = b$), проба же требуемаго сплава, c, должна быть больше пробы $a = b$, что невозможно.

Седьмой случай. $a = b = c.$

Формулы даютъ: $x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$

Это значитъ, что задача неопредѣленна, въ томъ смыслѣ, что можно взять число фунтовъ, не превышающее p, отъ одного изъ данныхъ сплавовъ, а недостающую до p часть изъ другаго. Результатъ этотъ очевиденъ à priori, потому-что всѣ три сплава—одинаковой пробы.

Восьмой случай. $a = b, \quad c < b, \quad a > c.$

Формулы даютъ: $x = \infty, \quad y = \infty.$

Задача невозможна, какъ и въ шестомъ случаѣ.

Девятый случай. $a < b, \quad c > b, \quad a < c,$

Формулы даютъ: $x < 0$, $y > 0$; отрицательное значеніе x указываетъ на невозможность задачи, подобно пятому случаю.

Десятый случай. $a < b, \quad c = b, \quad a < c.$

Формулы даютъ: $x = 0, \quad y = p,$ какъ въ четвертомъ случаѣ.

Одиннадцатый случай. $a < b, \quad c < b, \quad a > c.$

Формулы даютъ: $x > 0$, $y < 0$; задача невозможна, какъ и въ третьемъ случаѣ.

Двѣнадцатый случай. $a < b, \quad c < b, \quad a = c.$

Формулы даютъ: $x = p, \quad y = 0,$ какъ и во второмъ случаѣ.

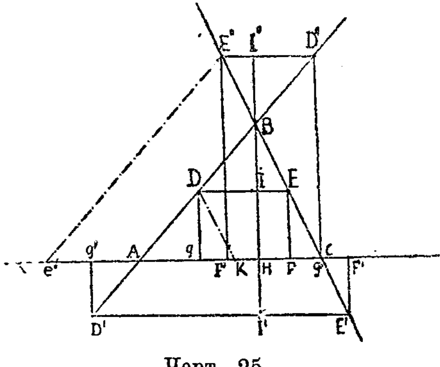
Тринадцатый случай. $a < b, \quad c < b, \quad a < c.$

Формулы даютъ: для x и y величины конечныя, опредѣленныя и положительныя. Задача, слѣд., возможна, какъ въ первомъ случаѣ.

Третій примѣръ изслѣдованія.

402. *Въ треугольникъ* ABC, *котораго основаніе равно* b, *а высота* h, *вписать прямоугольникъ даннаго периметра* $2\ p$.

Прямоугольникъ называется *вписаннымъ* въ треугольникѣ, когда двѣ его вершины находятся на одной сторонѣ треугольника, а двѣ другія вершины на двухъ другихъ сторонахъ; таковъ прямоугольникъ DEFG. Если же эти двѣ послѣднія вершины находятся не на самыхъ сторонахъ, а на ихъ продолженіяхъ, то прямоугольникъ называютъ *внѣ-вписаннымъ*; таковы прямоугольники D′E′F′G′ и D″E″F″G″.



Черт. 25.

Внутренній вписанный прямоугольникъ.

403. Пусть задача рѣшена и DEFG есть требуемый прямоугольникъ; означимъ сторону DE буквою x, сторону EF буквою y, основаніе AC буквою b, высоту BH треугольника буквою h. Во-первыхъ имѣемъ ур-ніе

$$x+y=p \quad . \quad . \quad . \quad . \ (1).$$

Въ подобныхъ треугольникахъ ABC и BDE основанія относятся какъ высоты; слѣдовательно

$$\frac{DE}{AC}=\frac{BJ}{BH}, \text{ или } \frac{x}{b}=\frac{h-y}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \ (2).$$

Рѣшая ур-нія (1) и (2), находимъ

$$x=\frac{b(h-p)}{h-b}, \quad y=\frac{h(p-b)}{h-b} \quad . \quad . \quad . \quad . \ (3).$$

Изслѣдованіе. — Во первыхъ замѣтимъ, что x и y не могутъ быть одновременно отрицательными, потому-что сумма нхъ, въ силу ур-нія (1), равна положительному количеству p; но одно изъ этихъ количествъ можетъ быть отрицательнымъ; причемъ отрицательныя значенія x или y, въ данномъ случаѣ, не могутъ быть отбрасываемы, какъ невозможныя, но подлежатъ истолкованію слѣдующимъ образомъ.

Если для y получается отрицательное рѣшеніе, и слѣд. для x положительное, то для истолкованія этого отрицательнаго рѣшенія перемѣнимъ въ уравненіяхъ (1) и (2) y на $-y$; найдемъ:

$$x-y=p, \qquad \frac{x}{b}=\frac{h+y}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \ (m).$$

Первое изъ этихъ уравненій означаетъ, что дается не сумма сторонъ прямоугольника, а *разность* между его основаніемъ и высотой. Второе уравненіе отвѣчаетъ прямоугольнику D′E′F′G′, котораго основаніе D′E′ находится подъ основаніемъ AC треугольника; въ самомъ дѣлѣ, назвавъ D′E′ буквою x и E′F′ буквою y, изъ подобія треугольниковъ D′BE′ и ABC прямо находимъ ур-ніе (m). Впрочемъ, непосредственно видно, что высота J′H этого прямоугольника имѣетъ противоположное положеніе, по отношенію къ AC, высотѣ J′H перваго прямоугольника. Итакъ, отрицательное значеніе для y соотвѣтствуетъ слѣдующему видоизмѣненію даннаго вопроса: *построить внѣ-вписанный прямоугольникъ, котораго двѣ вершины находились бы на продолже-*

ніяхъ сторонъ BA *и* BC *треугольника подъ его основаніемъ, если извѣстна разность между основаніемъ и высотою прямоугольника.*

Рѣшеніе, соотвѣтствующее этому новому условію, будемъ называть рѣшеніемъ *втораго рода*, называя рѣшеніе въ точномъ смыслѣ даннаго вопроса рѣшеніемъ *перваго рода.*

Если отрицательное рѣшеніе получится для x, то для истолкованія его перемѣнимъ въ уравненіяхъ (1) и (2) x на $-x$; найдемъ:

$$y - x = p,\ \frac{-x}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \text{или} \quad \frac{x}{b} = \frac{y-h}{h} \ . \ . \ . \ . \ (n).$$

Первое изъ этихъ уравненій означаетъ, что дается *разность* между высотою и основаніемъ искомаго прямоугольника. Второе ур-ніе отвѣчаетъ прямоугольнику D″E″F″G″, котораго основаніе E′D″ находится надъ вершиною B треугольника; въ самомъ дѣлѣ, сохранивъ прежнія обозначенія, изъ подобія треугольниковъ D′BE″ и ABC тотчасъ находимъ уравненіе (n). Впрочемъ, къ такому истолкованію отрицательнаго значенія x можно придти еще такимъ образомъ: проектируя сторону E″D″ на линію основанія тр-ка посредствомъ прямой E″e″, параллельной AB, замѣчаемъ, что отрѣзокъ Ae″ имѣть положеніе отрицательныхъ x-овъ (положительные x-сы DE и D′E′, проектированные подобнымъ же образомъ на AC, займутъ положеніе вправо отъ точки A.) Итакъ, всякій разъ, когда будетъ получаться для x отрицательное значеніе, мы его будемъ истолковывать какъ рѣшеніе слѣдующаго вопроса: *построить внѣ-вписанный прямоугольникъ, котораго высота превышала бы основаніе на p, и двѣ вершины котораго лежали бы на продолженіяхъ сторонъ* AB *и* CB *за вершину треугольника.* Назовемъ это рѣшеніе рѣшеніемъ *третьяго рода.*

Послѣ этого подготовительнаго изслѣдованія, составляемъ таблицу всевозможныхъ случаевъ, какіе могутъ представить формулы x и y. Вопервыхъ, относительно общаго знаменателя этихъ формулъ можно сдѣлать три предположенія: $h > b$, $h < b$ $h = b$. Каждое изъ этихъ предположеній можно комбинировать съ каждымъ изъ трехъ предположеній относительно числителя формулы x:

$$h > p, \quad h = p, \quad h < p.$$

Такимъ образомъ составится 9 комбинацій. Относительно втораго числителя придется дѣлать такія предположенія, которыя не находились бы въ противорѣчіи съ вышеуказанными. Такъ, взявъ $h > b$ и $h > p$, можемъ это предположеніе комбинировать съ каждымъ изъ слѣдующихъ трехъ: $p > b$, $p = b$, $p < b$; а взявъ комбинацію $h = b$, $h = p$, можемъ относительно втораго числителя положить только $p = b$. Поступая такимъ образомъ, имѣемъ слѣдующую таблицу изслѣдованія:

$$h > b \begin{cases} h > p \begin{cases} p > b \\ p = b \\ p < b \end{cases} \\ h = p\,,\ p > b \\ h < p\,,\ p > b. \end{cases}$$

$$h < b \begin{cases} h > p\,,\ p < b \\ h = p\,,\ p < b \\ h < p \begin{cases} p > b \\ p = b \\ p < b. \end{cases} \end{cases}$$

$$h = b \begin{cases} h > p\,,\ p < b \\ h = p\,,\ p = b \\ h < p\,,\ p > b. \end{cases}$$

Первый случай. $h > b$, $h > p > b$.

Въ этомъ случаѣ: $h - b > 0$, $h - p > 0$ и $p - b > 0$; а слѣд.

$$x > 0 \text{ и } y > 0.$$

Но чтобы эти алгебраическія положительныя рѣшенія дали внутренній вписанный прямоугольникъ, надо еще, чтобы было $x < b$, $y < h$. Въ данномъ случаѣ такъ и есть, ибо каждая изъ дробей $\frac{h-p}{h-b}$ и $\frac{p-b}{h-b}$ меньше 1.

Такимъ образомъ, при данныхъ условіяхъ имѣемъ *рѣшеніе перваго рода.*

Второй случай. $h > b$, $h > p$, $p = b$.

Здѣсь имѣемъ: $h - b > 0$, $h - p > 0$, $p - b = 0$ слѣд.

$$x = b, \quad y = 0;$$

т. е. прямоугольникъ сливается съ линіей АС, обращается въ прямую.

Третій случай. $h > b$, $h > p < b$.

Въ этомъ случаѣ: $h - b > 0$, $h - p > 0$, $p - b < 0$; слѣд.

$$x > 0 \ (\text{и} > b), \quad y < 0;$$

это рѣшеніе, какъ уже знаемъ, даетъ прямоугольникъ *втораго рода.*

Четвертый случай. $p = h > b$.

Здѣсь имѣемъ: $h - b > 0$, $h - p = 0$, $p - b > 0$; слѣд.

$$x = 0, \quad y = h,$$

и прямоугольникъ обращается въ прямую ВН.

Пятый случай. $p > h > b$.

Это условіе даетъ: $h - p < 0$, $h - b > 0$, $p - b > 0$; а потому

$$x < 0, \quad y > 0 \quad (\text{и} > h, \text{ ибо дробь } \frac{p-b}{h-b} > 1.)$$

Получаемъ рѣшеніе *третьяго* рода, т. е. прямоугольникъ $D''E''F''G''$, въ которомъ разность между линіями $E''F''$ и $E''D''$ равна p.

Шестой случай. $p < h < b$.

Въ такомъ случаѣ: $h - b < 0$, $h - p > 0$, $p - b < 0$; а потому

$$x < 0, \quad y > 0 \ (\text{и больше } h).$$

Имѣемъ, какъ и въ пятомъ случаѣ, рѣшеніе *третьяго рода.*

Седьмой случай. $p = h < b$.

Въ этомъ случаѣ: $h - b < 0$, $h - p = 0$, $p - b < 0$; слѣд.

$$x = 0, \quad y = h;$$

прямоугольникъ сливается съ высотою треугольника.

Восьмой случай. $p > b > h$.

Въ этомъ случаѣ: $h - b < 0$, $h - p < 0$, $p - b > 0$.

$$x > 0 \ (\text{и больше } b), \quad y < 0:$$

получаемъ рѣшеніе *втораго рода*, какъ въ третьемъ случаѣ.

Девятый случай. $h < p = b$.

Здѣсь имѣемъ: $h - b < 0$, $h - p < 0$, $p - b = 0$; а потому

$$x = b, \quad y = 0:$$

Прямоугольникъ сливается съ основаніемъ треугольника.

Десятый случай. $h < p < b$.

Въ этомъ случаѣ: $h - b < 0$, $h - p < 0$, $p - b < 0$; а потому

$$x > 0 \text{ и } y > 0, \text{ причемъ } x < b, \text{ а } y < h:$$

имѣемъ рѣшеніе *перваго рода*, какъ въ первомъ случаѣ.

Одиннадцатый случай. $p < b = h$. Находимъ:

$$x = \infty, \quad y = \infty.$$

Эти рѣшенія означаютъ невозможность задачи. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ уравненіи (2) $b = h$, имѣемъ: $x = h - y$, откуда $x + y = h$, т. е. когда въ треугольникѣ основаніе равно высотѣ, полупериметръ вписан. прям-ка долженъ равняться высотѣ; слѣд. какъ скоро p не равно h, задача невозможна.

Двѣнадцатый случай. $h = b = p$. Въ этомъ случаѣ:

$$h - b = h - p = p - b = 0, \text{ слѣд.}$$

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{0}{0}.$$

Эта неопредѣленность дѣйствительная; въ самомъ дѣлѣ, тотчасъ мы видѣли, что при $b = h$ полупериметръ всякаго вписаннаго прямоугольника долженъ равняться h; слѣд. если будетъ дано, какъ и есть въ данномъ случаѣ, $p = h$, всякій вписанный прямоугольникъ будетъ требуемый, и задача имѣетъ безчисленное множество рѣшеній.

Тринадцатый случай. $p > h = b$. Въ этомъ случаѣ

$$x = \infty, \quad y = \infty:$$

задача невозможна, какъ въ одиннадцатомъ случаѣ.

Примѣчаніе I. Изслѣдованіе показало намъ, что *рѣшеніе перваго рода* получается въ томъ случаѣ, когда полупериметръ искомаго прямоугольника заключается между основаніемъ и высотою треугольника, т. е. при $h > b$ если имѣемъ: $h > p > b$ (первый случай) , а при $h < b$, если дано, что $h < p < b$ (десятый случай) .Эти условія можно найти и геометрически. Проведя DK параллельно BC, найдемъ KC=DE, и слѣд.

$$p = DE + DG = CK + DG.$$

Но вслѣдствіе подобія треугольниковъ ABC и ADK, необходимо имѣемъ

при $h > b$ и $DG > AK$, а потому $p > CK + AK$ или $p > b$;

а при $h < b$ и $DG < AK$, а потому $p < CK + AK$ или $p < b$.

Съ другой стороны

$$p = DG + DE = HI + DE.$$

Но изъ подобія треугольниковъ BDE и BAC необходимо имѣемъ

при $h > b$ и $BI > DE$, а слѣд. $p < HI + BI$ или $p < h$;

а при $h < b$ и $BI < DE$, а слѣд. $p > HI + BI$ или $p > h$.

И такъ, для того чтобы рѣшеніе перваго рода имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы полупериметръ прямоугольника заключался между основаніемъ и высотою даннаго треугольника.

Примѣчаніе II. Когда p мало отличается отъ h, получается прямоугольникъ весьма растянутый въ направленіи высоты BH; напротивъ того, если p близко къ b, прямоугольникъ получается сплюснутый; а измѣняя непрерывно p между этими предѣлами, получимъ всѣ промежуточныя формы: слѣд. можетъ получиться, между прочимъ, и *квадратъ*; и для этого необходимо, чтобы было

$$x=y, \text{ или } b(h-p)=h(p-b), \text{ откуда}$$

$$p=\frac{2bh}{b+h}.$$

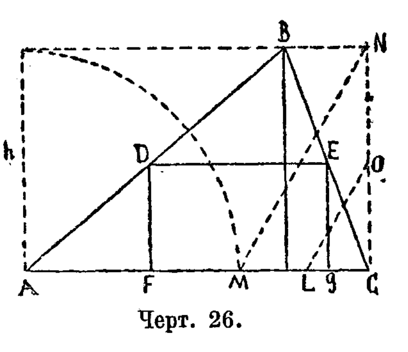
Въ такомъ случаѣ, имѣя въ виду уравненіе $x+y=p$, получимъ

$$x=y=\frac{bh}{b+h}.$$

Построеніе. — Легко построить найденныя величины для x и y; построимъ, напр., y въ случаѣ: $h<p<b$. Изъ формулы $y=\frac{h(b-p)}{b-h}$ имѣемъ пропорцію: $(b-h):(b-p)=h:y$; такимъ образомъ, слѣдуетъ построить четвертую пропорціональную къ тремъ линіямъ: $b-h$, $b-p$ и h. Нанеся на AC отрѣзки $AM=h$, $AL=p$, имѣемъ

$$b-h=CM, \quad b-p=CL.$$

Изъ точки C возставляемъ перпендикуляръ CN къ AC, равный h, соединяемъ M съ N и проводимъ LO параллельно MN; легко видѣть, что $OC=y$. Проведя изъ O линію OD параллельно AC, получимъ верхнее основаніе DE прямоугольника, а опустивъ перпендикуляры DF и EG, и самый прямоугольникъ.



Черт. 26.

Внѣ-вписанный прямоугольникъ.

404. I. Когда вершины D и E прямоугольника находятся подъ основаніемъ треугольника, имѣемъ прямоугольникъ D′E′F′G′. Пусть требуется построить такой прямоугольникъ по данному периметру $2p$. Называя сторону D′E′ буквою x и E′F′ буквою y, имѣемъ уравненія:

$$x+y=p, \quad \frac{x}{b}=\frac{h+y}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

откуда

$$x=b\cdot\frac{p+h}{b+h}, \qquad y=h\cdot\frac{p-b}{b+h}.$$

Изслѣдованіе. — Такъ какъ знаменатель въ этихъ формулахъ не можетъ быть нулемъ, то x и y не могутъ быть ни безконечными, ни неопредѣленными; кромѣ того, x всегда положителенъ, а y можетъ быть или положительнымъ, или отрицательнымъ, или нулемъ, что зависитъ отъ знака разности $p-b$. Итакъ:

1. $p>b$. Въ этомъ случаѣ: $x>0$ и $y>0$; и кромѣ того, такъ какъ дробь $\frac{p+h}{b+h}>1$, то $x>b$. И такъ, въ данномъ случаѣ существуетъ внѣ-вписанный прямоугольникъ съ даннымъ периметромъ $2p$, имѣющій такое положеніе какъ D′E′F′G′.

2. $p=b$. Въ этомъ случаѣ: $x=b$, $y=0$, и разсматриваемый прямоугольникъ сливается съ основаніемъ треугольника.

3. $p < b$. Въ этомъ случаѣ $x > 0$, но $< b$; $y < 0$.

Вставляя въ уравненія (4) $-y$ вмѣсто y, получаемъ

$$x - y = p, \quad \frac{x}{b} = \frac{h - y}{h}.$$

Легко видѣть, что эти уравненія соотвѣтствуютъ вписанному прямоугольнику DEFG, въ которомъ разность между основаніемъ и высотой равна p.

Примѣчаніе. Чтобы въ разсматриваемомъ случаѣ прямоугольникъ былъ квадратомъ, надо, чтобы было $x = y$, или $b(p + h) = h(p - b)$, откуда

$$p = \frac{2bh}{h - b}, \text{ и слѣд. } x = y = \frac{bh}{h - b}.$$

Такъ какъ p — величина положительная, то h не можетъ быть $< b$; такимъ образомъ нельзя получить внѣ-вписаннаго квадрата подъ основаніемъ треугольника, если $b > h$.

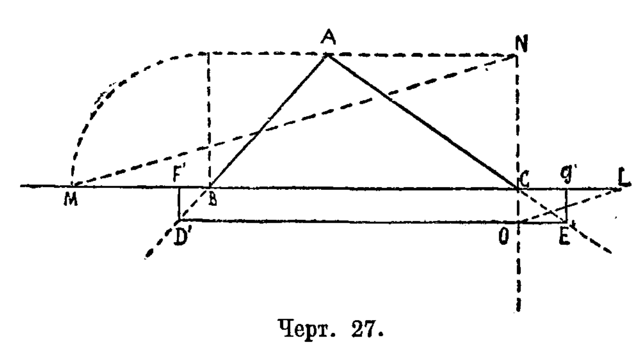
Построеніе. — Сдѣлаемъ построеніе для случая $p > b$. Изъ пропорціи

$$(b + h) : (p - b) = h : y$$

видно, что построеніе y сводится къ нахожденію четвертой пропорціональной къ тремъ даннымъ линіямъ $b + h$, $p - b$ и h; для чего беремъ $BM = h$, $BL = p$, и слѣд.

$CM = b + h$ и $CL = p - b$.

Соединяемъ M съ N и изъ L проводимъ линію LO, параллельную MN: точка O опредѣляетъ сторону D′E′ искомаго прямоугольника, а вмѣстѣ съ тѣмъ и самый прямоугольникъ.



Черт. 27.

405. II. Когда вершины внѣ-вписаннаго прямоугольника находятся на продолженіяхъ сторонъ BA и BC за вершину B, имѣемъ прямоугольникъ D″E″F″G″, для опредѣленія котораго послужатъ уравненія

$$x + y = p, \quad \frac{x}{b} = \frac{y - h}{h}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

въ которыхъ x означаетъ основаніе, а y — высоту новаго прямоугольника. Изъ нихъ имѣемъ:

$$x = b \cdot \frac{p - h}{b + h}, \quad y = h \cdot \frac{b + p}{b + h}.$$

Изслѣдованіе. 1. $p > h$; въ этомъ случаѣ: $x > 0$, $y > 0$ и $> h$. Это рѣшеніе даетъ прямоугольникъ съ периметромъ $2p$, имѣющій такое положеніе какъ D″E″F″G″.

2. $p = h$; въ этомъ случаѣ $x = 0$, $y = h$, и разсматриваемый прямоугольникъ сливается съ высотою треугольника.

3. $p < h$; въ этомъ случаѣ: $x < 0$, $y > 0$, но $< h$. Подставивъ въ ур-нія (5) $-x$ вмѣсто x, получимъ

$$y - x = p, \quad \frac{x}{b} = \frac{h - y}{h}:$$

легко видѣть, что эти уравненія соотвѣтствуютъ вписанному прямоугольнику DEFG, въ которомъ разность между высотою и основаніемъ равна данной линіи p.

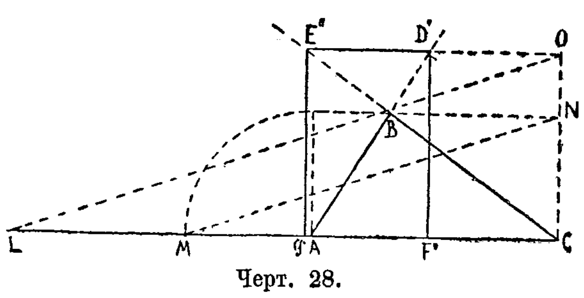
Примѣчаніе. — Чтобы прямоугольникъ былъ квадратомъ, надо, чтобы было $x=y$, т. е. $b(p-h)=h(b+p)$, откуда

$$p=\frac{2bh}{b-h}, \text{ слѣд. } x=y=\frac{bh}{b-h};$$

нельзя, слѣд., получить внѣ-вписаннаго квадрата въ разсматриваемомъ случаѣ, если будетъ $b<h$.

Построеніе. — Для построенія y беремъ на продолженіи основанія BC линіи $AM=h$, $AL=p$; тогда
$CM=b+h$, $CL=b+p$.

Соединивъ M съ N, проводимъ OL параллельно MN; затѣмъ изъ точки O—параллель къ линіи AC, которая и дастъ вершины D″ и E″ искомаго прямоугольника.



Черт. 28.

406. *Заключеніе.* — Обозрѣвая изслѣдованіе, не трудно усмотрѣть, что никогда всѣ три рода прямоугольниковъ, имѣющихъ данный периметръ $2p$, не появляются совмѣстно на одномъ и томъ же чертежѣ, т. е. въ одномъ и томъ же треугольникѣ, но являются попарно; а именно:

1) Если p меньше меньшаго изъ количествъ b и h, задача не имѣетъ рѣшенія.

2) Если p заключается между b и h, то внутренній прямоугольникъ является совмѣстно съ однимъ изъ внѣшнихъ, а именно: съ I при $b<h$, и со II при $b>h$.

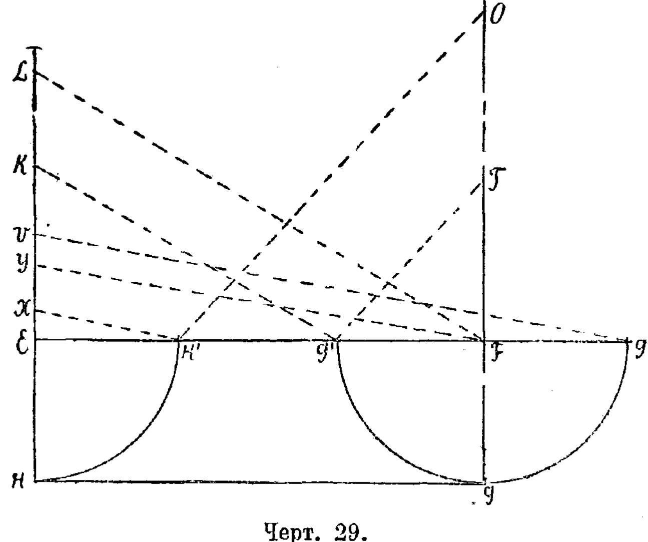
3) Если p больше большаго изъ количествъ b и h, то внутренній прямоугольникъ невозможенъ, но являются совмѣстно два внѣшнихъ.

Четвертый примѣръ изслѣдованія.

407. *Даны два прямоугольника:* ABCD *и* EFGH, *имѣющіе измѣренія: первый* b *и* h, *причемъ* b > h, *второй* m *и* n, *причемъ* m > n. *Вписать въ первый изъ нихъ прямоугольникъ* PQRS *подобный второму.*

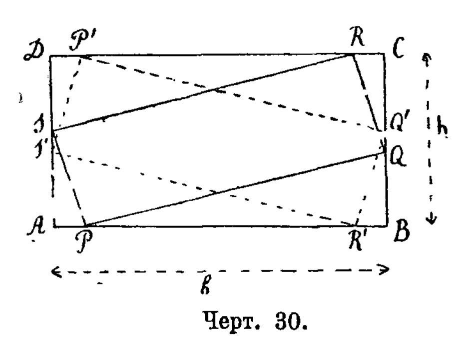
Вершины P, Q, R и S искомаго прямоугольника могутъ лежать или на самыхъ сторонахъ прямоугольника ABCD, или на ихъ продолженіяхъ; въ первомъ случаѣ получается *внутренне-вписанный* прямоугольникъ, во второмъ *внѣ-вписанный.*

408. I. Для построенія прямоугольника PQRS достаточно знать разстоянія: $AP=x$, $AS=y$ точекъ P и S



Черт. 29.

отъ вершины A. Такъ какъ уголъ SPQ прямой, то углы APS и BPQ дополнительны и тр-ки ASP и BPQ подобны, а потому сходственныя ихъ стороны пропорціональны:



Черт. 30.

$$\frac{AP}{BQ}=\frac{AS}{BP}=\frac{PS}{PQ},$$

т. е.

$$\frac{x}{h-y}=\frac{y}{b-x}=\frac{n}{m}.$$

Приравнивая каждое изъ двухъ первыхъ отношеній третьему, находимъ два уравненія съ двумя неизвѣстными:

$$mx+ny=nh \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$nx+my=nb \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

откуда

$$x=\frac{n(mh-nb)}{m^2-n^2}, \qquad y=\frac{n(mb-nh)}{m^2-n^2};$$

слѣдовательно

$$BP=b-x=\frac{m(mb-nh)}{m^2-n^2}, \qquad BQ=h-y=\frac{m(mh-nb)}{m^2-n^2};$$

или, положивъ $\frac{m}{n}=k$:

$$x=\frac{kh-b}{k^2-1}, \quad b-x=\frac{k(kb-h)}{k^2-1}; \quad y=\frac{kb-h}{k^2-1}, \quad h-y=\frac{k(kh-b)}{k^2-1}.$$

Изслѣдованіе. — Если данные прямоугольники не квадраты, то достаточно ограничиться разсмотрѣніемъ предположеній: $b>h$ и $m>n$, такъ что изслѣдованію подлежатъ случаи:

$$k>1\begin{cases} k>\frac{b}{h} \\ k=\frac{b}{h} \\ k<\frac{b}{h} \end{cases}$$

$$k=1\begin{cases} k<\frac{b}{h}, & \text{при } b>h \\ k=\frac{b}{h}, & \text{при } b=h. \end{cases}$$

Первый случай. — $k=\frac{m}{n}>\frac{b}{h}$. — Изъ этого неравенства находимъ, что $kh>b$. Затѣмъ, замѣчаемъ, что k, будучи больше $\frac{b}{h}$, больше и дроби $\frac{h}{b}$ (которая $<\frac{b}{h}$), а слѣдовательно и $kb>h$. Заключаемъ, что $x>0$, $y>0$, $b-x>0$, $h-y>0$; изъ послѣднихъ двухъ неравенствъ слѣдуетъ, что $x<b$ и $y<h$. Такимъ образомъ вершины искомаго прямоугольника находятся на самыхъ сторонахъ прямоугольника ABCD, т. е. PQRS представляетъ дѣйствительно внутренній вписанный прямоугольникъ.

Условіе $\frac{m}{n} > \frac{b}{h}$ показываетъ, что всѣ вписанные прямоугольники имѣютъ форму болѣе удлиненную, нежели прямоугольникъ ABCD.

Второй случай. — $k = \frac{m}{n} = \frac{b}{h}$. — Это условіе даетъ: $kh = b$, слѣд.

$$x = 0, \qquad y = h;$$

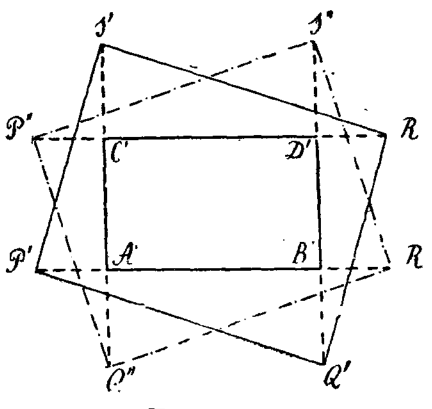
это значитъ, что вершины P и R совпадаютъ — первая съ A, вторая съ C; а вершины S и Q — первая съ D, вторая съ B, а потому прямоугольникъ PQRS съ ABCD.

Третій случай. — $k = \frac{m}{n} < \frac{b}{h}$. — Изъ этого слѣдуетъ, что $kh < b$, а потому $x < 0$ и $h - y < 0$ или $y > h$; такимъ образомъ: x отрицателенъ, а y положителенъ и больше h. Эти результаты означаютъ, что вершина P должна находиться влѣво отъ точки A на продолженіи стороны BA, а вершина R — вправо отъ точки C на продолженіи стороны DC; вершина S — вверхъ отъ D на продолженіи AD, а вершина Q — внизъ отъ B на продолженіи DB; т. е. получается прямоугольникъ P′Q′R′S′, обнимающій ABCD.

Если составить уравненія для этой новой задачи, положивъ $A'P' = x$ и $A'S' = y$, найдемъ:

$$\frac{x}{y - h} = \frac{y}{x + b} = \frac{n}{m};$$

и эти уравненія мы получаемъ прямо изъ ур-ній предшествующихъ перемѣною x на $-x$. Итакъ, первоначальныя уравненія всегда даютъ отвѣтъ на предложенную задачу: этимъ отвѣтомъ служитъ внутренне-вписанный прямоугольникъ PQRS, если EFGH болѣе удлиненъ чѣмъ ABCD, и внѣвписанный прямоугольникъ P′Q′R′S′ (черт. 31), если EFGH менѣе удлиненъ нежели ABCD.



Черт. 31.

Слѣдуетъ замѣтить, что взявъ $DP' = AP$ и $DS' = AS$ (черт. 30), получимъ второй прямоугольникъ P′Q′R′S′, удовлетворяющій условіямъ вопроса, но какъ онъ равенъ PQRS, то мы и не будемъ считать его новымъ рѣшеніемъ. То-же замѣчаніе относится къ внѣ-вписанному прямоугольнику P″Q″R″S″, равному P′Q′R′S′ (черт. 31).

Четвертый случай. — $k = 1$ и $b > h$. Находимъ:

$$x = -\infty, \qquad x = \infty.$$

Условіе $k = 1$ означаетъ, что прямоугольникъ EFGH есть квадратъ; а полученное рѣшеніе, въ которомъ $x < 0$, означаетъ, что для даннаго прямоугольника никогда не можетъ быть полученъ внѣ-вписанный квадратъ, но что внѣ-вписанный прямоугольникъ, какъ P′Q′R′S′, тѣмъ болѣе приближается къ формѣ квадрата, чѣмъ больше становятся его размѣры.

Пятый случай. — Если $k = 1$ и $b = h$, т. е. данные прямоугольники ABCD и EFGH — квадраты, формулы даютъ:

$$x = \frac{0}{0}, \qquad y = \frac{0}{0};$$

эти рѣшенія означаютъ дѣйствительную неопредѣленность, потому-что въ квадратъ

можно вписать безчисленное множество квадратовъ; въ самомъ дѣлѣ, легко доказать, что если нанести на каждой сторонѣ квадрата, начиная отъ каждой вершины, одну и ту же произвольную длину, получимъ вершины новаго квадрата.

Примѣчаніе. — Здѣсь умѣстно сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Когда, какъ въ данномъ случаѣ, неопредѣленность получается отъ нѣсколькихъ предположеній относительно частныхъ значеній буквъ, нужно всѣ эти предположенія вводить заразъ: иначе могла бы ускользнуть изъ виду дѣйствительная неопредѣленность. Такъ, положивъ въ формулахъ x и y заразъ $k=1$ и $b=h$, тотчасъ обнаружимъ неопредѣленность; и если бы мы захотѣли найти истинное значеніе x и y, положивъ

$$b=h+\alpha \quad \text{и} \quad k=1+p\alpha,$$

то, упростивъ формулы и положивъ затѣмъ $\alpha=0$, нашли бы

$$x=\frac{h-p}{2}, \qquad y=\frac{h+p}{2},$$

выраженія, вслѣдствіе присутствія въ нихъ произвольнаго количества p, дѣйствительно неопредѣленныя.

Но еслибы оба предположенія мы ввели *не совмѣстно*, а положивъ *сперва* $b=h$, что позволяетъ удалить общаго множителя $k-1$, а *затѣмъ* $k=1$ въ упрощенныхъ уже формулахъ

$$x=\frac{bk}{k+1}, \qquad y=\frac{bk}{k+1},$$

нашли бы опредѣленныя величины

$$x=\frac{b}{2}, \qquad y=\frac{b}{2};$$

слѣдовательно, мы удалили бы неопредѣленность, на дѣлѣ существующую.

Примѣчаніе это весьма важно, и его всегда слѣдуетъ имѣть въ виду при изслѣдованіи вопросовъ, когда приходится дѣлать не одно частное предположеніе.

Если будемъ k неограниченно увеличивать, приближая его къ ∞, x и y будутъ стремиться къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, при $k=\infty$ имѣемъ: $x=\frac{\infty}{\infty}$, $y=\frac{\infty}{\infty}$; для раскрытія этихъ неопредѣленностей раздѣлимъ числителя и знаменателя формулъ x и y на k^2, что дастъ

$$x=\frac{\frac{h}{k}-\frac{b}{k^2}}{1-\frac{1}{k^2}}, \quad y=\frac{\frac{b}{k}-\frac{h}{k^2}}{1-\frac{1}{k^2}};$$

а положивъ $k=\infty$, находимъ $x=0$ и $y=0$: прямоугольникъ PQRS обращается въ діагональ AC, что совершенно понятно.

Построеніе. — Величины x и $h-y$ можно представить въ видѣ

$$x=\frac{n}{m+n}\left(\frac{m}{m-n}h-\frac{n}{m-n}b\right),$$

$$h-y=\frac{m}{m+n}\left(\frac{m}{m-n}h-\frac{n}{m-n}b\right),$$

и построить при помощи четвертыхъ пропорціональныхъ. Во-первыхъ, чтобы получить линію

$$\frac{mh}{m-n}=z,$$

достаточно взять (черт. 29) на продолженіи HE линію $EK=h$, затѣмъ на линіи

EF нанести $FG' = FG = n$; соединивъ точки G' и K и проведя черезъ точку F линію FL параллельно $G'K$, найдемъ

$$\frac{EG'}{EF} = \frac{EK}{EL}, \text{ т. е. } \frac{m-n}{m} = \frac{h}{EL}, \text{ откуда } EL = \frac{mh}{m-n} = z.$$

Такимъ же образомъ: чтобы построить отрѣзокъ

$$\frac{nb}{m-n} = u,$$

беремъ $FO = b$, $EH' = EH = n$; соединивъ точки H' и O, проводимъ изъ точки G' параллель $G'T$, и получаемъ

$$\frac{H'F}{G'F} = \frac{FO}{FT}, \text{ т. е. } \frac{m-n}{n} = \frac{b}{FT} \quad \text{откуда } FT = \frac{nb}{m-n} = u.$$

Нанеся FT отъ L до V, получимъ

$$EV = EL - LV = z - u,$$

и выраженія x и $h - y$ примутъ видъ

$$x = \frac{n}{m-n} \times EV, \qquad h - y = \frac{m}{m+n} \times EV.$$

И такъ, для опредѣленія x нужно взять $FG'' = FG = n$, провести прямую $G''V$ и черезъ точку H' ей параллельную $H'X$; для полученія $h - y$ проводимъ черезъ точку F линію FY параллельно VG''; найдемъ: $EX = x$ и $EY = h - y$.

Нанеся на стороны прямоугольника ABCD

$$AP = EX, \quad DS = YE$$

получимъ и прямоугольникъ PQRS.

Фигура $P'Q'R'S'$ строится такимъ же образомъ, ибо въ этомъ случаѣ

$$x = \frac{n}{m+n}(u - z), \quad y - h = \frac{m}{m+n}(u - z).$$

409. II. Вершины P и S могутъ находиться въ P'' и S'' на продолженіяхъ сторонъ BA и CA; внѣ-вписанный прямоугольникъ приметъ положеніе $P''Q''R''S''$ (черт. 32). Положивъ

$$AP'' = x, \quad AS'' = y,$$

изъ подобія треугольниковъ $P''AS''$ и $P''BQ''$ найдемъ:

$$\frac{x}{h+y} = \frac{y}{b+x} = \frac{n}{m};$$

откуда

$$mx - ny = hn$$

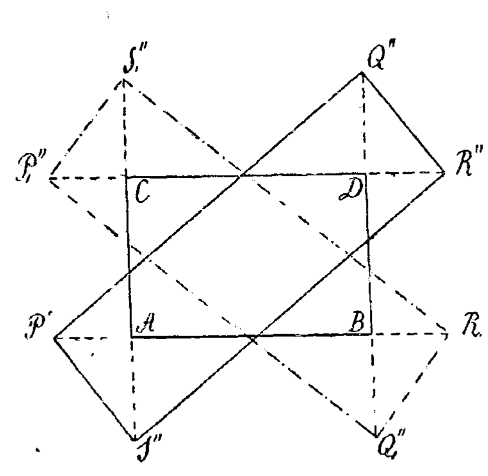
$$my - nx = bn;$$

рѣшивъ ихъ, находимъ:

$$x = \frac{n(mh + nb)}{m^2 - n^2}, \quad y = \frac{n(mb + nh)}{m^2 - n^2},$$

или

$$x = \frac{kh + b}{k^2 - 1}, \quad y = \frac{kb + h}{k^2 - 1}.$$



Черт. 32.

Изслѣдованіе. — Задача всегда возможна, какова бы ни была величина k въ предѣлахъ отъ ∞ до 1; тоже самое замѣчаніе, что и прежде прилагается и къ случаю $k=1$.

Что касается выраженій x и $h+y$, ихъ строимъ такимъ же образомъ какъ и въ первомъ случаѣ, приведя къ виду

$$x=\frac{n}{m+n}(z+u), \quad h+y=\frac{m}{m+n}(z+u),$$

гдѣ z и u имѣютъ вышеуказанныя значенія; сверхъ того, построенія, уже исполненныя при нахожденіи x и $h-y$ или x и $y-h$, позволяютъ быстрѣе опредѣлить x и $h+y$, опредѣляющія новое рѣшеніе P″Q″R″S″.

Заключеніе. — И такъ, задача, взятая въ самомъ общемъ смыслѣ, всегда имѣетъ два рѣшенія: 1) прямоугольникъ *внѣ-вписанный*, какъ P″Q″R″S″; 2) прямоугольникъ такой какъ PQRS, или какъ P′Q′R′S′ (черт. 30) смотря потому, будетъ-ли $\frac{m}{n}$ больше, или меньше $\frac{b}{h}$.

410. Задачи.

1. Рабочій въ теченіи 7 дней работы, въ которой 3 дня помогалъ ему его ученикъ, получилъ 29 руб. Въ слѣдующіе затѣмъ 11 дней, изъ которыхъ 4 дня помогалъ ему ученикъ, онъ заработалъ 47 руб. Сколько получалъ въ день рабочій и сколько ему давала въ день работа его ученика?

2. Нѣкто, купивши 3 аршина одной матеріи и 5 аршинъ другой, издержалъ на это 50 р. Въ другой разъ, купивши 7 аршинъ первой и 10 аршинъ другой, издержалъ на это 75 р. Сколько стоилъ аршинъ той и другой матеріи?

3. Вычислить стороны прямоугольника, зная, что если одну изъ нихъ увеличить на 6 ф., а другую на 15, то площадь увеличится на 128 квадр. футовъ; если же первую сторону уменьшить на 2 ф., а вторую на 5 ф., то площадь уменьшится на 25 кв. футовъ.

4. Рѣшить и изслѣдовать систему

$$ax+by+c=0$$
$$bx+ay+c'=0.$$

5. Бассейнъ можетъ быть наполненъ водою изъ двухъ крановъ такимъ образомъ: если первый кранъ будетъ открытъ t часовъ, и затѣмъ закрытъ, то второй, будучи открытъ послѣ этого, дополнитъ недостающее количество воды въ Θ часовъ; если ж первый будетъ открытъ t' часовъ, и затѣмъ закрытъ, то вторымъ краномъ, открытымъ по закрытіи перваго, бассейнъ наполнится въ Θ' часовъ. — Во сколько часовъ каждый кранъ, будучи открытъ одинъ, наполнилъ бассейнъ?

6. Сосудъ, наполняемый послѣдовательно двумя жидкостями, которыхъ плотности соотвѣтственно равны d и d', вѣситъ p и p', включая сюда и вѣсъ стѣнокъ сосуда. Найти вѣсъ сосуда и его вмѣстимость?

7. Данъ треугольникъ ABC, котораго основаніе $BC=a$, высота $AD=h$. Требуется провести двѣ параллели MN и M′N′ къ основанію, такъ чтобы ихъ разность равнялась d, а площадь трапеціи MNM′N′ была бы равновелика данному квадрату m^2. За неизвѣстныя можно принять разстоянія искомыхъ параллелей отъ вершины треугольника.

8. Найти стороны x и y прямоугольника, зная, что они относятся между собою какъ $m:n$, и что если измѣнить ихъ на a и b, то площадь измѣнится на p^2, гдѣ p—данная линія.

9. Вписать въ данный треугольникъ — прямоугольникъ, въ которомъ извѣстна разность двухъ смежныхъ его сторонъ.

10. Въ данный треугольникъ, котораго основаніе $= b$, а высота $= h$, вписать прямоугольникъ, подобный данному прямоугольнику, имѣющему измѣренія m и n.

11. Двѣ прямыя XX′ и YY′ пересѣкаются въ точкѣ O подъ прямымъ угломъ; двѣ другія данныя прямыя AB и A′B′ встрѣчаютъ первыя двѣ въ данныхъ точкахъ, именно: прямую XX′ въ точкахъ B и B′, прямую YY′ въ точкахъ A и A′, причемъ:

$$OA = a,\quad OA' = a',\quad OB = b,\quad OB' = b'.$$

Найти разстоянія точки пересѣченія M прямыхъ AB и A′B′ отъ линій XX′ и YY′.

12. Даны два треугольника ABC и A′B′C′, которыхъ основанія $AC = b$, $A'C' = b'$ находятся на одной и той же прямой XY, а высоты равны h и h'. Въ какомъ разстояніи y отъ прямой XY нужно провести параллельную ей прямую MNM′N′ для того чтобы отрѣзки ея MN и M′N′, заключающіеся внутри треугольниковъ, были равны. Вычислить также общую длину x этихъ равныхъ отрѣзковъ.

13. На прямой AB берутъ точку C, лежащую между A и B и на отрѣзкахъ $AB = 2R$, $AC = 2R'$, $BC = 2R''$, какъ на діаметрахъ, описываютъ три полукруга O, O′ и O″. Вписать кругъ I въ криволинейный треугольникъ, заключающійся между O, O′ и O″; вычислить также радіусъ этого круга.

За неизвѣстныя принять перпендикуляръ $IP = x$ изъ центра искомаго круга на AB, и $OP = y$.

14. Данъ прямоугольникъ ABCD, въ которомъ $AB = a$ и $AD = b$, причемъ $a > b$. Требуется на сторонахъ AB и AD найти такія точки H и I, чтобы прямыя HH′ и II′, проведенныя черезъ нихъ параллельно сторонамъ прямоугольника и пересѣкающіяся въ точкѣ O, образовали съ сторонами два новыхъ прямоугольника AHOI и H′OI′C, въ которыхъ стороны были бы въ данномъ отношеніи $\frac{p}{q}$, т. е. чтобы

$$\frac{OI}{OH} = \frac{p}{q} \quad \text{и} \quad \frac{OH'}{OI'} = \frac{p}{q}.$$

ГЛАВА XXVII.

Неопредѣленный анализъ первой степени.

Рѣшеніе одного уравненія съ 2 неизвѣстными, въ цѣлыхъ числахъ.—Рѣшеніе системы уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ однимъ больше числа уравненій.—Рѣшеніе одного ур-нія съ 3 неизвѣстными.—Задачи.

1. Рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ одного ур-нія съ 2 неизвѣстными.

411. Когда число неизвѣстныхъ больше числа уравненій, послѣднія имѣютъ безчисленное множество рѣшеній и называются поэтому *неопредѣленными*.

Простѣйшій случай представляетъ одно ур. съ двумя неизвѣстными, напр. $x - 3y = 5$. Опредѣляя изъ него x, находимъ

$$x = 3y + 5.$$

Это ур. показываетъ, что x зависитъ отъ y, самый же y остается совершенно произвольнымъ; поэтому мы можемъ давать ему какія угодно значенія. Такъ, полагая

$$\begin{array}{lll} y = -2, & \text{находимъ:} & x = -1, \\ y = 0, & « & x = 5, \\ y = 4, & « & x = 17; \text{ и т. д.} \end{array}$$

Иногда вопросъ, приводящій къ неопредѣленному уравненію, требуетъ, чтобы неизвѣстныя были числа *цѣлыя*; а нерѣдко къ этому присоединяется еще требованіе, чтобы они были и *положительныя* (напр., если x и y означаютъ числа лицъ въ извѣстномъ обществѣ, или цифры искомаго числа и т. п.); такимъ образомъ является задача: изъ безчисленнаго множества рѣшеній цѣлыхъ и дробныхъ, положительныхъ и отрицательныхъ, выдѣлить только *цѣлыя* и *положительныя*: такое ограниченіе значительно уменьшаетъ число рѣшеній.

Всякое неопредѣленное ур. съ двумя неизвѣстными, по освобожденіи отъ дробей, по перенесеніи неизвѣстныхъ въ одну часть, а извѣстныхъ въ другую и по приведеніи можетъ быть представлено въ видѣ:

$$ax + by = c,$$

гдѣ a, b и c—числа цѣлыя. Прежде всего мы должны рѣшить вопросъ о томъ, всегда-ли подобное ур. можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ? Отвѣтомъ на это служатъ слѣдующія двѣ теоремы.

412. Теорема. I. *Если въ уравненіи* $ax + by = c$ *коэффиціенты* a *и* b *при неизвѣстныхъ имѣютъ общаго множителя, не содержащагося въ извѣстномъ членѣ* c, *то уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній.*

Пусть a и b имѣютъ общаго дѣлителя m, который *не дѣлитъ* числа c; въ такомъ случаѣ, по раздѣленіи a и b на m, получимъ нѣкоторыя цѣлыя числа a' и b'.

$$a : m = a', \quad b : m = b'; \qquad \text{откуда} \qquad a = ma' \text{ и } b = mb'.$$

Подстановка въ уравненіе дастъ

$$a'mx + b'my = c,$$

откуда

$$a'x + b'y = \frac{c}{m},$$

гдѣ $\frac{c}{m}$, по условію, дробь. Допустивъ что x и y могутъ быть цѣлыми числами, мы получили бы въ первой части послѣдняго уравненія число цѣлое, тогда какъ вторая часть его—дробь: равенство было бы невозможно. Итакъ, ур. не можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ.

Примѣромъ можетъ служить ур. $15x + 21y = 29$, въ которомъ коэффиціенты 15 и 21 имѣютъ общагэ множителя 3, на который 29 не дѣлится.

Если всѣ три коэффиціента a, b и c имѣютъ общаго множителя, то по сокращеніи на него уравненія можетъ оказаться: или, что коэффиціенты a и b

имѣютъ общаго множителя, или что a и b — числа первыя между собою. Въ первомъ случаѣ, по предыдущей теоремѣ, ур. не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній. Что же касается втораго случая, то можно доказать, что ур. необходимо имѣетъ цѣлыя рѣшенія.

413. Теорема II. *Когда коэффиціенты* a *и* b *суть числа первыя между собою, то ур.* $ax+by=c$ *имѣетъ цѣлыя рѣшенія.*

Рѣшивъ ур. относительно x, напр., получимъ

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

Докажемъ прежде всего, что если въ эту формулу вмѣсто y будемъ подставлять всѣ послѣдовательныя цѣлыя числа меньшія a, т. е. 0, 1, 2, 3, ... $a-1$, и каждый разъ совершать дѣленіе, то всѣ a остатковъ будутъ *различны*. Въ самомъ дѣлѣ, подставимъ вмѣсто y какія нибудь два числа y' и y'' меньшія a (изъ ряда 0, 1, 2, ... $a-1$); получимъ два выраженія

$$\frac{c-by'}{a} \text{ и } \frac{c-by''}{a}.$$

Выполнивъ каждое дѣленіе и означивъ частныя буквами q' и q'', а остатки r' и r'', найдемъ:

$$\frac{c-by'}{a}=q'+\frac{r'}{a}; \qquad \frac{c-by''}{a}=q''+\frac{r''}{a}.$$

Допустивъ, что остатки r' и r'' могутъ быть равны, найдемъ по вычитаніи втораго равенства изъ перваго:

$$\frac{c-by'}{a}-\frac{c-by''}{a}=q'-q''$$

или

$$\frac{b(y''-y')}{a}=q'-q''.$$

Такъ какъ $q'-q''$, какъ разность цѣлыхъ чиселъ, есть число цѣлое, то и первая часть должна быть цѣлымъ числомъ, а потому $b(y''-y')$ должно на-цѣло дѣлиться на a. Но b и a — числа первыя между собою, слѣд. $y''-y'$ должно дѣлиться на a, т. е. разность двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое *меньше* a, должно бы дѣлиться на a, что невозможно. Невозможно, поэтому, и допущеніе, что могутъ быть равные остатки.

Итакъ, мы доказали, что если вмѣсто y подставлять всѣ послѣдовательныя цѣлыя числа отъ 0 до $a-1$ включительно, и каждый разъ совершать дѣленіе $c-by$ на a, то мы получимъ a остатковъ, которые *всѣ различны* и *каждый меньше* a, (какъ дѣлителя). Но всѣ цѣлыя числа меньшія a, различныя между собою, число которыхъ a, суть, очевидно, числа

$$0, 1, 2, 3, \ldots . a-1.$$

Слѣд. въ числѣ остатковъ будетъ *непремѣнно одинъ* и *только одинъ*, равный нулю. Значеніе y, подстановка котораго въ выраженіе $\frac{c-by}{a}$ даетъ остатокъ 0, обращаетъ $x=\frac{c-by}{a}$ въ цѣлое число: цѣлому y соотвѣтствуетъ цѣлый

x. Итакъ, когда a и b первыя между собою, уравненіе дѣйствительно допускаетъ цѣлыя рѣшенія, что и требовалось доказать.

414. Первый способъ рѣшенія ур-нія $ax+by=c$ въ цѣлыхъ числахъ. Вышеприведенное доказательство даетъ также средство находить одну пару цѣлыхъ рѣшеній. Пусть, напр., дано уравненіе

$$7x+5y=232.$$

Такъ-какъ коэффиціенты при x и y суть числа первыя между собою, то ур-ніе допускаетъ цѣлыя рѣшенія. Для опредѣленія одной пары ихъ рѣшаемъ ур. относительно, напр., y; находимъ

$$y=\frac{232-7x}{5},$$

Подставляемъ сюда вмѣсто x послѣдовательно цѣлыя числа, меньшія 5, т. е. 0, 1, 2, 3, 4; находимъ:

$$\text{при } x=0,\ y=\frac{232}{5}=46+\frac{2}{5};$$

$$\text{«}\ x=1,\ y=\frac{232-7}{5}=45,$$

Итакъ, подстановка 1 вмѣсто x, даетъ для y цѣлое число 45; сл. $x=1$ и $y=45$ представляютъ одну пару цѣлыхъ рѣшеній, что не трудно провѣрить.

Замѣтимъ, что въ видахъ ограниченія числа возможныхъ подстановокъ слѣдуетъ всегда рѣшать уравненіе относительно неизвѣстнаго, имѣющаго меньшій коэффиціентъ.

Какъ скоро найдена одна пара цѣлыхъ рѣшеній, то легко найти сколько угодно такихъ рѣшеній при помощи формулъ, къ выводу которыхъ теперь и переходимъ.

415. Теорема III. *Если какимъ нибудь способомъ найдена одна пара цѣлыхъ рѣшеній:* $x=\alpha$, $y=\beta$ *уравненія* $ax+by=c$, *то всѣ цѣлыя рѣшенія заключаются въ формулахъ*

$$x=\alpha+bt, \qquad y=\beta-at,$$

гдѣ t — произвольное цѣлое число.

Такъ-какъ $x=\alpha$ и $y=\beta$, по условію, суть рѣшенія даннаго уравненія, то подстановка ихъ въ это уравненіе дастъ тождество

$$a\alpha+b\beta=c.$$

Вычтя это тождество изъ даннаго уравненія, имѣемъ:

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0,$$

откуда

$$x-\alpha=\frac{b(\beta-y)}{a},$$

а слѣд.

$$x=\alpha+\frac{b(\beta-y)}{a}$$

Выраженіе x состоитъ изъ: цѣлаго числа α и дробнаго выраженія $\frac{b(\beta-y)}{a}$. Поэтому x *только тогда* можетъ быть цѣлымъ числомъ, когда $b(\beta-y)$ дѣлится

на a; но b и a—числа первыя между собою, слѣд. чтобы $b(\beta-y)$ дѣлилось нацѣло на a, необходимо, чтобы $\beta-y$ дѣлилось на a; поэтому для y можно брать только такія цѣлыя числа, при которыхъ $\frac{\beta-y}{a}$ обращается въ произвольное цѣлое число t, т. е. условіе того, чтобы x было цѣлымъ, есть

$$\frac{\beta-y}{a}=t, \text{ или}$$

$$\beta-y=at, \text{ или}$$

$$y=\beta-at; \text{ а въ такомъ случаѣ}$$

$$x=\alpha+bt.$$

Выраженія: $x=\alpha+bt$ и $y=\beta-at$ даютъ сколько угодно цѣлыхъ рѣшеній; стоитъ только вмѣсто t подставлять какія угодно цѣлыя числа.

Такъ какъ t подчинено только одному условію, что оно должно быть цѣлымъ, то въ формулы x и y можно вмѣсто t подставить $-t$, и тогда они примутъ видъ:

$$x=\alpha-bt, \qquad y=\beta+at.$$

Возьмемъ-ли группу формулъ:

$$x=\alpha+bt, \qquad y=\beta-at,$$

или

$$x=\alpha-bt, \qquad y=\beta+at,$$

замѣчаемъ, что вторые члены ихъ суть произведенія неопредѣленнаго цѣлаго t: на коэффиціентъ при y въ формулѣ x, и на коэффиціентъ при x—въ формулѣ y, причемъ одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ берется съ тѣмъ знакомъ, какой онъ имѣетъ въ уравненіи, а другой—со знакомъ противоположнымъ тому, какой онъ имѣетъ въ уравненіи. Зная это правило, можно тотчасъ опредѣлить всѣ цѣлыя рѣшенія уравненія, какъ скоро найдена одна пара такихъ рѣшеній.

Примѣръ I. Выше мы нашли, что одна пара цѣлыхъ рѣшеній уравненія $7x+5y=232$ есть: $x=1$, $y=45$; слѣд. всѣ цѣлыя рѣшенія заключаются въ формулахъ:

$$x=1+5t, \qquad y=45-7t;$$

или въ формулахъ:

$$x=1-5t, \qquad y=45+7t.$$

Взявъ, напр., первую группу формулъ, и давая въ ней t какія угодно цѣлыя значенія, положительныя и отрицательныя, найдемъ сколько угодно паръ цѣлыхъ рѣшеній; такъ

при $t=0$ имѣемъ: $x=1$, $y=45$;
« $t=1$ « $x=-4$, $y=52$;
« $t=2$ « $x=-9$, $y=59$; и т. д.
« $t=-1$ « $x=6$, $y=38$;
« $t=-2$ « $x=11$, $y=31$, и т. п.

Примѣръ II. Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе

$$8x-13y=159.$$

Опредѣляя x, имѣемъ:

$$x = \frac{13y + 159}{8};$$

при $y = 0$, имѣемъ: $x = 19\frac{7}{8}$; при $y = 1$, $x = 21\frac{1}{2}$; при $y = 2$, $x = 23\frac{1}{8}$; при $y = 3$, $x = 24\frac{3}{4}$; при $y = 4$, $x = 26\frac{3}{8}$; при $y = 5$, $x = 28$.

Общія формулы цѣлыхъ рѣшеній суть:

$$x = 28 + 13t, \qquad y = 5 + 8t;$$

или-же

$$x = 28 - 13t, \qquad y = 5 - 8t.$$

Примѣчаніе. Изъ самаго доказательства теоремы III слѣдуетъ что въ формулахъ: $x = \alpha + bt$, $y = \beta - at$ содержатся *всѣ* цѣлыя рѣшенія уравненія $ax + by = c$; непосредственною же повѣркою можно доказать, что эти выраженія дѣйствительно удовлетворяютъ данному уравненію. Въ самомъ дѣлѣ, подстановка даетъ:

$$a(\alpha + bt) + b(\beta - at) = c, \quad \text{или} \quad a\alpha + b\beta = c;$$

а это есть тождество, потому-что, по положенію, α и β удовлетворяютъ данному уравненію.

Указанный способъ рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій въ цѣлыхъ числахъ очень простъ, и его слѣдуетъ употреблять всякій разъ, когда коэффиціенты при неизвѣстныхъ, или, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ нихъ—числа небольшія. Въ противномъ случаѣ, могло-бы потребоваться большое число подстановокъ для нахожденія одной пары цѣлыхъ рѣшеній, и способъ этотъ отнималъ-бы много времени. По этому для рѣшенія ур-ній съ большими коэффиціэнтами предпочтительнѣе употреблять

416. Второй способъ рѣшенія уравненія $ax + by = c$ въ цѣлыхъ числахъ.

Сперва разсмотримъ два частныхъ случая:

1. Пусть одинъ изъ коэффиціентовъ заключается множителемъ въ извѣстномъ членѣ, напр. пусть $c = ma$; уравненіе будетъ

$$ax + by = ma,$$

откуда

$$x = \frac{ma - by}{a} = m - \frac{by}{a}.$$

Чтобы x было цѣлымъ числомъ, необходимо (т. к. m—цѣлое число), чтобы by дѣлилось на a; но b и a—числа первыя между собою, слѣд. необходимо y должно быть кратнымъ a, т. е. должно быть.

$$y = at,$$

гдѣ t—какое угодно цѣлое число: тогда x выразится цѣлою формулою

$$x = m - bt.$$

Формулы: $x = m - bt$, $y = at$, гдѣ t—произвольное цѣлое число, и даютъ всѣ цѣлыя рѣшенія предложеннаго уравненія.

2. Если одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ 1, напр. $a = 1$, то ур.

$$x + by = c$$

даетъ $x = c - by$; давая y какія угодно цѣлыя значенія, будемъ и для x получать каждый разъ цѣлыя же величины. Рѣшеніе такого уравненія, слѣд., весьма просто.

На этомъ замѣчаніи и основанъ общій способъ рѣшенія неопредѣленнаго уравненія въ цѣлыхъ числахъ. Въ самомъ дѣлѣ, еслибы намъ удалось привести рѣшеніе уравненія $ax + by = c$ къ такому уравненію, въ которомъ одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ 1, то задача была бы рѣшена. Но когда a и b числа первыя между собою,—такое приведеніе всегда возможно. Пусть напр., дано ур-ніе

$$8x + 13y = 159 \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Коэффиціенты 8 и 13 числа первыя между собою, слѣд. уравненіе можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ. Опредѣливъ то неизвѣстное, у котораго коэффиціентъ меньше, находимъ:

$$x = \frac{159 - 13y}{8};$$

исключая цѣлыя числа изъ $\frac{159}{8}$ и $\frac{13}{8}$ и соединяя дробные члены въ одну дробь, получимъ:

$$x = 19 - y + \frac{7 - 5y}{8}.$$

Выраженіе x состоитъ изъ двухъ частей: $19 - y$, которая будетъ цѣлою при всякомъ цѣломъ y, и $\frac{7 - 5y}{8}$, имѣющей дробный видъ; для того чтобы x было цѣлымъ числомъ, необходимо между всѣми значеніями y выбрать такія, при которыхъ $\frac{7 - 5y}{8}$ равнялась бы нѣкоторому цѣлому числу t. Итакъ, нахожденіе цѣлыхъ значеній для x приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ уравненія

$$\frac{7 - 5y}{8} = t, \quad \text{или} \quad 7 - 5y = 8t \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Въ такомъ случаѣ будетъ

$$x = 19 - y + t \;.\;.\;.\;.\; (\alpha).$$

Замѣтимъ, что въ уравненіи (2), или все равно, $5y + 8t = 7$, меньшій коэффиціентъ есть остатокъ отъ раздѣленія большаго коэффиціента въ данномъ ур-ніи на меньшій; а большій коэффиціентъ равенъ меньшему коэффиціенту даннаго ур-нія; вслѣдствіе этого ур-ніе (2) проще даннаго. Кромѣ того, коэффиціенты его 5 и 8 числа первыя между собою: это необходимо вытекаетъ изъ того, что если дѣлимое (13) и дѣлитель (8) первые между собою, то остатокъ (5) будетъ первый съ дѣлителемъ; такимъ образомъ ур. (2) имѣетъ необходимо цѣлыя рѣшенія. Опредѣляя изъ него неизвѣстное, имѣющее меньшій коэффиціентъ, получимъ:

$$y = \frac{7 - 8t}{5} = 1 - t + \frac{2 - 3t}{5}.$$

Чтобы цѣлому t соотвѣтствовалъ цѣлый y, необходимо, чтобы выраженіе $\frac{2-3t}{5}$ было числомъ цѣлымъ; обозначивъ это цѣлое число буквою t', находимъ

$$y=1-t+t', \quad \ldots \quad (\alpha')$$

причемъ

$$\frac{2-3t}{5}=t';$$

Такимъ образомъ нахожденіе цѣлыхъ значеній y приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ уравненія $\frac{2-3t}{5}=t'$, или

$$3t+5t'=2 \quad \ldots \quad (3).$$

Выводя изъ него неизвѣстное съ меньшимъ коэффиціетомъ, имѣемъ

$$t=\frac{2-5t'}{3}=-t'+\frac{2-2t'}{3}\cdot$$

Разсуждая по предыдущему, убѣдимся, что нахожденіе цѣлыхъ значеній для t приводитъ къ рѣшенію въ цѣлыхъ числахъ ур-нія

$$\frac{2-2t'}{3}=t'', \quad \text{или} \quad 2t'+3t''=2 \quad \ldots \quad (4),$$

причемъ

$$t=-t'+t'' \quad \ldots \quad (\alpha'').$$

Рѣшая ур. (4) относительно t', имѣемъ

$$t'=\frac{-3t''+2}{2}=-t''+1-\frac{t''}{2}\cdot$$

Чтобы t' было цѣлымъ, необходимо, чтобы было цѣлымъ $\frac{t''}{2}$; положивъ

$\frac{t''}{2}=t'''$, гдѣ t'''—неопредѣленное цѣлое, имѣемъ

$$t''=2t''' \quad \ldots \quad (5)$$

причемъ

$$t'=1-t''-t''' \quad \ldots \quad (\alpha''').$$

Итакъ, мы пришли къ ур-нію (5), въ которомъ коэффиціентъ при t'' есть 1; давая t''' какія угодно цѣлыя значенія, будемъ каждый разъ получать и для t'' цѣлыя значенія.

Такимъ образомъ мы нашли рядъ соотношеній

1) $x=\quad 19-y+t,$
2) $y=\quad 1-t+t'$
3) $t=-t'\ +t''$
4) $t'=\quad 1-t''-t'''$
5) $t''=2t'''.$

Давая произвольное цѣлое значеніе количеству t''', мы изъ ур. 5) получимъ цѣлое же значеніе и для t''. Цѣлыя значенія t'' и t''', подставленныя въ ур. 4), дадутъ цѣлое значеніе для t'. Цѣлыя значенія t'' и t', подставленныя въ

3), дадутъ цѣлое значеніе для t. Эти цѣлыя значенія t и t', подставленныя въ 2), дадутъ цѣлое значеніе для y. Наконецъ цѣлыя значенія t и y, подставленныя въ 1), дадутъ соотвѣтствующее цѣлое значеніе x. Но во избѣжаніе неудобства, представляемаго такими послѣдовательными подстановками, выражаютъ x и y непостредственно чрезъ произвольное количество t'''. Подставляя въ 4) вмѣсто t'' его величину $2t'''$, найдемъ

$$t' = 1 - 2t''' - t''' = 1 - 3t''';$$

подставляя это выраженіе t' и вмѣсто t'' его величину въ 3), получимъ

$$t = -1 + 3t''' + 2t''' = -1 + 5t''';$$

подстановка значеній t и t' во 2) дастъ

$$y = 1 + 1 - 5t''' + 1 - 3t''' = 3 - 8t''';$$

наконецъ, подстановка найденныхъ выраженій для y и t въ 1) дастъ:

$$x = 19 - 3 + 8t''' - 1 + 5t''' = 15 + 13t'''.$$

Итакъ общія формулы цѣлыхъ рѣшеній нашего ур. суть:

$$x = 15 + 13t''', \qquad y = 3 - 8t'''.$$

Они имѣютъ совершенно тотъ же составъ, какой указанъ въ § 415.

417. Докажемъ, что указанный въ предыдущемъ § пріемъ рѣшенія ур-нія всегда приводитъ къ полученію цѣлыхъ рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, мы получили рядъ уравненій:

$$\begin{aligned} 1)\quad & 8x + 13y = 159, \\ 2)\quad & 5y + 8t = 7, \\ 3)\quad & 3t + 5t' = 2, \\ 4)\quad & 2t' + 3t'' = 2, \\ 5)\quad & t'' - 2t''' = 0, \end{aligned}$$

причемъ во 2) меньшій коэффиціентъ 5 есть остатокъ отъ раздѣленія большаго коэффиціента даннаго ур. 13 на меньшій 8. Въ ур-ніи 3) меньшій коэффиціентъ 3 есть остатокъ отъ дѣленія 8 на 5, т. е. дѣлителя на первый остатокъ. Въ ур-ніи 4) меньшій коэффиціентъ 2 есть остатокъ отъ дѣленія 5 на 3, т. е. перваго остатка на второй; и т. д. Изъ этого видно, что процессъ рѣшенія приводитъ въ данномъ случаѣ къ такому же ряду дѣйствій, какой имѣлъ бы мѣсто при нахожденіи общаго наиб. дѣлителя между коэффиціентами даннаго уравненія. Но какъ эти коэффиціенты—числа первыя между собою, то въ указанномъ рядѣ дѣленій непремѣнно дойдемъ до остатка равнаго 1, который и явится коэффиціентомъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ въ одномъ изъ уравненій (въ нашемъ примѣрѣ—коэффиціентомъ при t'' въ ур. 5)). Такимъ образомъ, цѣль будетъ достигнута.

Для полученія цѣлыхъ рѣшеній въ опредѣленныхъ числахъ стоитъ только произвольному цѣлому t''' давать какія угодно цѣлыя значенія—положительныя или отрицательныя: 0, 1, 2, 3, ... , —1, —2; —3, . .

При $t =$	0	1	2	3	4	5		−1	−2	−3	−4	и т. д.
$x = 15 + 13t''' =$	15	28	41	54	67	80		2	−11	−24	−37	
$y = 3 - 8t''' =$	3	−5	−13	−21	−29	−37		11	19	27	35	

418. Упрощенія общаго спѳба.—При рѣшеніи неопредѣленнаго уравненія слѣдуетъ пользоваться всѣми обстоятельствами, которыя ведутъ къ упрощенію вычисленій и слѣд. къ скорѣйшему достиженію цѣли. Укажемъ эти упрощенія.

1. Рѣшая уравненіе $19x+15y=23$, находимъ

$$y=\frac{23-19x}{15}=1-x+\frac{8-4x}{15}.$$

Приравнявъ t дробный членъ, получили-бы уравненіе съ коэффиціентами 4 и 15; но можно получить ур. съ меньшими коэффиціентами, замѣтивъ, что $\frac{8-4x}{15}=\frac{4(2-x)}{15}$ и слѣд.

$$y=1-x+\frac{4(2-x)}{15};$$

очевидно, что y будемъ цѣлымъ при такомъ цѣломъ x, который обращаетъ $\frac{2-x}{15}$ въ цѣлое число t; поэтому полагаемъ

$$\frac{2-x}{15}=t,$$

откуда $2-x=15t$, и $x=2-15t$; затѣмъ

$$y=1-x+4t=1-2+15t+4t=-1+19t.$$

Указанный пріемъ быстро привелъ къ цѣлымъ формуламъ для x и y.

2. Упрощеніе рѣшенія всегда возможно въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ и извѣстный членъ имѣютъ общаго множителя. Пусть дано ур-ніе.

$$6x-5y=21;$$

раздѣливъ обѣ части на общаго множителя 3 чиселъ 6 и 21, получимъ:

$$2x-\frac{5y}{3}=7.$$

Такъ какъ $2x$ и 7—числа цѣлыя, то $5y$ должно дѣлиться на 3; но 5 не дѣлится на-цѣло на 3, слѣдовательно $\frac{y}{3}$ должно быть цѣлымъ. Обозначивъ это цѣлое буквою y', имѣемъ: $\frac{y}{3}=y'$, откуда $y=3y'$, и данное ур. принимаетъ простѣйшій видъ

$$2x-5y'=7;$$

рѣшая его, послѣдовательно находимъ:

$$x=\frac{5y'+7}{2}=2y'+3+\frac{y'+1}{2};\quad \frac{y'+1}{2}=t;\quad y'+1=2t;\quad y'=-1+2t;$$

$$x=2y'+3+t=-2+4t+3+t=1+5t;$$ и наконецъ

$$y=3y'=3(-1+2t)=-3+6t.$$

3. Однимъ изъ полезнѣйшихъ упрощеній служитъ *введеніе отрицательныхъ остатковъ*. Такъ рѣшая ур-ніе,

$$7x+26y=111,$$

имѣемъ

$$x = \frac{111 - 26y}{7} = 15 + \frac{6}{7} - 3y - \frac{5y}{7}.$$

Здѣсь каждый изъ остатковъ: 6 и 5 отъ дѣленія 111 и 26 на 7 больше половины дѣлителя; но ихъ можно уменьшить, если каждое изъ частныхъ увеличить на 1. Взявъ при дѣленіи 111 на 7 въ частномъ 16, получимъ отрицательный остатокъ -1, численная величина котораго меньше 6; точно такимъ же образомъ взявъ при дѣленіи 26 на 7 въ частномъ 4, найдемъ отрицательный остатокъ -2, численно меньшій прежняго остатка. Формула x приметъ видъ

$$x = 16 - \frac{1}{7} - \left(4y - \frac{2y}{7}\right) = 16 - 4y + \frac{2y-1}{7};$$

полагая $\frac{2y-1}{7} = t$, имѣемъ:

$$x = 16 - 4y + t.$$

Затѣмъ: $2y = 1 + 7t$, $y = \frac{1+7t}{2} = 3t + \frac{1+t}{2}$; полагая $\frac{1+t}{2} = t'$,

имѣемъ: $y = 3t + t'$, $t = -1 + 2t'$. Наконецъ:

$$y = -3 + 7t', \quad x = 27 - 26t'.$$

419. Рѣшеніе въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ.—Иногда вопросъ, приводящій къ неопредѣленному уравненію, требуетъ не только цѣлыхъ, но вмѣстѣ съ этимъ и положительныхъ рѣшеній. Слѣдующая теорема позволяетъ, при одномъ взглядѣ на уравненіе, опредѣлить, имѣетъ ли уравненіе ограниченное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, или неограниченное, или совсѣмъ не имѣетъ такихъ рѣшеній.

420. Теорема. *Уравненіе $ax + by = c$ имѣетъ ограниченное число рѣшеній въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ, или совсѣмъ не имѣетъ такихъ рѣшеній, когда коэффиціенты a и b имѣютъ одинаковый знакъ; напротивъ, оно имѣетъ неограниченное число сказанныхъ рѣшеній, когда a и b имѣютъ противоположные знаки.*

Мы видѣли, что цѣлыя рѣшенія уравненія $ax + by = c$ выражаются формулами

$$x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at,$$

гдѣ α и β представляютъ одну пару цѣлыхъ рѣшеній, а t произвольное цѣлое число, положительное или отрицательное.

Условившись коэффиціентъ a считать всегда положительнымъ (еслибъ было $a < 0$, то умноживъ все уравненіе на -1, мы сдѣлали бы коэф. при x положительнымъ), и обозначая абсолютныя величины количествъ a, b и c буквами a', b' и c', убѣдимся, что въ отношеніи знаковъ ур. $ax + by = c$ можетъ представлять только слѣдующіе случаи:

$$a'x + b'y = +c' \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

$$a'x + b'y = -c' \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

$$a'x - b'y = \pm c' \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

I. Цѣлыя рѣшенія ур-нія (1) изображаются формулами:

$$x=\alpha+b't,\quad y=\beta-a't;$$

чтобы x и y были положительны, цѣлое t должно удовлетворять неравенствамъ:

$$\alpha+b't>0,\quad \beta-a't>0;$$

рѣшая эти неравенства, находимъ:

$$t>-\frac{\alpha}{b'},\quad t<\frac{\beta}{a'},$$

т. е. ограничивающіе предѣлы для t. Если между этими предѣлами находятся *цѣлыя* числа, то уравненіе имѣетъ столько паръ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, сколько существуетъ такихъ цѣлыхъ значеній t; если же между предѣлами $-\frac{\alpha}{b'}$ и $\frac{\beta}{a'}$ нѣтъ цѣлыхъ чиселъ, то ур-ніе совсѣмъ не имѣетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Вотъ примѣры:

1. Рѣшая ур. $8x+13y=159$, мы нашли

$$x=15+13t,\quad y=3-8t;$$

рѣшая неравенства $15+13t>0$ и $3-8t>0$, находимъ:

$$t>-\frac{15}{13},\ \text{или}\ t>-1\frac{2}{13};\ \text{и}\ t<\frac{3}{8}.$$

Между предѣлами $-1\frac{2}{13}$ и $\frac{3}{8}$ заключаются только два цѣлыя числа: -1 и 0; полагая $t=-1$, находимъ: $x=2$, $y=11$; положивъ $t=0$, получимъ: $x=15$, $y=3$. Данное ур. допускаетъ, такимъ образомъ, только двѣ пары цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

2. Рѣшая ур. $2x+3y=1$, находимъ

$$x=-1+3t,\quad y=1-2t,$$

откуда находимъ предѣлы для t: $t>\frac{1}{3}$, $t<\frac{1}{2}$. Но какъ между $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ нѣтъ цѣлыхъ чиселъ, то заключаемъ, что данное уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Это видно изъ самаго уравненія; въ самомъ дѣлѣ, сумма коэффиціентовъ при x и y больше извѣстнаго члена, а потому даже при самыхъ малыхъ цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, при $x=1$ и $y=1$, первая часть уравненія больше второй. Вообще, если въ уравненіи $a'x+b'y=c'$ имѣемъ $a'+b'>c'$, оно не имѣетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

II. Уравненіе $a'x+b'y=-c'$, въ которомъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ положительны, а извѣстный членъ отрицателенъ, не имѣетъ положительныхъ рѣшеній, не цѣлыхъ, ни дробныхъ, ибо сумма положительныхъ чиселъ не можетъ равняться отрицательному числу.

III. Цѣлыя рѣшенія уравненія $a'x-b'y=c$, гдѣ $c\gtrless 0$, выражаются формулами:

$$x=\alpha+b't,\quad y=\beta+a't;$$

чтобы выбрать изъ нихъ только положительныя, надо рѣшить неравенства

$$\alpha + b't > 0, \quad \beta + a't > 0,$$

откуда

$$t > -\frac{\alpha}{b'}, \quad t > -\frac{\beta}{a'};$$

отсюда очевидно, что всякое цѣлое значеніе t, большее большей изъ дробей $-\frac{\alpha}{b'}$ и $-\frac{\beta}{a'}$, дастъ цѣлыя положительныя рѣшенія; а такъ какъ такихъ значеній t безконечно много, то ур. допускаетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ. — Выше мы нашли, что цѣлыя рѣшенія уравненія $6x - 5y = 21$ выражаются формулами:

$$x = 1 + 5t, \quad y = -3 + 6t;$$

а предѣлы для t опредѣляются неравенствами

$$1 + 5t > 0, \quad -3 + 6t > 0,$$

откуда:

$$t > -\frac{1}{5}, \quad t > \frac{1}{2}.$$

Заключаемъ, что всѣ цѣлыя числа, большія $\frac{1}{2}$, т. е. 1, 2, 3, 4, . . . до $+\infty$ даютъ цѣлыя положительныя значенія x и y.

421. *Примѣчаніе.* Когда число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній ограниченное, его можно опредѣлить, съ точностью до 1, не рѣшая уравненія.

Этотъ случай представляется тогда, когда a и b имѣютъ одинаковые знаки, и для t получается два предѣла—нисшій и высшій, именно

$$t \geqslant -\frac{\alpha}{b} \quad \text{и} \quad t \leqslant \frac{\beta}{a};$$

откуда видно, что уравненіе $ax + by = c$ имѣетъ столько цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, сколько есть цѣлыхъ, положительныхъ или отрицательныхъ чиселъ, между $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$.

I случай. — Числа $\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ — дробныя.

Пусть будутъ $-\frac{\alpha}{b} - f$ и $\frac{\beta}{a} + f_1$ цѣлыя числа, изъ которыхъ первое меньше $-\frac{\alpha}{b}$, второе больше $\frac{\beta}{a}$. Между двумя цѣлыми числами $-\frac{\alpha}{b} - f$ и $\frac{\beta}{a} + f_1$ содержится столько послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, сколько единицъ безъ одной заключается въ ихъ разности. Слѣд. число n цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія будетъ

$$n = \frac{\beta}{a} + f_1 - \left(-\frac{\alpha}{b} - f\right) - 1 = \frac{a\alpha + b\beta}{ab} + f + f_1 - 1.$$

Но какъ α и β суть рѣшенія даннаго ур нія, то число $a\alpha + b\beta$ равно c, и потому

$$n = \frac{c}{ab} + f + f_1 - 1.$$

Пусть цѣлая часть частнаго $\frac{c}{ab}$ равна q, а дополнительная дробь f_2; тогда

$$n = q + f + f_1 + f_2 - 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Такъ какъ, по положенію, $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ не цѣлыя числа, то f и f_1 суть числа положительныя, отличныя отъ нуля, и меньшія 1, а потому число $f + f_1 + f_2 - 1$, будучи цѣлымъ, можетъ равняться только 0 или 1, такъ что n равно q или $q + 1$.

II случай. — Одно изъ чиселъ: $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ *или оба — цѣлыя.*

Если $-\frac{\alpha}{b}$ число цѣлое, то можно взять t равнымъ $-\frac{\alpha}{b}$, и x будетъ равенъ нулю, между тѣмъ какъ y будетъ имѣть величину положительную и цѣлую, равную частному отъ раздѣленія c на b. Въ такомъ случаѣ при доказательствѣ беремъ цѣлое число, предшествующее $-\frac{\alpha}{b}$, т. е. полагаетъ $f = 1$. Подобное же замѣчаніе относится и къ случаю когда $\frac{\beta}{a}$ будетъ цѣлое число; и тогда, при этихъ новыхъ условіяхъ, формула (1) всегда примѣнима.

Полагая, что только одно изъ чиселъ $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ — цѣлое, цѣлое число $f + f_1 + f_2 - 1$ приводится къ суммѣ двухъ чиселъ, отличныхъ отъ нуля и меньшихъ, каждое, единицы; оно равно, слѣд., 1, а потому число рѣшеній будетъ $q + 1$.

Пусть, затѣмъ, оба числа: $-\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ цѣлыя. Числа f и f_1 будутъ оба равны 1, и легко показать, что f_2 равно 0. Въ самомъ дѣлѣ, какъ сказано выше, $-\frac{\alpha}{b}$ есть цѣлое число, слѣд. c дѣлится на b; $\frac{\beta}{a}$ есть цѣлое число, слѣд. c дѣлится на a, а потому и на ab. Такимъ образомъ $f_2 = 0$, $f = f_1 = 1$, слѣд. $f + f_1 + f_2 - 1$ равно 1, и $n = q + 1$. Итакъ, число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія $ax + by = c$ равно q или $q + 1$, называя буквою q цѣлую часть частнаго отъ раздѣленія c на ab. (Приэтомъ 0 принимается числомъ положительнымъ).

Напр. для ур-ній $5x + 3y = 2$ и $7x + 5y = 39$ число рѣшеній $= q$; для уравненій $4x + 3y = 11$ и $7x + 3y = 61$ оно равно $q + 1$.

422. Для примѣненія изложенной теоріи рѣшимъ слѣдующія три задачи.

I задача. — *Выдать* 78 *рублей одними* 5-ти и 3-хъ *рублевыми билетами, не имѣя никакихъ другихъ.*

Положимъ, что для этого нужно выдать пятирублевыхъ билетовъ x, а трехрублевыхъ y; уравненіе, очевидно, будетъ:

$$5x + 3y = 78.$$

Задача требуетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній; и по коэффиціентамъ при x и y видно, что ур-ніе имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Раздѣливъ все ур. на 3, находимъ

$$\frac{5x}{3} + y = 26;$$

полагая $\frac{x}{3} = t$, гдѣ t— цѣлое число, тотчасъ имѣемъ:

$$x = 3t, \quad y = 26 - 5t.$$

Чтобы x и y были положительными, необходимо, чтобы

$3t \geqq 0$ (если 0 включить въ число положит. [illegible]);

$26 - 5t > 0$, откуда $t < \frac{26}{5}$ или 5 [illegible]

Итакъ, полагая

$$\begin{aligned} t &= 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \text{ находимъ,} \\ x &= 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15, \\ y &= 26,\ 21,\ 16,\ 11,\ 6,\ 1. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что выдать 78 руб. требуемымъ образомъ можно шестью различными способами, именно:

1)	Давая	26	билетовъ въ 3 рубля	и ни	одного	въ 5 рублей;		или
2)	»	21	»	»	» 3 билета	»	;	или
3)	»	16	»	»	» 6 »	»	;	или
4)	»	11	»	»	» 9 »	»	;	или
5)	»	6	»	»	» 12 »	»	;	или
6)	»	1	»	»	» 15 »	»	.	

II задача. *Извѣстно, что пріемами элементарной геометріи (т. е. посредствомъ циркуля и линейки) можно раздѣлить окружность какъ на* 6, *такъ и на* 5 *равныхъ частей. Какъ и сколькими способами можно съ помощію этихъ частей найти* $\frac{1}{15}$ *часть окружности?*

Очевидно, что нужно найти такія двѣ дроби съ знаменателями 5 и 6, которыхъ разность равнялась-бы $\frac{1}{15}$; назвавъ числители этихъ дробей буквами x и y, имѣемъ:

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{5} = \frac{1}{15} \ (1); \qquad \frac{y}{5} - \frac{x}{6} = \frac{1}{15} \ (2).$$

Рѣшаемъ ур. (1); по освобожденіи отъ знаменателей имѣемъ:

$$5x - 6y = 2;$$

раздѣливъ обѣ части на 2 и положивъ $\frac{x}{2} = x'$, получимъ ур-ніе

$$5x' - 3y = 1,$$

откуда $x' = -1 + 3t$, а слѣд.

$$x = -2 + 6t;$$

затѣмъ $$y = -2 + 5t.$$

Чтобы x и y были > 0, нужно чтобы было: $t > \frac{1}{3}$, $t > \frac{2}{5}$. Полагая

$$t = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots$$

находимъ: $$\begin{aligned} x &= 4,\ 10,\ 16, \ldots\ldots \\ y &= 3,\ 8,\ 12, \ldots\ldots \end{aligned}$$

Итакъ, наименьшія значенія x и y, дающія простѣйшее рѣшеніе задачи, суть: $x=4$ и $y=3$, т. е.: отъ $\frac{4}{6}$ или $\frac{2}{3}$ окружности нужно отнять $\frac{3}{5}$ ея, и остатокъ дастъ $\frac{1}{15}$ окружности.

Рѣшая ур-ніе (2), или, по освобожденіи отъ дробей, уравненіе: $6y-5x=2$, находимъ:

$$x=2-6t,$$
$$y=2-5t,$$

предѣлы для t суть: $t<\frac{1}{3}$, $t<\frac{2}{5}$. Полагая.

	$t=0,$	$-1,$	$-2,$	$-3,$	....
имѣемъ:	$x=2,$	$8,$	$14,$	$20,$	....
	$y=2,$	$7,$	$12,$	$17,$	....

Итакъ, при этомъ способѣ, простѣйшее рѣшеніе задачи будетъ $x=2$ и $y=2$, т. е. вычтя изъ дуги, равной $\frac{2}{5}$ окр. дугу $=\frac{1}{3}$ окр., получимъ въ остаткѣ $\frac{1}{15}$ окружности.

III задача. *Зубчатое колесо съ 17-ю зубцами захватываетъ зубцы другаго колеса съ 13-ю зубцами. Сколько оборотовъ должно сдѣлать каждое изъ нихъ, чтобы каждый зубецъ перваго побывалъ въ каждомъ промежуткѣ втораго?*

Пусть первое колесо должно сдѣлать x оборотовъ, а второе y. Когда первое обернется одинъ разъ, его 17 зубцовъ зацѣпятъ послѣдовательно столько же промежутковъ втораго; слѣд. при x оборотахъ $17x$ зубцовъ зацѣпятъ $13y$ промежутковъ между зубцами втораго. Но при x оборотахъ каждый зубецъ долженъ зацѣпить каждый промежутокъ, слѣд.

$$17x=13y,$$

откуда: $x=13t$, $y=17t$.

Чтобы x и y были положительны, нужно t давать всѣ цѣлыя значенія, начиная съ 1. Такимъ образомъ, требуемое будетъ имѣть мѣсто черезъ 13 оборотовъ (вообще $13t$) перваго, или 17 (вообще $17t$) оборотовъ втораго.

2. Рѣшеніе системы уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ однимъ больше числа уравненій.

423. Возьмемъ 2 ур-нія съ 3 неизвѣстными:

$$ax+by+cz=d \quad ..... \quad (1)$$
$$a'x+b'y+c'z=d' \quad .... \quad (2).$$

Если въ каждомъ изъ нихъ или въ одномъ всѣ четыре коэффиціента имѣютъ общаго множителя, то предварительно на него сокращаютъ уравненіе; пусть это сдѣлано, и оба уравненія приведены въ простѣйшій видъ.

Чтобы каждое ур-ніе въ отдѣльности принимало цѣлыя рѣшенія, необходимо, чтобы въ каждомъ всѣ три коэффиціента: при x, y и z были первые между собою, т. е. a, b и c — первые между собою, и a', b' и c' — между собою. Въ самомъ дѣлѣ, пусть напр. a, b и c имѣютъ общаго множителя m, на который d не дѣлится; въ такомъ случаѣ частныя

$$\frac{a}{m}=a'' \quad , \frac{b}{m}=b'' \quad \text{и} \quad \frac{c}{m}=c''$$

будутъ цѣлыя; отсюда

$$a=a''m, \quad b=b''m, \quad c=c''m.$$

Подставляя въ ур. (1) и сокращая на m, найдемъ

$$a''x+b''y+c''z=\frac{d}{m}.$$

При цѣлыхъ x, y и z первая часть представляетъ число цѣлое, тогда какъ вторая есть дробь; слѣд. ур-ніе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній.

Рѣшая одно ур-ніе съ 2 неизвѣстными: $ax+by=c$ мы видѣли, что когда a и b — числа первыя между собою, ур-ніе необходимо имѣетъ цѣлыя рѣшенія; слѣд. условіе, что для цѣлыхъ рѣшеній коэффиціенты a и b должны быть первыми между собою, было въ этомъ случаѣ условіемъ *необходимымъ* и *достаточнымъ*.

Что же касается взятой системы 2-хъ ур-ній съ 3 неизвѣстными, то въ каждомъ ур-ніи коэффиціенты могутъ быть числами первыми между собою, а ур-нія могутъ *и не имѣть* цѣлыхъ рѣшеній; слѣд. условіе это для данной системы, будучи необходимымъ, можетъ быть еще недостаточнымъ (см. далѣе случай II).

424. Пріемъ рѣшенія состоитъ въ исключеніи одного изъ неизвѣстныхъ; исключивъ, напр., z, найдемъ:

$$(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

При этомъ могутъ представиться слѣдующіе 3 случая:

425. *Первый случай.* — Если коэффиціенты при x и y въ ур-ніи (3) — числа первыя между собою, то, какъ извѣстно, ур-ніе это необходимо имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Если одна пара этихъ рѣшеній будетъ α и β, то всѣ цѣлыя рѣшенія выразятся формулами:

$$x=\alpha+(bc'-b'c).t,$$
$$y=\beta-(ac'-a'c).t.$$

Подставивъ ихъ въ ур. (1), найдемъ

$$cz-c(ab'-a'b)t=d-a\alpha-b\beta.$$

Первая часть дѣлится на c; если раздѣлится и вторая часть, то ур. будетъ имѣть цѣлыя рѣшенія, въ противномъ случаѣ—нѣтъ. Пусть дѣленіе $d-a\alpha-b\beta$ на c совершается безъ остатка и пусть

$$\frac{d-a\alpha-b\beta}{c}=\gamma, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

тогда
$$z-(ab'-ba')t=\gamma,$$

откуда $$z=\gamma+(ab'-ba')t.$$

[Изъ (4) имѣемъ: $a\alpha+b\beta+c\gamma=d$, т. е. α, β и γ обращаютъ 1-ое ур-ніе въ тождество, а потому составляютъ систему цѣлыхъ рѣшеній этого ур-нія].

Итакъ, имѣемъ симметричныя формулы

$$x=\alpha+(bc'-b'c).t,$$
$$y=\beta+(ca'-ac')t,$$
$$z=\gamma+(ab'-ba')t:$$

цѣлыя t дадутъ цѣлыя же значенія и для x, y и z.

Положивъ для краткости:

$$bc'-b'c=p,\quad ca'-a'c=q,\quad ab'-a'b=r,$$

найдемъ

$$x=\alpha+pt,\quad y=\beta+qt,\quad z=\gamma+rt.$$

Если бы по смыслу задачи требовалось найти для x, y, z цѣлыя *положительныя* числа, то пришлось бы рѣшить совмѣстныя неравенства

$$\alpha+pt>o,\quad \beta+qt>o,\quad \gamma+rt>o,$$

которыя дадутъ три предѣла для t.

Если всѣ эти предѣлы одного смысла, то: 1) когда всѣ они нисшіе, то нужно давать t всѣ цѣлыя значенія, большія большаго изъ нихъ; 2) если всѣ три предѣла высшіе, то надо давать t всѣ цѣлыя значенія, меньшія меньшаго изъ нихъ; въ томъ и другомъ случаѣ ур-ніе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Если предѣлы не всѣ одного смысла, то нужно давать t всѣ цѣлыя значенія, содержащіяся между этими предѣлами: число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній будетъ, слѣдовательно, ограниченное Наконецъ, если предѣлы получатся противорѣчащіе, то ур-нія не имѣютъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ. — Рѣшить ур-нія

$$15x+35y+35z=385,$$
$$6x+9y+8z=104.$$

Всѣ коэффиціенты перваго ур-нія имѣютъ общаго множителя 5, на который и сокращаемъ это ур-ніе, послѣ чего получимъ систему

$$3x+7y+7z=77,$$
$$6x+9y+8z=104.$$

Въ каждомъ изъ этихъ ур-ній въ отдѣльности коэффиціенты *при неизвѣстныхъ* числа первыя между собою; стало быть, возможно, что ур-нія имѣютъ цѣлыя рѣшенія. Предварительно сдѣлаемъ нѣкоторыя упрощенія. Въ первомъ ур-ніи коэффиціенты 7, 7 и 77 дѣлятся на 7; раздѣливъ обѣ части на это число, найдемъ ур-ніе

$$\frac{3x}{7}+y+z=11;$$

замѣчая, что $\frac{x}{7}$ должно быть цѣлымъ, полагаемъ $\frac{x}{7}=x'$, откуда

$$x=7x',$$

а уравненіе принимаетъ видъ

$$3x'+y+z=11\ldots.(1')$$

Во второмъ уравненіи коэффиціенты 6, 8 и 104 дѣлятся на 2; по сокращеніи на это число, получимъ

$$3x+\frac{9y}{2}+4z=52;$$

такъ какъ $\frac{y}{2}$ должно быть цѣлымъ, то положивъ $\frac{y}{2}=y'$, откуда $y=2y'$, имѣемъ

$$3x+9y'+4z=52\ldots.(2')$$

Внося въ ур. $(1')$ $2y'$ вмѣсто y, а во $(2')$ $7x'$ вмѣсто x, найдемъ:

$$3x'+2y'+z=11,$$
$$21x'+9y'+4z=52.$$

Умноживъ первое изъ этихъ ур-ній на 4 и вычтя второе, мы исключимъ z и получимъ (по умноженіи на -1):

$$9x'+y'=8,$$

откуда

$$y'=8-9x'.$$

Отсюда видно, что всякому цѣлому x' соотвѣтствуетъ цѣлый y'. Внося эту величину y' въ ур-ніе $3x'+2y'+z=11$, находимъ

$$-15x'+z=-5,$$

откуда

$$z=-5+15x',$$

слѣд. цѣлому x' соотвѣтствуетъ и цѣлый z. Такимъ образомъ, y' и z выражены черезъ x', самый же x' произволенъ. Находимъ теперь формулы для x, y, z; они будутъ

$$x=7x',$$
$$y=16-18x',$$
$$z=-5+15x',$$

гдѣ x' — произвольное цѣлое число.

Если надо имѣть цѣлыя положительныя величины неизвѣстныхъ, то рѣшаемъ неравнства

$$7x'>0,\quad 16-18x'>0 \quad \text{и} \quad -5+15x'>0,$$

откуда

$$x'>0,\quad x'<\frac{8}{9},\quad x'>\frac{1}{3}.$$

Предѣлы одного свойства $\left(0 \text{ и } \frac{1}{3}\right)$ приводятся къ одному: $\frac{1}{3}$, слѣд. должно быть:

$$\frac{1}{3}<x'<\frac{8}{9};$$

а какъ между этими предѣлами нѣтъ цѣлыхъ чиселъ, то заключаемъ, что уравненія не допускаютъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

426. *Второй случай.* — Если коэффиціенты $ac'-ca'$ и $bc'-cb'$ имѣютъ общаго множителя k, который не дѣлитъ $dc'-cd'$, ур. (3) не будетъ имѣть цѣлыхъ рѣшеній, а слѣд. и данныя уравненія не будутъ ихъ имѣть.

Примѣръ. Такъ, уравненія

$$5x + 4y - 3z = 11,$$
$$4x + 7y + 9z = 26$$

имѣютъ, каждое, коэффиціенты при x, y, z первые между собою, но не допускаютъ цѣлыхъ рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ первое на 3 и сложивъ со вторымъ, найдемъ

$$19x + 19y = 59,$$

въ которомъ коэффиціенты при x и y имѣютъ общаго множителя 19, на который 59 не дѣлится.

Точно также не имѣютъ цѣлыхъ рѣшеній и ур-нія, выводимыя изъ данныхъ исключеніемъ x или y. Первое было бы

$$19y + 57z = 86, \quad \text{или} \quad y + 3z = \frac{86}{19};$$

а второе

$$19x - 57z = -27, \quad \text{или} \quad x - 3z = -\frac{27}{19};$$

оба неразрѣшимы въ цѣлыхъ числахъ.

427. *Третій случай.* Если всѣ три количества $ac' - ca'$, $bc' - cb'$ и $dc' - cd'$ имѣютъ общаго множителя k, то раздѣливъ все ур-ніе на k и назвавъ частныя отъ раздѣленія этихъ количествъ на k буквами m, n и p, получимъ ур.

$$mx + ny = p.$$

Если m и n — числа первыя между собою, то найдемъ цѣлыя рѣшенія для x и y вида:

$$x = \alpha - nt, \quad y = \beta + mt.$$

Подставляя въ одно изъ данныхъ уравненій, напр. въ 1-ое, получимъ ур-ніе въ z и t; если оно допускаетъ цѣлыя рѣшенія, онѣ будутъ вида:

$$z = \gamma + qt', \quad \text{и} \quad t = \delta + rt'.$$

Подставляя выраженіе для t въ формулы x и y, выразимъ всѣ три неизвѣстныя черезъ t'; итакъ

$$x = (\alpha - n\delta) - nrt';$$
$$y = (\beta + m\delta) + mrt';$$
$$z = \gamma + qt'.$$

Цѣлыя значенія t' дадутъ таковыя же и для x, y и z.

Примѣръ. Пусть даны ур-нія

$$6x - 7y + 2z = 21 \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$
$$8x + 5y + 6z = 49 \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Исключивъ z, находимъ

$$10x - 26y = 14,$$

или, по сокращеніи на 2:

$$5x - 13y = 7,$$

откуда:

$$x = 4 - 13t, \quad y = 1 - 5t.$$

Подстановка въ (1) дастъ:

$$-43t+2z=4,$$

или

$$-\frac{43t}{2}+z=2.$$

Положивъ $\frac{t}{2}=t'$, откуда $t=2t'$, получимъ

$$-43t'+z=2;$$

слѣд.

$$z=2+43t', \quad t=2t'.$$

Окончательно:

$$x=4-26t', \quad y=1-10t', \quad z=2+43t'.$$

Легко видѣть, что данная система не допускаетъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

428. Задача. *Найти число, которое при раздѣленіи на* 11, *на* 17 *и на* 23, *давало-бы послѣдовательно остатки* 4, 9 *и.* 10.

Обозначивъ частныя соотвѣтственно буквами x, y и z, а искомое число буквою N, имѣемъ:

$$\frac{N}{11}=x+\frac{4}{11}, \quad \frac{N}{17}=y+\frac{9}{17}, \quad \frac{N}{23}=z+\frac{10}{23}, \text{ или:}$$

$$N=11x+4, \quad N=17y+9, \quad N=23z+10,$$

откуда получаемъ два уравненія:

$$11x+4=17y+9 \quad \text{и} \quad 11x+4=23z+10,$$

которыя можно представить въ видѣ:

$$11x-17y=5 \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$11x-23z=6 \quad . \; . \; . \; . \; (2).$$

Изъ (1) имѣемъ:

$$x=\frac{5+17y}{11}=2y+\frac{5(1-y)}{11}=2y+5t,$$

полагая $\frac{1-y}{11}=t$, откуда $y=1-11t$.

Подставляя вмѣсто y его величину въ выраженіе x, получимъ

$$x=2-17t,$$

и

$$y=1-11t.$$

Подставляя выраженіе x въ ур. (2), находимъ

$$11(2-17t)-23z=6, \quad \text{или} \quad 187t+23z=16 \quad . \; . \; . \; . \; (3).$$

Отсюда $z=\frac{16-187t}{23}=-8t+\frac{16-3t}{23}=-8t+t'$,

полагая $\frac{16-3t}{23}=t'$, или $3t+23t'=16$, откуда

$t=\frac{16-23t'}{3}=5-8t'+\frac{1+t'}{3}=5-8t'+t''$, полагая $\frac{1+t'}{3}=t''$.

Изъ послѣдняго ур-нія имѣемъ: $t' = -1 + 3t''$. Обратная подстановка даетъ послѣдовательно:

$$t = 5 - 8(-1 + 3t'') + t'' = 13 - 23t'';$$
$$z = -8(13 - 23t'') - 1 + 3t'' = -105 + 187t''.$$

Остается x и y выразить въ зависимости отъ t''; получимъ:

$$x = -219 + 391t'',$$
$$y = -142 + 253t'',$$
$$z = -105 + 187t''.$$

Взявъ для N одну изъ трехъ формулъ этого числа, напр. $N = 11x + 4$ и подставивъ вмѣсто x найденное выраженіе, имѣемъ:

$$N = 11(-219 + 391t'') + 4 = -2405 + 4301t''.$$

Это и есть общая формула всѣхъ чиселъ, имѣющихъ то свойство, что при дѣленіи на 11, 17 и 23, они даютъ остатки, соотвѣтственно ровные 4, 9 и 10. Полагая $t'' = 0, 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots$ находимъ цѣлый рядъ чиселъ этого свойства. Такъ:

$t = 0$ даетъ $N = -2405$;

$t = 1$ даетъ $N = 1896$; и т. д.

Если бы требовалось найти наименьшее положительное число даннаго свойства, то оно соотвѣтствовало бы наименьшему цѣлому t'', дающему для N — положительное значеніе. Такое t'' опредѣляется изъ условія: $-2405 + 4301t'' > 0$, и есть $t'' = 1$; соотвѣтствующая величина N равна 1896.

429. Подобнымъ же образомъ рѣшается всякая система ур-ній, въ которой число неизвѣстныхъ однимъ больше числа уравненій, потому-что послѣдовательныя исключенія неизвѣстныхъ всегда приведутъ къ одному ур-нію съ 2 неизвѣстными. Пусть для примѣра дана

Задача. *Найти число, которое при раздѣленіи на* 5, 6, 7 *и* 8 *давало-бы послѣдовательные остатки* 3, 1, 0 *и* 5.

Обозначивъ искомое число буквою N, а частныя по порядку буквами x, y, z и u, находимъ:

$N = 5x + 3$, $N = 6y + 1$, $N = 7z$, $N = 8u + 5$; откуда 3 ур-нія

1. $5x - 6y = -2$,
2. $5x - 7z = -3$,
3. $5x - 8u = 2$.

Въ данномъ случаѣ нѣтъ даже надобности въ исключеніи неизвѣстныхъ, ибо и безъ того каждое ур-ніе содержитъ только два неизвѣстныя.

Рѣшая ур-ніе $5x - 6y = -2$, находимъ:

$$y = 2 + 5t, \quad x = 2 + 6t.$$

Вставляя $x = 2 + 6t$ въ уравненіи (2), получаемъ ур-ніе

$$7z - 30t = 13,$$

изъ котораго находимъ

$$z = -11 + 30t', \quad t = -3 + 7t'.$$

Выразивъ x и y черезъ t', имѣемъ

$$x = -16 + 42t', \quad y = -13 + 35t'.$$

Вставляя вм. x его выраженіе черезъ t' въ ур. 3., имѣемъ

$$210t' - 8u = 82,$$

откуда: $$t' = 1 + 4t'', \quad u = 16 + 105t''.$$

Выражая и остальныя неизвѣстныя черезъ t'', получаемъ

$$x = 26 + 168t'',$$
$$y = 22 + 140t'',$$
$$z = 19 + 120t'',$$
$$u = 16 + 105t''.$$

Вычисляя N, проще всего по формулѣ $N = 7z$, находимъ:

$$N = 133 + 840t''.$$

Итакъ, искомыя числа имѣютъ видъ $133 + 840t$; изъ нихъ наименьшее положительное $= 133$.

3. Рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ уравненія, содержащаго болѣе двухъ неизвѣстныхъ.

430. Ограничимся разсмотрѣніемъ случая одного уравненія съ 3 неизвѣстными.

Пусть будетъ $ax + by + cz = d$ такое ур., въ которомъ a, b, c и d—числа цѣлыя. Прежде всего необходимо, чтобы коэффиціенты a, b и c не имѣли такого общаго множителя, который не заключается въ d; иначе ур. не могло бы быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ. Если же эти коэффиціенты имѣютъ общаго множителя, содержащагося въ d, то его удаляютъ сокращеніемъ; затѣмъ могутъ представиться два случая: 1) изъ трехъ коэффиціентовъ a, b и c, по крайней мѣрѣ, два—первые между собою (или a и b, или a и c, или b и c), какъ напр. въ ур-ніи $12x + 11y + 15z = 141$, гдѣ 12 и 11 — числа первыя между собою; 2) или каждые два коэффиціента имѣютъ общаго множителя, такъ-что нѣтъ ни одной пары коэффиціентовъ первыхъ между собою; таково ур-ніе

$$12x + 15y + 20z = 181,$$

въ которомъ 12 и 15 дѣлятся на 3; 12 и 20 — на 4, а 15 и 20 — на 5.

431. *Первый случай*. Пусть a и b—числа первыя между собою; перенесемъ cz во вторую часть и приложимъ къ ур-нію

$$ax + by = d - cz$$

пріемъ § 416, принимая на-время z за извѣстное; такимъ образомъ мы найдемъ формулы

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at,$$

въ которыхъ α и β—цѣлые относительно z полиномы первой степени. Давая z и t произвольныя цѣлыя значенія, найдемъ цѣлыя значенія и для x и y.

Если неизвѣстныя должны быть, сверхъ того, положительными, то даемъ z произвольное, но цѣлое и положительное, значеніе, и полагаемъ

$$\alpha - bt > 0 \quad \text{и} \quad \beta + at > 0,$$

откуда получимъ для t два предѣла; смотря по тому, будутъ-ли эти предѣлы одного смысла или разнаго, согласные между собою или противорѣчащіе, получится неограниченное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній для x и y, или же ограниченное, или же такихъ рѣшеній совсѣмъ не будетъ. Такимъ образомъ поступаютъ по отношенію ко всякому цѣлому положительному значенію z.

Примѣръ. Пусть дано ур-ніе

$$5x + 8y - 12z = 41.$$

Такъ какъ 5 и 8 числа первыя между собою, то указанный пріемъ примѣнимъ къ этому уравненію. Итакъ

$$5x + 8y = 41 + 12z,$$

откуда $$x = \frac{41 + 12z - 8y}{5} = 8 + 2z - 2y + \frac{1 + 2z + 2y}{5},$$

или $$x = 8 + 2z - 2y + t,$$

полагая $\dfrac{1 + 2y + 2z}{5} = t$, или $2y - 5t = -1 - 2z$. Отсюда

$$y = \frac{-1 - 2z + 5t}{2} = -z + 2t + \frac{t-1}{2} = -z + 2t + t',$$

полагая $\dfrac{t-1}{2} = t'$ или $t = 1 + 2t'$.

Это значеніе, подставленное въ y, даетъ

$$y = -z + 2 + 4t' + t' \quad \text{или} \quad y = -z + 2 + 5t'.$$

Подставляя найденныя для y и t величины въ формулу x, получимъ

$$x = 8 + 2z + 2z - 4 - 10t' + 1 + 2t' = 5 + 4z - 8t'.$$

Если ищемъ для x, y и z только положительныя цѣлыя значенія, то опредѣляя предѣлы для t', получимъ

$$t' > \frac{z-2}{5} \quad \text{и} \quad t' < \frac{4z+5}{8}.$$

Отсюда: $\dfrac{4z+5}{8} > \dfrac{z-2}{5}$, слѣд. $z > -\dfrac{41}{12}$, а какъ для z беремъ только положительныя значенія, то, включая сюда и 0, имѣемъ:

$$z = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ \text{до} + \infty.$$

При $z = 0$ находимъ $t' > -\dfrac{2}{5}$ и $t' < \dfrac{5}{8}$, слѣд. можно положить только $t' = 0$, что дастъ: $x = 5$ и $y = 2$.

При $z = 1$ имѣемъ $t' > -\dfrac{1}{5}$ и $t' < 1\dfrac{1}{8}$; сл. можно взять $t' = 0$ и $t' = 1$, что дастъ:

$t' = 0 \ldots\ldots\ldots$ $y = 1$, $x = 9$;
$t' = 1 \ldots\ldots\ldots$ $y = 6$, $x = 1$.

При $z=2$ находимъ $t'>0$ и $t'<1\frac{5}{8}$; слѣд. можно взять $t'=0$ (ибо условіе $t'>0$ не исключаетъ равенства) и $t'=1$.

При $t'=0$ имѣемъ: $y=0$, $x=13$;
при $t'=1$ » $y=5$, $x=5$.

При $z=3$ получаемъ $t'>\frac{1}{5}$ и $t'<2\frac{1}{8}$, слѣд. можно взять: $t'=1$ и $t'=2$, что дастъ:

$$t'=1\ .\ .\ .\ .\ \ y=4,\ \ x=9;\quad t'=2\ .\ .\ .\ .\ \ y=9,\ \ x=1.$$

Продолжая такимъ образомъ, получимъ сколько угодно системъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

432. *Второй случай.* Положимъ теперь, что между тремя коэффиціентами нѣтъ ни одной пары взаимно-первыхъ. Назовемъ буквою h общаго наиб. дѣлителя, напр., для a и b; и пусть a' и b' будетъ частныя отъ раздѣленія a и b на h. Ур. будетъ

$$ha'x+hb'y+cz=d,$$

откуда

$$a'x+b'y=\frac{d-cz}{h}.$$

Полагая, что первая часть есть число цѣлое, необходимо, чтобы и вторая равнялась цѣлому числу, напр. t; въ такомъ случаѣ

$$a'x+b'y=t\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

и $\frac{d-cz}{h}=t$, или $cz+ht=d\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$.

Но a' и b' первыя между собою, какъ частныя отъ раздѣленія a и b на ихъ общ. наиб. дѣл. h; а потому ур. (1) имѣетъ цѣлыя рѣшенія вида:

$$x=\alpha-b't'\quad\text{и}\quad y=\beta+a't'\ .\ .\ .\ (3)$$

въ которомъ α и β суть цѣлые полиномы первой степени относительно t.

Затѣмъ, замѣчая, что c и h — первыя между собою числа, потому — что множитель h, будучи общимъ для a и b, не дѣлитъ c; ур. (2) имѣетъ, слѣд., цѣлыя рѣшенія вида

$$z=\gamma-ht''\quad\text{и}\quad t=\delta+ct''\ .\ .\ .\ (4)$$

подставляя эту величину t въ формулы x и y, мы представимъ эти неизвѣстныя цѣлыми полиномами первой степени въ t'' и t': между тѣмъ какъ z зависитъ только отъ t''.

Если вопросъ требуетъ еще, чтобы x, y и z были положительными, то должно выразить, что величины ихъ больше нуля; въ полученныхъ неравенствахъ нужно отдѣлить t' и t'' и такимъ образомъ получить предѣлы для этихъ неопредѣленныхъ; изъ теоріи неравенствъ мы знаемъ, что это не всегда возможно.

Примѣръ. — Пусть дано ур-ніе

$$6x-10y+15z=37.$$

Замѣчая, что 6 и 10 имѣютъ общаго дѣлителя 2, даемъ ур-нію видъ:

$$3x-5y=\frac{37-15z}{2},$$

и полагаемъ, что

$$3x - 5y = t \text{ и } \frac{37 - 15z}{2} = t \text{ или } 15z + 2t = 37.$$

Изъ перваго находимъ

$$y = t - 3t' \text{ и } x = 2t - 5t'.$$

Изъ втораго имѣемъ

$$z = 1 - 2t'' \text{ и } t = 11 + 15t''.$$

Вставляя эту величину t въ выраженія y и x, получимъ

$$y = 11 + 15t'' - 3t' \text{ и } x = 22 + 30t'' - 5t'.$$

достаточно дать t' и t'' какія угодно цѣлыя величины и такимъ образомъ получатся цѣлыя значенія x, y и z.

Чтобы выдѣлить только положительныя, полагаемъ

$$1 - 2t'' > 0; \quad 11 + 15t'' - 3t' > 0; \quad 22 + 30t'' - 5t' > 0.$$

Первое даетъ $t'' < \frac{1}{2}$. Два другія можно написать такъ:

$$3t' - 15t'' < 11 \text{ и } 5t' - 30t'' < 22,$$

или, умноживъ первое на 2:

$$6t' - 30t'' < 22 \text{ и } 5t' - 30t'' < 22.$$

Изъ условія $2t'' < 1$ имѣемъ $30t'' < 15$. Складывая это неравенство съ каждымъ изъ двухъ предыдущихъ, находимъ условія

$$6t' < 37 \text{ и } 5t' < 37,$$

изъ которыхъ второе заключеется въ первомъ. Итакъ, количеству t' можно давать только значенія

$$+6, +5, +4, \ldots\ldots \text{ до } -\infty$$

Изъ неравенствъ въ t' и t'' находимъ

$$t'' > \frac{6t' - 22}{30} \text{ и } t'' > \frac{5t' - 22}{30}.$$

При положительныхъ t' первый предѣлъ больше втораго, поэтому нужно удержать первый предѣлъ. При отрицательныхъ t' — наоборотъ, причемъ для t'' слѣдуетъ брать только величины между 0 и этимъ вторымъ предѣломъ.

Такимъ образомъ находимъ:

Для $t' = 6$; 5; 4 — нѣтъ соотвѣтствующихъ значеній для t''.

При:

$t' = 3$	имѣемъ:	$t'' = 0$;	откуда	$x = 7$;	$y = 2$;	$z = 1$.
$t' = 2$	«	$t'' = 0$;	«	12;	5;	1.
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$t' = -2$	«	$t'' = 0$;	«	$x = 32$;	$y = 17$;	$z = 1$.
	«	-1;	«	2;	2;	3.
$t' = -3$	«	0;	«	37;	20;	1.
	«	-1;	«	7;	5;	3.
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$t' = -8$	«	$t'' = 0$;	«	$x = 62$;	$y = 35$;	$z = 1$.
	«	-1;	«	32;	20;	3.
	«	-2;	«	2.	5;	5.

и т. д.

433. Задачи.

Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ уравненія:

1. $5x+7y+4=56$.
2. $y=13+\frac{4}{13}(15-x)$.
3. $5x+8y=29$.
4. $17x+53y-123=441-19x+15y$.
5. $17x=11y+86$.
6. $11x-13y=36y-3x-133$.
7. $89x-144y=1$.
8. $\frac{73x+17}{19}=\frac{58y-56}{21}$.
9. $16x+4y=1830$.
10. $2373=13x+24y$.
11. $123x+567y=5028$.
12. $7x+3y=1000$.
13. $3875x+2973y=122362$.
14. $x+3y+5z=44$: $3x+5y+7z=68$.
15. $x+2y+3z=50$; $4x-5y-6z=-66$.
16. $2x+5y-7z=22$; $3x+4y-8z=0$.
17. $3x+5y+7z=560$; $9x+25y+49z=2920$.
18. $6x+7y+4z=122$, $11x+8y-6z=145$.
19. $2x+14y-7z=341$; $10x+4y+9z=473$.
20. $x+2y+3z=14$; $2x+3y+4t=24$; $3x+4z+5t=35$.
21. $7x+4y+9z=89$.
22. $8x+13y+17z=89$.
23. $3x-18y+5z=-47$.
24. $10x+13y+8z=143$.

25. Дробь $\frac{128}{117}$ представить въ видѣ суммы двухъ положительныхъ дробей съ знаменателями 9 и 13.

26. Найти двѣ положительныя дроби съ знаменателями 11 и 13, разность которыхъ была бы $\frac{82}{143}$.

27. Какъ раздѣлить окружность круга на такія двѣ дуги, чтобы число градусовъ одной дѣлилось на 7, а второй, при раздѣленіи на 12, давало бы остатокъ 11.

28. Въ трехзначномъ числѣ крайняя лѣвая цифра составляетъ $\frac{1}{8}$ числа, образуемаго двумя другими цифрами, а крайняя правая цифра $\frac{1}{8}$ числа, образуемаго остальными двумя цифрами. Опредѣлить это трехзначное число?

29. Садовникъ долженъ разсадить деревья, число которыхъ меньше 1000. Если онъ посадитъ ихъ рядами по 37 штукъ въ каждомъ ряду, то у него останется 8 штукъ; если же онъ разсадитъ ихъ по 43 дерева въ каждомъ ряду, то у него останется 11 штукъ. Сколько у него деревьевъ?

30. Нѣкто уложилъ въ ящикъ 100 книгъ, вѣсившихъ $2\frac{1}{2}$ пуда. Каждый фоліантъ вѣсилъ 4 фунта, каждая книга *in*—4⁰ по 2 ф., а каждая *in*—8⁰ вѣсила $\frac{1}{3}$ фунта. Сколько книгъ каждаго рода положено было въ ящикъ?

31. Нѣкто купилъ на биржѣ 48 тоннъ хлѣба за 10000 марокъ, причемъ тонна пшеницы обошлась ему въ 260 марокъ, тонна ржи въ 190, а тонна овса въ 170

марокъ; при этомъ оказалось, что число тоннъ ржи дѣлилось на 10. Сколько зерна каждаго рода онъ купилъ?

32. Дробь $\frac{674}{385}$ представить въ видѣ суммы трехъ положительныхъ дробей, такъ чтобы сумма числителей равнялась суммы цифръ, изъ которыхъ составлены знаменатели.

33. Владѣлецъ фабрики, желая наградить рабочихъ, расчиталъ, что если каждому мужчинѣ дать по 5 р., каждой женщинѣ по 4 р., а каждому изъ несовершеннолѣтнихъ рабочихъ по 2 р., то потребуется на все 156 р. Если же каждому изъ рабочихъ дать однимъ рублемъ меньше, то потребуется только 118 р. Сколько работаетъ на фабрикѣ мужчинъ, сколько женщинъ и сколько дѣтей?

34. У однаго хозяина работали на четырехъ фермахъ: 12 рабочихъ на первой, 9 на второй, 8 на третьей и 6 на четвертой. Плата всѣмъ равнялась 1350 руб. Плата рабочимъ на второй и третьей фермахъ равнялась въ сложности платѣ рабочимъ первой, а каждый рабочій этой послѣдней получалъ вдвое больше рабочаго четвертой фермы. Какова могла быть плата каждому рабочему на каждой фермѣ, если извѣстно, что эти платы составляли цѣлыя числа рублей?

35. Углы остроугольнаго Δ-ка дѣлятся: одинъ на 7, другой на 9, третій на 11. Сколько градусовъ можетъ содержать каждый уголъ?

36. Для починки водопровода на протяженіи 131 метра имѣются въ запасѣ трубы трехъ сортовъ: въ $1\frac{2}{3}$, въ $2\frac{1}{3}$ и въ 3 метра длиною. Сколькими способами можно сдѣлать поправку трубами всѣхъ трехъ родовъ?

37. Дробь $\frac{121201}{4400}$ разложить на сумму трехъ положительныхъ дробей съ знаменателями 11, 16 и 25?



ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

Страница.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть:*
53	19 сверху	$(a+b)^2$	$(a+b)^3$
78	1 снизу	$A^3 - B^3$	$A^3 + B^3$
106	3 снизу	остатокъ x	остатокъ R.
176		Первая строка § 164 должна быть замѣнена словомъ: *Опредѣленія.*	
189		На черт. 9: въ пересѣченіи окружности съ діагональю должна быть буква М.	
206	10 сверху	$-2a\sqrt{a}$	$-2a\sqrt{b}$
215	2 снизу	$+3\sqrt{2\sqrt{2}-1)}$	$+3\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$
217	Зад. 102 д. б:	$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$	
223	2 сверху	давно бы	дало бы
228	8 сверху	$\frac{\sqrt[m]{B}}{\sqrt[m]{B}}$	$\frac{\sqrt[m]{B}}{\sqrt[m]{A}}$.

$\frac{\sin a}{\cos a} + \sin a = \sin a + \sin a \cos a$

$= \frac{\sin a(1+\cos a)}{\cos a} =$

$\frac{\sin a(\cos 0 + \cos a)}{\cos \ldots}$

$= 0{,}2$

$h = 4{,}5$

$S = a$

$S = 10a \frac{a}{2} = 5ak$

